Ueber allgemeine Multiplikationsringe. II.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 20. Januar 1934.)

Wie in meiner früheren Arbeit gleichen Titels[1] seien in der vorliegenden Arbeit auch die Elemente vom zugrunde gelegten Ring $\mathfrak{R}$ in irgendeiner Wohlordnung gegeben.

Ueber Ringe, in denen jedes Ideal mit seinem Kern identisch ist.

Satz 15. *Es sei jedes Ideal des kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch. Ist ein Primideal $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{R}$ verschieden, und ist $\mathfrak{p}'$ kein maximales Ideal, so ist $\mathfrak{p}'$ kein echter Teiler jedes Primärideals.*[2]

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler eines Primärideals $\mathfrak{q}''$ ist, und dass $\mathfrak{q}''$ zu einem Primideal $\mathfrak{p}''$ gehört.[3] Dann ist $\mathfrak{p}'$ ein Teiler von $\mathfrak{p}''$, und ferner können wir in $\mathfrak{p}'$ ein Element p' finden, so dass p' durch $\mathfrak{q}''$ unteilbar ist. Aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}'$ kein maximales Ideal ist, folgt die Existenz eines von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teilers $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}'$, und wir betrachten damit das Ideal

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}p', \mathfrak{q}'') .$$

Wäre $p' \equiv 0$ $(\mathfrak{b})$, so würde

$$rp' \equiv ap' \ (\mathfrak{q}'') , \qquad p' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}'') ,$$

wo r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{R}$, und a ein Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet. Da $\mathfrak{q}''$ ein zu $\mathfrak{p}''$ gehöriges Primärideal ist, so folgte daraus $r-a \equiv 0$ $(\mathfrak{p}'')$. Aus $\mathfrak{p}' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p}'' \equiv 0$ $(\mathfrak{p}')$ ergäbe sich damit $r \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$; was aber unmöglich wäre. Hiermit muss $p' \not\equiv 0$ $(\mathfrak{b})$ sein, und folglich

(1) Journ. of Sci. of the Hiroshima Univ. Ser. A, **4**, S. 1–26.

(2) Dieser Satz ist auch mit Hilfe des Satzes 12 bewiesen. Vgl. den Beweis von Satz 18.

(3) Wir brauchen den Begriff des Primärideals in der üblichen Fassung.

ist $\mathfrak{b}$ kein Primärideal. Aus der in unserem Satz angegebenen Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ ist $\mathfrak{b}$ aber als Durchschnitt aller isolierten Primärkomponenten $\mathfrak{q}_1, \ldots.$ von $\mathfrak{b}$ darstellbar. Da $p' \not\equiv 0\ (\mathfrak{b})$ ist, so wird

$$p' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_i)$$

für eine isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}_i$. Damit ist jedes Element aus $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{q}_i$ nilpotent, und folglich soll das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_i$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}'$ sein. Aber $\mathfrak{p}'$ ist ein Primidealteiler von $\mathfrak{b}$, und damit ist $\mathfrak{p}_i$ kein höchstes Primideal von $\mathfrak{b}$. Das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{q}_i$ eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ ist. Die zuerst vorausgesetzte Annahme ist hiermit falsch, also muss $\mathfrak{p}'$ kein echter Teiler jedes Primärideals sein.

Satz 16. *Es sei jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein von $\mathfrak{R}$ und vom Nullideal verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$, so wird*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1$$

für jedes Primideal $\mathfrak{p}_1$ (einschl. $\mathfrak{R}$).

Zuerst sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Es sei nämlich

$$\mathfrak{R} = (r, \mathfrak{p})\,. \tag{1}$$

Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, so soll $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar sein. Denn, nehmen wir $\mathfrak{p} \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$ an, und setzen wir $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]$, so ist $\mathfrak{d}$ kein Primärideal. Da $\mathfrak{d}$ aber mit seinem Kern identisch sein soll, so muss $\mathfrak{d}$ als Durchschnitt der isolierten Primärkomponenten $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots.$ von $\mathfrak{d}$ darstellbar sein, und dabei ist $\mathfrak{p}$ eine isolierte Primärkomponente. Da $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so soll jedes höchste Primideal $\mathfrak{p}_i$ von $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden sein. Aus $\mathfrak{p}\mathfrak{q} \equiv 0\ (\mathfrak{d})$ folgt aber

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_k)\,.$$

Da $\mathfrak{p} \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_k)$, $\mathfrak{q} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_k)$ für eine zu $\mathfrak{p}_k(\neq \mathfrak{p})$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}_k$ ist, so ergibt sich ein Widerspruch gegen die Eigenschaft vom Primärideal $\mathfrak{q}_k$. Hiermit muss $\mathfrak{q}$ ein Teiler von $\mathfrak{p}$ sein, und folglich wird

$$\mathfrak{q}' = (\mathfrak{p}, q) \equiv 0 \ (\mathfrak{q})\,, \qquad q \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}) \tag{2}$$

für ein Element q aus $\mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{R} \,|\, \mathfrak{p}$ ein Körper ist, so existiert ein Element r', so dass

$$r \equiv qr' \ (\mathfrak{p})\,, \qquad r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}) \tag{3}$$

ist. Aus (1), (2) und (3) folgt damit $\mathfrak{R} = \mathfrak{q}$. Dabei ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiges Primärideal, das zu $\mathfrak{R}$ gehört, und $\mathfrak{R}^2$ ist auch ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Hiermit soll

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$$

sein.

Zweitens nehmen wir an, dass alle von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenen Primideale in $\mathfrak{R}$ kein maximales Ideal sind. Dann ist jedes von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ nach Satz 12 idempotent und nach Satz 15 durch jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal unteilbar. Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, so wird wie beim vorigen Fall auch für jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p} \equiv 0 \ \ (\mathfrak{q}) . \tag{4}$$

Es sei jetzt

$$\mathfrak{q}' = (q, \mathfrak{p}) , \tag{5}$$

we q ein beliebiges durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{q}$ bedeutet. Dann soll $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal sein, da $\mathfrak{p}$ keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Primidealteiler hat. Gäbe es kein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal ausser $\mathfrak{p}$, so würde jedes durch $\mathfrak{p}$ teilbare Ideal ein Primärideal, da jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch ist. Das wäre aber nach Satz 15 unmöglich, weil $\mathfrak{p}$ kein Nullideal ist. Damit existiert in $\mathfrak{R}$ ein von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$ und (0) verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}'$, das kein maximales Ideal ist. Setzen wir

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') ,$$

so ist nach (4) $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Ist p' ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}'$, so wird damit nach (5)

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = (\mathfrak{p}, p') . \tag{6}$$

Setzen wir $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}']$, so wird

$$(\mathfrak{d}, p') = \mathfrak{p}' . \tag{7}$$

Sonst würde nach (6) für ein durch $(\mathfrak{d}, p')$ unteilbares Element p'' aus $\mathfrak{p}'$

$$p'' = p + p'(r + a) ,$$

wo p ein Element aus $\mathfrak{p}$, r ein Element aus $\mathfrak{R}$ und α eine ganze Zahl ist. Daher folgte $p = p'' - p'(r+\alpha)$, also würde $p \equiv 0$ $(\mathfrak{d})$. Damit hätten wir einen Widerspruch $p'' \equiv 0$ $((p', \mathfrak{d}))$. Aus $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'^2$ folgt nach (7)

$$(\mathfrak{d}^2, \mathfrak{d}p', p'^2) = \mathfrak{p}' = (\mathfrak{d}, p'^2). \tag{8}$$

Damit erhalten wir nach (7) und (8)

$$p' \equiv p'r \ (\mathfrak{d}), \qquad p'(r - r^2) \equiv 0 \ (\mathfrak{d}).$$

Dabei muss r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element sein; sonst würde $p' \equiv 0$ $(\mathfrak{d})$. Daher ergibt sich nach $p' \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$

$$r - r^2 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}). \tag{9}$$

Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, so muss damit nach (9)

$$(\mathfrak{p}, r) = \mathfrak{R}$$

sein. Aus $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ folgt damit

$$\mathfrak{R}^2 = (\mathfrak{p}, r)^2 = (\mathfrak{p}, r^2) = (\mathfrak{p}, r) = \mathfrak{R}.$$

Endlich sei das Primideal $\mathfrak{p}_1$ von $\mathfrak{R}$ verschieden. Wenn $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1^2$ ist, so wird unmittelbar $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1$. Im anderen Falle betrachten wir $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1$, und es sei $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_1$. Dann wird $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1$ kein Primärideal, und nach unserer Voraussetzung besitzt $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1$ ein von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{R}$ verschiedenes höchstes Primideal $\mathfrak{p}_2$. Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{R} \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_2)$, $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_2)$ ist. Hiermit soll

$$\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1$$

sein.

Aus dem Beweis des vorigen Satzes folgt unmittelbar

Satz 17. *Es sei jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit seinem Kern identisch. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein von $\mathfrak{R}$ und vom Nullideal verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$, so gibt es kein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal ausser $\mathfrak{R}$.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal, so soll jedes zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{R}$ identisch sein, da nach dem Beweis von Satz 16 $\mathfrak{q}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Ist $\mathfrak{p}$ kein maximales Ideal, so folgt aus der Beziehung (9) im Beweis des Satzes 16, dass $r \equiv 0$ $(\mathfrak{q})$ ist, da jedes Element aus $\mathfrak{R}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist, und da $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist. Daher folgt $\mathfrak{R} = \mathfrak{q}$.

Satz 18. *Jedes Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann mit seinem Kern identisch, wenn in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Besitzt* $\mathfrak{R}$ *ein von* $\mathfrak{R}$ *und vom Nullideal verschiedenes Primideal, so ist*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ (*einschl.* $\mathfrak{R}$).

2. *Ist ein von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenes Primideal* $\mathfrak{p}'$ *nicht maximales Ideal, so wird*

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$$

für jedes durch $\mathfrak{p}'$ *teilbare Ideal* $\mathfrak{b}$ (*einschl.* $\mathfrak{p}'$).[1]

Ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ stets mit seinem Kern identisch, so folgt aus Satz 12 unmittelbar die zweite Bedingung. Jetzt nehmen wir an, dass $\mathfrak{R}$ ein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes Primideal hat. Dann wird nach Satz 16 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$, und ferner gibt es nach Satz 17 kein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal ausser $\mathfrak{R}$. Wäre

$$\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}\mathfrak{a}\,,$$

so würde $\mathfrak{R}\mathfrak{a}$ damit kein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, und es gäbe in $\mathfrak{a}$ ein Element a, das durch $\mathfrak{R}\mathfrak{a}$ unteilbar ist. Aus $\mathfrak{R}(a) \equiv 0\ (\mathfrak{R}\mathfrak{a})$ folgte, dass jede isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{R}\mathfrak{a}$ das Element a enthalten müsste. Aber das wäre unmöglich nach unserer Voraussetzung, dass jedes Ideal mit seinem Kern identisch ist. Damit ist die erste Bedingung auch notwendig.

Umgekehrt werden wir die Gültigkeit der zwei Bedingungen voraussetzen. Es sei $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal, das kein maximales Ideal ist. Dann können wir die drei folgenden Eigenschaften von $\mathfrak{p}'$ beweisen.

---

(1) Die Unabhängigkeit der Bedingungen lässt sich leicht durch die folgenden Beispiele beweisen:

1. Es sei $\mathfrak{R}_1$ ein Polynombereich in x mit ganz-rationalen Koeffizienten, und es sei $\mathfrak{a}_1 = (x^2)$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}_1$. Dann gilt im Restklassenring $\mathfrak{R}_1' = \mathfrak{R}_1 \mid \mathfrak{a}_1$ die erste Bedingung, aber nicht die zweite.

2. Es sei $\mathfrak{R}_2$ ein Polynombereich in x mit geraden ganz-rationalen Koeffizienten, und es sei $\mathfrak{a}_2 = (2x, x-x^2)$ ein Ideal. Dann gilt im Restklassenring $\mathfrak{R}_2 \mid \mathfrak{a}_2$ die zweite Bedingung, aber nicht die erste.

Zuerst ist $\mathfrak{p}'$ kein echter Teiler jedes Primideals. Denn, wäre $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler eines Primideals $\mathfrak{p}''$, so gäbe es in $\mathfrak{p}'$ ein durch $\mathfrak{p}''$ unteilbares Element p'. Nach der zweiten Bedidgung folgte daraus

$$\mathfrak{p}'(p', \mathfrak{p}'') = (p', \mathfrak{p}'') .$$

Daher ergäbe sich

$$p' \equiv p'p_1' \ (\mathfrak{p}'') , \qquad p_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'), \qquad p_1' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}'') .$$

Da $\mathfrak{p}''$ prim ist, so würde damit

$$r \equiv rp_1' \ (\mathfrak{p}'')$$

für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$. Daher folgte unmittelbar $\mathfrak{R} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}')$; was aber unmöglich wäre.

Zweitens ist $\mathfrak{p}'$ kein echter Teiler jedes Primärideals. Wäre ein Primärideal $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{p}'$ teilbar, so müsste $\mathfrak{q}'$ nach dem soeben gewonnenen Ergebnis zu $\mathfrak{p}'$ gehören. Für ein durch $\mathfrak{q}'$ unteilbares Element p' aus $\mathfrak{p}'$ würde nach der zweiten Bedingung

$$p' \equiv p'p_1' \ (\mathfrak{q}') , \qquad p_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}') .$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{p}'$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}'$ ist, so ergäbe sich daraus

$$p' \equiv p'p_1'^m \equiv 0 \ (\mathfrak{q}') ,$$

und wir hätten einen Widerspruch.

Drittens ist $\mathfrak{p}'$ durch jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ teilbar, wenn $\mathfrak{p}$ ein echter Primidealteiler von $\mathfrak{p}'$ ist. Sonst würde $\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{p}']$ von $\mathfrak{p}'$ verschieden, und für ein durch $\mathfrak{d}$ unteilbares Element p' aus $\mathfrak{p}'$ würde

$$\mathfrak{p}'(p', \mathfrak{d}) = (p', \mathfrak{d}) .$$

Wie beim vorigen Fall gäbe es ein Element p_1', so dass

$$p' \equiv p'p_1' \ (\mathfrak{d}) , \qquad p_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}')$$

wäre. Da jedes Element aus $\mathfrak{p}'$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{d}$ wäre, so hätten wir einen Widerspruch $p' \equiv 0 \ (\mathfrak{d})$.

Besitzt $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0), so ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ primär.[1] Damit setzen wir die Existenz eines von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenen Primideals voraus. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, das von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Dann können wir zwei verschiedene Fälle betrachten.

1. Es seien alle höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ maximales Ideal. Wäre

$$\mathfrak{d} \neq \mathfrak{a}$$

für den Kern $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{a}$, so gäbe es in $\mathfrak{d}$ ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element d, und $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (d)$ wäre durch kein Primideal Ausser $\mathfrak{R}$ teilbar.[2] Folglich sollte $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{R}$ identisch sein, da es nach der ersten Bedingung kein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal gibt.[3] Daraus folgte ein Widerspruch

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{a}, d) \neq (\mathfrak{a}, d) .$$

Hiermit muss $\mathfrak{a}$ mit seinem Kern identisch sein.

2. Es sei wenigstens ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$ kein maximales Ideal. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{a}$ von seinem Kern $\mathfrak{d}$ verschieden ist. Ferner sei wie beim vorigen Fall

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (d) , \tag{1}$$

wo d ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{d}$ bedeutet. Da nach der ersten Bedingung $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}, d) = (\mathfrak{a}, d)$ ist, so können wir ein Element r aus $\mathfrak{R}$ finden, so dass

$$d \equiv dr \ (\mathfrak{a}) , \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}')$$

ist. Dabei soll r nicht nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}'$ sein; sonst würde $d \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$. Nach Lemma von Krull ist $\mathfrak{a}'$ damit durch ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, und $\mathfrak{p}$ muss ein echter Teiler eines höchsten Primideals $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{a}$ sein, und folglich ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal und zugleich ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}'$. Ist $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{p}'$ nach dem zuvor gewonnenen Ergebnis durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Aus $d \equiv 0$ $(\mathfrak{p}')$, $\mathfrak{a} \equiv 0$ $(\mathfrak{p}')$ folgt nach der zweiten Bedingung

$$\mathfrak{p}'(\mathfrak{a}, d) = (\mathfrak{a}, d) ,$$

(1) Vgl. Lemma von Krull, Idealtheorie in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101**, S. 732, zitiert mit „K".

(2) K. S. 738.

(3) Ist $\mathfrak{a}'$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, und ist $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{R}$, so wird $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}', r) = (\mathfrak{a}', r)$, wo r ein durch $\mathfrak{a}'$ unteilbares Element bedeutet. Daher folgt $r \equiv rr'$ $(\mathfrak{a}')$. Da r' nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}'$ ist, so ergibt sich danach ein Widerspruch $r \equiv 0$ $(\mathfrak{a}')$.

und daher ergibt sich

$$(2) \qquad d \equiv p'd \ (\mathfrak{a}), \qquad p' \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

für ein Element p' aus $\mathfrak{p}'$. Nach $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} : (d)$ soll dabei $p' \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a}')$ sein, da $d \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Ist $\mathfrak{a}' = \mathfrak{q}$, so ergibt sich nach (2) ein Widerspruch, dass $d \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist. Hiermit soll $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{q}$ sein. Da $\mathfrak{q}$ eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}'$ ist, so folgt nach der Definition von $\mathfrak{q}$ die Exietenz eines Elementes r, so dass

$$(3) \qquad rp' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}'), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

ist. Aus (1), (2) und (3) folgt

$$rd \equiv rp'd \equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Daher erhalten wir nach (1) $r \equiv 0$ $(\mathfrak{a}')$, also wird $r \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$, und wir haben einen Widerspruch. Damit ist die am Anfang angegebene Annahme falsch, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Diesem Satz stellen wir sogleich den folgenden sehr ähnlichen an die Seite:

Satz 18′. *Jedes Ideal aus dem Ring* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann stets mit seinem Kern identisch, wenn in* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*(1)

1. *Besitzt* $\mathfrak{R}$ *ein von* $\mathfrak{R}$ *und* (0) *verschiedenes Primideal, so gibt es im Restklassenring* $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ *keinen Totalnuller, falls* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenes Ideal ist.*

2. *Ist ein von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenes Primideal* $\mathfrak{p}'$ *kein maximales Ideal, so gibt es im Restklassenring* $\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{b}$ *keinen Totalnullteiler, falls* $\mathfrak{b}$ *ein beliebiges echtes Vielfaches von* $\mathfrak{p}'$ *ist.*(2)

Denn, gibt es in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ einen Totalnullteiler r, so ergibt sich

$$\mathfrak{R}(r, \mathfrak{a}) \neq (r, \mathfrak{a});$$

also gilt nicht die erste Bedingung des Satzes 18. Gibt es in $\mathfrak{p}' \mid \mathfrak{b}$ einen Totalnullteiler, so gilt die zweite Bedingung des Satzes 18 auch nicht. Aus der ersten Bedingung folgt

(1) Die Unabhängkeit der Bedingungen folgt auch aus den Beispielen in der Fussnote von *S.* 103.

(2) Ein Element a heisst ein „*Totalnullteiler von* $\mathfrak{R}$“, wenn

$$\mathfrak{R}(a) = (0), \quad a \neq 0$$

ist.

$$\mathfrak{R}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$$

für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ (einschl. $\mathfrak{R}$); sonst gäbe es im Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{R}\mathfrak{a}$ einen Totalnullteiler. Ganz ähnlich folgt aus der zweiten Bedingung

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$$

für jedes Vielfache $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{p}'$ (einschl. $\mathfrak{p}'$). Daher folgt nach Satz 18 die Gültigkeit dieses Satzes.

Die Struktur des allgemeinen Multiplikationsringes.

Nach den Sätzen 14 und 18 ergibt sich unmittelbar

Satz 19. *Besitzt der kommutative Ring $\mathfrak{R}$, in dem der Kern jedes Ideals eine kürzeste Darstellung ist, ein von $\mathfrak{R}$ und vom Nullideal verschiedenes Primideal, so ist $\mathfrak{R}$ dann und nur dann ein Multiplikationsring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*
2. *Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ und ist*

$$(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a} ,$$

so gibt es in $\mathfrak{b}$ ein Element b, so dass

$$b \equiv b^2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist.

3. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) ist immer*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}\mathfrak{a} .$$

4. *Ist das von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}'$ nicht maximales Ideal, so ist stets*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{p}'\mathfrak{b}$$

für jedes durch $\mathfrak{p}'$ teilbare Ideal $\mathfrak{b}$ (einschl. $\mathfrak{p}'$).

Satz 20. *Im Ring $\mathfrak{R}$ gebe es kein Primideal, das von $\mathfrak{R}$ und vom Nullideal verschieden ist. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein allgemeiner Multiplikationsring, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind;*

1. *Es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^2$.*
2. *Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist*

$$(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a} ,$$

so existiert ein von Null verschiedenes idempotentes Element im Restklassenring $\mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$.

Nach Satz 14 sind die Bedingungen notwendig. Sind die Bedingungen vorausgesetzt, und ist das Nullideal nicht prim, so muss jedes Element aus $\mathfrak{R}$ nilpotent sein, und folglich ist $\mathfrak{R}^n \neq \mathfrak{R}^{n+1}$ für jede ganze Zahl n, falls $\mathfrak{R}^n \neq (0)$ ist. Aus $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}^2, r)$ folgt nach der zweiten Bedingung

$$\mathfrak{R} = (r) ,$$

da jedes Element aus $\mathfrak{R}$ nilpotent in bezug auf (r) ist. $(r), (r^2), \ldots ,$ $(r^{m-1}), (0)$ sind damit alle verschiedenen Ideale aus $\mathfrak{R}$. Ist das Nullideal prim, so gilt das soeben gewonnene Ergebnis auch im Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}^2$, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}$, $\mathfrak{a} \neq (0)$ ist. Wir können damit $\mathfrak{a} = (r^a, \mathfrak{a}^2)$ setzen. Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, so wird $\mathfrak{b} = (r^b, \mathfrak{a})$ $b < a$. Ist $\mathfrak{c} = (r^{a-b}, \mathfrak{a})$, so folgt daraus

$$\mathfrak{a} = (r^a, \mathfrak{a}^2) = (r^b, \mathfrak{a})(r^{a-b}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\mathfrak{c} .$$

Hiermit ist $\mathfrak{R}$ auch ein allgemeiner Multiplikationsring.

Nun wollen wir einen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ als „*allgemeinen Multiplikationsring in engerem Sinne*" bezeichnen, wenn in $\mathfrak{R}$ aus der Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ stets die Gültigkeit einer Gleichung

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

folgt. Bei dieser Definition soll $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^2$ sein, und folglich besitzt der allgemeine Multiplikationsring $\mathfrak{R}$ in engerem Sinne dann und nur dann kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und (0), wenn $\mathfrak{R}$ ein Körper ist. Nach Satz 19 folgt damit

Satz 21. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem der Kern jedes Ideals eine kürzeste Darstellung ist. $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein allgemeiner Multiplikationsring in engerem Sinne, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*
2. *Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist*

$$(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a},$$

so gibt es in $\mathfrak{b}$ ein Element b, so dass $b \equiv b^2 \not\equiv 0$ $(\mathfrak{a})$ ist.

3. *Für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) ist stets*

$$\mathfrak{R}\mathfrak{a} = \mathfrak{a} .$$

4. *Ist das von* $\mathfrak{R}$ *verschiedene Primideal* $\mathfrak{p}'$ *nicht maximales Ideal, so ist stets*

$$\mathfrak{p}'\mathfrak{b} = \mathfrak{b}$$

für jedes durch $\mathfrak{p}'$ *teilbare Ideal* $\mathfrak{b}$ *(einschl.* $\mathfrak{p}'$*).*

Aus den Sätzen 19, 20 und 21 ergibt sich die merkwürdige Folgerung:

Die Menge der Multiplikationsringe unterscheidet sich von der Menge der Multiplikationsringe in engerem Sinne nur durch die Menge der Ringe $\mathfrak{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{R}$ *ist kein Körper.*
2. $\mathfrak{R}$ *besitzt kein von* $\mathfrak{R}$ *und* (0) *verschiedenes Primideal.*
3. *Es gibt kein Ideal zwischen* $\mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{R}^2$.
4. *Ist* $\mathfrak{b}$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{a}$, *und ist* $(\mathfrak{b}^n, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{b}^{n+1}, \mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}$, *so existiert in* $\mathfrak{b}$ *ein Element* b, *so dass* $b \equiv b^2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ *ist.*