Ueber eine neue Definition der Primärkomponenten eines Ideals.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 20. 4. 1934.)

Bei der Noetherschen Definition des Primärideals besitzt das zum Einheitsideal gehörige Primärideal eine andere Eigenschaft als beim Primärideal, das zum vom Einheitsideal verschiedenen Primideal gehört. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, werde ich hier die Definition für das Primärideal, die in meinen vorigen Arbeiten[1] eingeführt wurde, benutzen, nud danach eine neue Definition für Primärkomponenten eines Ideals geben. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung über die Darstellbarkeit eines Ideals als Durchschnitt der neuen Primärkomponenten.

Neue Definition der Primärkomponenten eines Ideals.

Es sei der zugrunde gelegte Ring $\mathfrak{R}$ kommutativ, und Primideal aus $\mathfrak{R}$ sei in der gewöhnlichen Fassung.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, und ist ein Ideal $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und ist jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent[2] in bezug auf $\mathfrak{q}$, so heisst $\mathfrak{q}$ ein „*zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal*".

Unter einem *höchsten Primideal eines Ideals* $\mathfrak{a}$ verstehen wir ein Primideal, das Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, und kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt.

Da unser Hauptziel die Untersuchung über die Darstellbarkeit eines Ideals $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt der Primärideale, die zu den höchsten Primidealen von $\mathfrak{a}$ gehören, ist, so mögen wir die folgende Definition für die Primärkomponenten eines Ideals angeben :

(1) S. Mori, Zur Zerlegung der Ideale, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **13**, (1931), 302.

S. Mori, Ueber Sonosche Reduktion von Idealen, dieses Journal **2** (1932), 195.

(2) Daher folgt aber nicht im allgemeinen, dass eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist.

Die Primärideale, die in die Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$ *durch die zu den verschiedenen höchsten Primidealen eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primärideale auftreten, heissen „ Primärkomponenten von* $\mathfrak{a}$ “.

Satz. 1. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring ohne jede Bedingung. Ist ein Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von endlich vielen Noetherschen Primäridealen darstellbar, so ist das Ideal auch als Durchschnitt seiner Primärkomponenten darstellbar.*

Es sei $\mathfrak{a}$ ein gegebenes Ideal aus $\mathfrak{R}$, und sei

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n],$$

wobei die Darstellung eine kürzeste durch die zu verschiedenen Primidealen gehörigen Noetherschen Primärideale ist. Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ die verschiedenen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_s$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$. Dann ist jedes aus $\mathfrak{p}_{s+1}, \mathfrak{p}_{s+2}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ ein Teiler eines aus den höchsten Primidealen. Aus $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ wählen wir die Teiler von $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$ aus, und wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{in_i} (i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$. Setzen wir

$$\mathfrak{q}_i' = [\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{i1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{in_i}] \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, s),$$

dann ist offenbar

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s'].$$

Ist p_i ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$, so ist eine Potenz von p_i durch jedes Primärideals aus $\mathfrak{q}_i, \mathfrak{q}_{i1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{in_i}$ teilbar, und folglich ist $\mathfrak{q}_i' (i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$ ein zu $\mathfrak{p}_i (i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$ gehöriges Primärideal im neuen Sinne. Hiermit ist $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von Primärkomponenten darstellbar.

Ueber höchste Primideale eines Ideals.

Ist $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal und nicht prim, so existiert ein Nullteiler r_1 in bezug auf $\mathfrak{h}$, und folglich ist der Idealquotient $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : (r_1)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Dabei muss $\mathfrak{h}_1$ ein Halbprimideal sein. Sonst wäre eine Potenz r^n eines durch $\mathfrak{h}_1$ unteilbaren Elementes r durch $\mathfrak{h}_1$ teilbar, und daher folgte $(r_1 r)^n \equiv 0\ (\mathfrak{h})$. Da $\mathfrak{h}$ halbprim ist, so sollte $r r_1 \equiv 0\ (\mathfrak{h})$ sein, und wir hätten einen Widerspruch $r \equiv 0\ (\mathfrak{h}_1)$. Ist $\mathfrak{h}_1$ noch nicht prim, so erhalten wir auf gleiche Weise einen Idealquotienten $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 : (r_2)$, und $\mathfrak{h}_2$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{h}_1$ und auch halbprim. In solcher Weise ergibt sich eine Kette von Halbprimidealen $\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 <$

...., wobei jedes Ideal der Idealquotient des vorangehenden, und von $\mathfrak{R}$ verschieden ist.

Gibt es zwischen je zwei sukzessiven Halbprimidealen der obigen Kette kein Halbprimideal von derselben Eigenschaft, so heisst diese Kette eine „*Hauptreihe von Halbprimidealen, die Idealquotienten des vorangehenden sind*".

Es sei

$$\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \ldots\ldots,$$

eine Kette von Halbprimidealen, die Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{h}$ sind.[1] Gibt es in der Kette kein Halbprimideal zwischen je zwei sukzessiven Halbprimidealen, so heisst die Kette eine „*Hauptreihe von Halbprimidealen, die Nullteiler in bezug auf* $\mathfrak{h}$ *sind*".

Hilfssatz. *Ist ein Halbprimideal* $\mathfrak{h}'$ *ein echter Teiler eines Halbprimideals* $\mathfrak{h}$, *und ist* $\mathfrak{h}'$ *ein Nullteiler in bezug auf* $\mathfrak{h}$, *und gibt es kein Halbprimideal zwischen* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{h}'$, *so ist* $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} : \mathfrak{h}'$ *ein höchstes Primideal von* $\mathfrak{h}$.

Wäre $\mathfrak{t}$ kein Primideal, so hätten wir zwei Halbprimideale $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ von der Art, dass

$$\mathfrak{t} = [\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2], \quad \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} : \mathfrak{t}_2, \quad \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t} : \mathfrak{t}_1$$

wäre, da $\mathfrak{t}$ halbprim ist. Da es kein Halbprimideal zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ gibt, so sollte

$$\mathfrak{h}' \equiv 0 \ (\mathfrak{t}_1), \quad \text{oder} \quad [\mathfrak{h}', \mathfrak{t}_1] = \mathfrak{h}$$

sein. Im ersten Fall wäre

$$(1) \qquad \mathfrak{h}'\mathfrak{t}_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{t}), \qquad \mathfrak{h}'^2\mathfrak{t}_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}),$$

und im zweiten Fall würde

$$(2) \qquad \mathfrak{h}'\mathfrak{t}_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}).$$

Hiermit müsste $\mathfrak{t}_2$, oder $\mathfrak{t}_1$ ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{h}$ sein. Da $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ echte Teiler von $\mathfrak{t}$ wären, so müsste $\mathfrak{h} : \mathfrak{t}_2$, oder $\mathfrak{h} : \mathfrak{t}_1$ kein Teiler von $\mathfrak{h}'$ sein, weil $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} : \mathfrak{h}'$ wäre. Andererseits folgte aus (1) oder (2)

$$\mathfrak{h}'^2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h} : \mathfrak{t}_2), \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h}' \equiv 0 \ (\mathfrak{h} : \mathfrak{t}_1).$$

---

(1) Sind zwei Ideale $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}$ unteilbar, und ist $\mathfrak{b}\mathfrak{c} \equiv 0(\mathfrak{a})$, so heisst $\mathfrak{b}$ „*ein Nullteiler in bezug auf* $\mathfrak{a}$".

Da $\mathfrak{h}:\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{h}:\mathfrak{t}_1$ Halbprimideale wären, so ergäbe sich daraus $\mathfrak{h}'\equiv 0\ (\mathfrak{h}:\mathfrak{t}_2)$, oder $\mathfrak{h}'\equiv 0\ (\mathfrak{h}:\mathfrak{t}_1)$. Also hätten wir einen Widerspruch. Also muss $\mathfrak{t}$ ein Primideal sein. Aus $[\mathfrak{t}, \mathfrak{h}'] = \mathfrak{h}$ folgt damit, dass $\mathfrak{t}$ ein höchstes Primideal von $\mathfrak{h}$ sein soll.

Satz 2. *Besitzt jedes nicht-prime Halbprimideal $\mathfrak{h}$ aus $\mathfrak{R}$ immer eine endliche Hauptreihe von Halbprimidealen, die in bezug auf $\mathfrak{h}$ Nullteiler sind, so ist jedes Halbprimideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen höchsten Primidealen darstellbar.*

Es sei

$$\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \dots\dots < \mathfrak{h}_n \tag{1}$$

eine endliche Hauptreihe der Halbprimideale, die Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{h}$ sind. Nach dem Hilfssatz sind

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h}:\mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{h}_1:\mathfrak{h}_2,\ \dots\dots,\ \mathfrak{p}_n = \mathfrak{h}_{n-1}:\mathfrak{h}_n$$

Primideale, und dabei sollen

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{h}_1],\ \mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{h}_2],\ \dots\dots,\ \mathfrak{h}_{n-1} = [\mathfrak{p}_n, \mathfrak{h}_n] \tag{2}$$

sein, da jedes $\mathfrak{h}_i$ halbprim ist. Ist $\mathfrak{h}_n$ kein Primideal, so gibt es nach unserer Voraussetzung ein Halbprimideal $\mathfrak{h}_{n+1}$ derart, dass $\mathfrak{h}_{n+1}$ ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{h}_n$ ist, und dass es kein Halbprimideal zwischen $\mathfrak{h}_n$ und $\mathfrak{h}_{n+1}$ gibt. Nach dem Hilfssatz ist $\mathfrak{p}_{n+1} = \mathfrak{h}_n:\mathfrak{h}_{n+1}$ ein Primideal, und nach (2) wird

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots\dots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1}, \mathfrak{h}_{n+1}].$$

Wäre $[\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots\dots, \mathfrak{p}_{n+1}] \neq \mathfrak{h}$, so hätten wir den Widerspruch, dass die Kette (1) in $\mathfrak{h}_n$ nicht abbricht. Hiermit muss $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \dots\dots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_{n+1}]$ sein. Ist $\mathfrak{h}_n$ prim, so wird nach (2) offenbar $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots\dots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{h}_n]$. Ist ein Primideal $\mathfrak{p}_i$ in der Darstellung ein echter Teiler eines anderen, so lassen wir $\mathfrak{p}_i$ aus der Darstellung weg. Dann ergeben die übrigen Ideale noch $\mathfrak{h}$. Indem wir in der Weise fortfahren, ist $\mathfrak{h}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar, die durcheinander unteilbar sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. *Jedes Halbprimideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen höchsten Primidealen darstellbar, wenn jedes nicht-prime Halbprimideal eine endliche Hauptreihe von Halbprimidealen, die Idealquotienten des vorangehenden sind, besitzt.*

Es sei $\mathfrak{h}$ ein nicht-primes Halbprimideal und $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots., \mathfrak{p}_n]$, wobei $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots., \mathfrak{p}_n$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{h}$ sind. Dann sind

$$(1) \qquad \mathfrak{p}_n \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots., n-1) .$$

Setzen wir $\mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{p}_1, \ldots., \mathfrak{p}_{n-1}]$, so wird $\mathfrak{h}_1\mathfrak{p}_n \equiv 0\ (\mathfrak{h})$, und $\mathfrak{h}_1$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Ist $r\mathfrak{p}_n \equiv 0\ (\mathfrak{h})$, so folgt aus (1) $r \equiv 0\ (\mathfrak{h}_1)$.

Hiermit soll

$$(2) \qquad \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : \mathfrak{p}_n$$

sein. Wäre ein Halbprimideal $\mathfrak{h}_1'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ und ein echtes Vielfaches von $\mathfrak{h}_1$, und wäre $\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h} : \mathfrak{r}$, so würde $\mathfrak{h}_1' \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$ ($i = 1, 2, \ldots., n-1$), $\mathfrak{h}_1' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_n)$, $\mathfrak{r} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_n)$, und daher folgte nach (2), dass $\mathfrak{h} : \mathfrak{r}$ ein Teiler von $\mathfrak{h}_1$ wäre, und wir hätten einen Widerspruch. Also gibt es zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$ kein Halbprimideal, das der Idealquotient von $\mathfrak{h}$ ist. Indem wir auf solche Weise fortfahren, erhalten wir eine endliche Hauptreihe von Halbprimidealen, die Idealquotienten des vorangehenden sind.

In $\mathfrak{R}$ sei die Bedingung erfüllt, und $\mathfrak{h}$ sei ein beliebiges Halbprimideal, das nicht prim ist. Dann existiert eine endliche Hauptreihe von Halbprimidealen $\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \ldots. < \mathfrak{h}_n$, wobei

$$(3) \qquad \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{r}_i, \ \mathfrak{r}_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots., n)$$

ist. Nun setzen wir

$$(4) \qquad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{h}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots., n),$$

und wir werden beweisen, dass $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal ist. Denn, wäre $\mathfrak{p}_i$ kein Primideal, so würde

$$(5) \qquad \mathfrak{p}_i = [\mathfrak{p}_i', \mathfrak{p}_i''], \quad \mathfrak{p}_i' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \quad \mathfrak{p}_i'' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \quad \mathfrak{p}_i' = \mathfrak{p}_i : \mathfrak{p}_i'',$$

Nach (4) und (5) folgte

$$\mathfrak{p}_i'\mathfrak{p}_i''\mathfrak{h}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_{i-1}), \qquad \mathfrak{p}_i''\mathfrak{h}_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_{i-1}),$$

und folglich wäre $\mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{p}_i'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}_{i-1}$. Nach (4) müsste $\mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{p}_i' \neq \mathfrak{h}_i$ sein. Da nach (3) und (4) $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{p}_i$ ist, so sollte $\mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{p}_i'$ durch $\mathfrak{h}_i$ teilbar sein. Also hätten wir einen Widerspruch, da es zwischen $\mathfrak{h}_{i-1}$ und $\mathfrak{h}_i$ ein Halbprimideal $\mathfrak{h}_{i-1} : \mathfrak{p}_i'$ gäbe. Damit soll $\mathfrak{p}_i$ ($i = 1, 2, \ldots., n$) ein Primideal sein. Da $\mathfrak{h}_i$ halbprim ist, so sollen

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{h}_1], \quad \mathfrak{h}_1 = [\mathfrak{p}_2, \mathfrak{h}_2], \ldots\ldots, \mathfrak{h}_{n-1} = [\mathfrak{p}_n, \mathfrak{h}_n]$$

sein, und daraus ergibt sich $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n, \mathfrak{h}_n]$. Andererseits ist $\mathfrak{h}_n$ prim, sonst dürfte die Kette von Halbprimidealen nicht in $\mathfrak{h}_n$ abbrechen. Wir können damit durch die gewöhnliche Methode leicht einsehen, dass $\mathfrak{h}$ als Durchschnitt von endlich vielen höchsten Primidealen darstellbar ist.

Ueber Reduktion des Ideals im Sinne von Noether.

Satz 4[1]. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem der Teilerkettensatz von Primidealen gilt*[2]. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als kürzester Durchschnitt der endlich vielen grössten Noetherschen Primärideale darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Jedes nicht-prime Halbprimideal besitzt stets eine endliche Hauptreihe von Halbprimidealen, die Idealquotienten des vorangehenden sind.*

2. *Existiert ein durch jedes höchste Primideal eines Ideals $\mathfrak{a}$ unteilbares Element r derart, dass der Idealquotient $\mathfrak{a}:(r^i)$ für eine hinreichend grosse Zahl i ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so wird für eine hinreichend grosse Zahl m*

$$\mathfrak{a}:(r^m) = \mathfrak{a}:(r^{m+1}) = \ldots\ldots,$$

und in solchen Idealquotienten existierst ein Idealquotient, der ein Teiler aller anderen ist.

Nehmen wir an, dass ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar ist, so besitzt $\mathfrak{a}$ endlich viele höchste Primideale, und folglich ist nach Satz 3 die erste Bedingung notwendig.

Es sei $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$ eine kürzeste Darstellung durch grösste Primärideale, und es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_s$ die höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$. Ist ein Element r durch jedes $\mathfrak{p}_j (j=1, \ldots\ldots, s)$ unteilbar, und ist $\mathfrak{a}:(r^i)$ für eine hinreichend grosse Zahl i ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, so soll r durch

(1) Vgl. W. Krull, Ueber einen Hauptsatz der allgemeinen Idealtheorie, Sitzungsberichte Heidelberg Nr. 2, (1929), 11.

(2) *Teilerkettensatz von Primidealen:* Die Kette von Primidealen $\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \ldots\ldots$, wobei jedes Primideal ein echter Teiler des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab.

eines aus den zugehörigen Primidealen teilbar sein. Sonst folgte aus $r^i r' \equiv 0\,(\mathfrak{a})$, $r' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a})$ ein Widerspruch $r' \equiv 0\,(\mathfrak{q}_l)$ $(l = 1, 2, \ldots . n)$. Hiermit nehmen wir an, dass r durch $\mathfrak{p}_{t+1}, \ldots ., \mathfrak{p}_n$ teilbar, aber durch $\mathfrak{p}_1, \ldots ., \mathfrak{p}_t\,(s \leqq t)$ unteilbar ist. Dann wird für eine hinreichend grosse Zahl m

$$r^m \equiv 0\left([\mathfrak{q}_{t+1}, \mathfrak{q}_{t+2}, \ldots ., \mathfrak{q}_n]\right), \quad r^m \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots ., t),$$

und daraus folgt

$$[\mathfrak{q}_1, \ldots ., \mathfrak{q}_t] = \mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \ldots .$$

Aber $[\mathfrak{q}_1, \ldots ., \mathfrak{q}_s]$ ist unabhängig von der Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Damit ist die zweite Bedingung auch notwendig.

Umgekehrt setzen wir die Gültigkeit der Bedingungen voraus. Nach Satz 3 besitzt ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ die endlich vielen höchsten Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots ., \mathfrak{p}_s$, und für das Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$ erhalten wir $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \ldots ., \mathfrak{p}_s]$. Es sei $\mathfrak{q}_i\,(i = 1, 2, \ldots ., s)$ ein Ideal, das aus allen und nur den Elementen aus $\mathfrak{p}_i$ besteht, deren Produkt mit einem durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Element in $\mathfrak{a}$ auftritt. Dann ist $\mathfrak{q}_i$ das zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Noethersche Primärideal. Denn, im Fall $s = 1$ ist $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1$, und folglich ist jedes Element aus $\mathfrak{p}_1$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}_1$. Im anderen Fall erhalten wir

$$p_i^k p_i'^k \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \qquad p_i'^k \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i)$$

für ein beliebiges Element p_i aus $\mathfrak{p}_i$ und eine hinreichend grosse Zahl k, und damit ist eine Potenz von p_i durch $\mathfrak{q}_i$ teilbar. Ist $\mathfrak{a} \neq [\mathfrak{q}_1, \ldots ., \mathfrak{q}_s]$, so wird für ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element d aus $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots ., \mathfrak{q}_s]$

$$\begin{gathered} dp_i' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad p_i' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \quad p_i' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j) \\ (j = 1, \ldots ., i-1, i+1, \ldots ., s) \qquad (i = 1, 2, \ldots ., s). \end{gathered}$$

Setzen wir $p' = p_1' + p_2' + \ldots . p_s'$, so wird

$$(1) \qquad dp' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \quad p' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots ., s),$$

Damit ist nach der zweiten Bedingung

$$(2) \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{a} : (r^m) = \mathfrak{a} : (r^{m+1}) = \ldots ., r \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \quad (i = 1, \ldots ., s)$$

für eine hinreichend grosse Zahl m und ein spezielles Element r, wobei $\mathfrak{d}$ kein echtes Vielfaches jedes solchen Idealquotienten ist. Wäre

$\mathfrak{d} \neq [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s]$, so würde (1) für ein durch $\mathfrak{d}$ unteilbares Element d aus $[\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s]$ gelten, und daher würde $\mathfrak{a} : (p'r)^k$ für eine hinreichend grosse Zahl k ein echter Teiler von $\mathfrak{d}$. Also ergäbe sich ein Widerspruch. Hiermit soll

$$\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s] \tag{3}$$

sein. Setzen wir $\mathfrak{a}_1 = (\mathfrak{a}, r^{m+2})$, so muss

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s, \mathfrak{a}_1]$$

sein. Sonst würde $d' \equiv ar^{m+1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $d' \equiv 0\ [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s]$, und daraus folgte nach (3) ein Widerspruch $ar^{m+1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$, $ar^{2m+1} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ gegen (2). In gleicher Weise erhalten wir auch

$$\mathfrak{a}_1 = [\mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{s'}', \mathfrak{a}_2],$$

und die höchsten Primideale $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{s'}'$ von $\mathfrak{a}_1$ sind der echte Teiler eines Primideals aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_s$. Nach dem Teilerkettensatz von Primidealen muss das Verfahren im Endlichen abbrechen, und endlich erhalten wir

$$\mathfrak{a}_m = [\mathfrak{q}_1^{(m)}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{s(m)}^{(m)}].$$

Daraus ergibt sich eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch Primärideale

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_s, \mathfrak{q}_1', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{s'}', \ldots\ldots, \mathfrak{q}_1^{(m)}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{s(m)}^{(m)}],$$

und daher können wir eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch endlich viele grösste Noethersche Primärideale gewinnen.

Beispiel.

In diesem Paragraphen werden wir ein Ideal zeigen, das als Durchschnitt der endlich vielen Primärkomponenten im neuen Sinne, nicht aber im Sinne von Noether, darstellbar ist.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Polynombereich der abzählbar unendlich vielen Unbestimmten $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, und es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, derart, dass

$$\mathfrak{a} = (2x_1, 2^2x_2, 2^3x_3, \ldots\ldots, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\ldots)$$

ist. Dann ist $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt der endlich vielen Primärkomponenten im neuen Sinne, nicht aber im Sinne von Noether, darstellbar.

Zum Beweise betrachten wir den Restklassenring $\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$. Dann enthält jebes Halbprimideal in $\mathfrak{R}'$ alle Elemente x_1, x_2, ..., und $\mathfrak{p}'=(x_1, x_2, \ldots.)$ ist ein Primideal in $\mathfrak{R}'$. In $\mathfrak{R}'$ gilt der Teilerkettensatz von Primidealen und $\mathfrak{p}'$ ist das Halbprimideal des Nullideals in $\mathfrak{R}'$, und 2 ist durch $\mathfrak{p}'$ unteilbar. Da aber in $\mathfrak{R}'$

$$(0) \neq (0):(2) \neq (0):(2^2) \neq \ldots. \neq (0):(2^i) \neq (0):(2^{i+1}) \neq \ldots.$$

ist, so ist das Nullideal in $\mathfrak{R}'$ nach Satz 4 als Durchschnitt der Noetherschen Primärkomponenten nicht darstellbar.

Andererseits ist das Nullideal in $\mathfrak{R}'$ aber ein zu $\mathfrak{p}'$ gehöriges Primärideal im neuen Sinne.