Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc.

Par

Kiyosi OKA.

(Reçu Jan. 20, 1934.)

1. Le but des recherches, dont le contour et les résultats principaux seront annoncés tout sommairement dans la suite,[1] est à étendre la suite de résultats remarquables de MM. Weierstrass, Stieltjes, Vitali et Montel dans la théorie classique de convergence par rapport aux fonctions analytiques uniformes d'une variable complexe, d'abord aux fonctions analytiques multiformes, et ensuite au delà. La déuxième généralisation n'est possible cependant que jusqu' au théorème de M. Stieltjes.[2]

I. Familles Normales de Surfaces Caractéristiques.

2. Pour traiter une fonction analytique $f(x)$ d'une variable complexe x, tout généralement en multiformité, il sera plus commode et plus général de l'observer dans l'espace à 4 dimensions suivant :

Soit y la deuxième variable complexe, et soient $x = x_1+ix_2$, $y = y_1, +iy_2$, $i = \sqrt{-1}$. Avec ces x, y, nous considérons pour toujours, un espace de coordonnées rectangulaires (x_1, x_2, y_1, y_2), et nous les représentons pour abréger, par (x, y).

Dans un domaine $\varDelta$ donné à l'espace (x, y), l'ensemble de points satisfaisant à l'équation $y=f(x)$, consiste, s'il existe, en une ou plusieurs surfaces continues.

Soit S une quelconque des surfaces, elle sera appelée *d'un seul tenant analytique*, si deux quelconques de ses élements analytiques, considérés aussi à l'espace, peuvent être prolongés analytiquement de l'un à l'autre, sur un chemin convenable dans $\varDelta$, (qui se pose nécessairement sur la surface S).

---

(1) Les détails seront publiés tout prochainement.

(2) Je ne sais qu'un seul mémoire consacré au but pareil: G. Julia. *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieures variables* (Nos. 72-80), Acta, 1926.

Cela étant, nous entendrons sous le mot, "*une surface caractéristique dans Δ*", une surface S comme ci-dessus et d'un seul tenant analytique, en tenant compte des plans caractéristiques de la forme $x =$ constante.

Soit S, de nonveau, une surface caractéristique dans un domaine Δ. Dans un domaine (δ) contenu dans Δ, si elle peut représenter par une équation de la forme $F(x, y) = 0$, $F(x, y)$ étant une fonction holomorphe de deux variables complexes x, y dans (δ), nous appelons la fonction $F(x, y)$, pour abréger, *une fonction adjointe holomorphe* de la caractéristique S pour le domaine (δ).

Nous distinguons deux espèces de points sur la surface caractéristiques S: Un point sur S sera de *première espèce*, si l'on peut tracer autour du point une hypersphère suffisamment petite pour laquel il existe une fonction adjointe holomorphe. Si non, le point sera de *deuxième espèce*.

3. Définition des familles normales. Soit (F) une famille de surfaces caractéristiques sans points de deuxième espèce dans un domaine Δ à espace (x, y).

La famille (F) *sera normale en un point du domaine*, si l'on peut trouver une hypersphère (w) autour du point, suffisamment petite pour que l'on puisse choisir des fonctions adjointes holomorphes $F(x, y)$ dans la hypersphère, pour les caractéristiques de la famille, de façon que la famille des fonctions $F(x, y)$ soit normale[1] dans (w), et de plus qu' il n' y ait pas de constante zéro parmi les fonctions limites.

Il faut remarquer ici que, si un point dans Δ n'appartient pas aux points limites de la famille de surfaces, la famille est normale en ce point d'après le mode de définition.

La famille (F) sera dite *normale dans le domaine* Δ, si elle est normale en tout point du domaine.

Un point du domaine sera appelé d'appartenir aux *points* (J) *de la famille, si la famille n'est pas* normale en ce point.

4. Soit S une surface caractéristique, sans point de deuxième espèce dans un domaine spatial Δ. Correspondant à tout dicylindre à l'intérieur de Δ, on pourra former, grâce à *la méthode classique de* M. Cousin, une certaine fonction adjointe holomorphe de façon que l'on puisse *estimer des bornes des moyennes des modules de la fonction aux deux côtés, avec une seule quantité, l'aire de la surface S dans le dicylindre.* Il en résultera les théorèmes suivants:

(1) Au sens de M. Julia, *loc. cit.*

Théorème 1. *Soit (F) une famille de surfaces caractériques sans point de deuxième espèce dans un domaine Δ à l'espace (x, y). Pour que la famille (F) soit normale dans le domaine Δ, il faut et il suffit que les aires des surfaces de la famille dans un domaine quelconque (δ) à l'intérieur de Δ, soient limitées par une borne supérieure dépandant seulement de (F) et (δ).*

Théorème 2. *L'ensemble de points (J) de la famille (F) appartient à la classe (H),* qui sera définie dans la suite.

II. Ensembles de la Classe (H).

5. Définition et exemples.—*Nous appelons qu'un ensemble E de points à l'espace (x, y) appartient à la classe (H)*(1) *pour un domaine spatial Δ, d'après le nom du découvreur,* M. F. HARTOGS,(2) *s'il jouit des propriétés suivantes:*

1°. *L'ensemble E est fermé à l'intérieur de Δ.*

2°. *Soit O un point fixe, donné arbitrairement à la portion finie de l'espace. La distance du point O à un point quelconque de E n' atteint jamais de maximum relatif, même au sens large, sur la portion finie de E dans le domaine Δ.*

3°. *Les propriétés précédantes de E permettent tonte transformation analytique biunivoque de l'espace (x, y).*

Plus exactement, si un domaine (ω) dans Δ est assujetti à une transformation analytique biunivoque, avec la portion de E dans (ω), l'ensemble transformé jouit encore des propriétés (1°, 2°) pour le nouveau domaine.

L'importance des propriétés ci-dessus a été remarquée pour la première fois, par M. Hartogs, quand il a étudie les ensembles de points singuliers des fonctions analytiques de deux variables complexes, et ces ensembles nous donnent un exemple pour la classe (H), avec un petit peu de modification. Des autres exemples seront trouvés daus *les mémoires de* E. E. LÉVI(3) et M. G. JULIA.(4) Et les surfaces caractéristiques sans point de deuxième espèce font un exemple le plus simple.

La théorie des ensembles de la classe (H) a été développée par ces mathématiciens et par des autres, dont les resultats ne sont naturelle-

(1) Ou plus simplement, "ensemble (H)".
(2) Math. Annalen **62**, Acta. **32**, etc.
(3) Annali di Matematica **17, 18,** série III.
(4) *loc. cit.*

ment pas démontrés abstraitement, on trouvera cependant que presque tous sont établis restrictivement sur les trois propriétés données à la difinition, par exemple, du N° 25 au N° 44 du mémoire cité de M. Julia.

6. Etant donné un ensermble de points E queleonque à l'espace (x, y), pour un point x_0 du plan x, il correspond sur l'ensemble E, des points (x_0, y_0), (x_0, y_1), ... , qui peuvent être nuls, dénombrables, ou non-dénombrables comme ensemble, et de là, l'ensemble de points y_0, y_1, ... , sur le plan y, que nous exprimons par $\mathfrak{S}(x_0)$. C'est *la section de l'ensemble* E par le plan caractéristique $x = x_0$.

Réciproquement, si *une correspondance* $\mathfrak{S}(x)$, un ensemble variable dépendant de x, est donnée, on pent déterminer l'ensemble original E, que nous représentons, tout pareillement aux surfaces caractéristiques, par $y = \mathfrak{S}(x)$.

Comme cas particulier, soit E un ensemble de la classe (H) pour un domaine dicylindrique (x dans D, y dans D'). La section $\mathfrak{H}(x)$ correspondante, se comporte dans le domaine D, de la manière toute ressemblante aux fonctions analytiques, si l'on se restreint dans le domaine D' à observer. C'est sur telles sections $\mathfrak{H}(x)$ que je vais rétablir le théorème de Stieltjes sous forme générale. Je vais préciser d'abord, deux manières de passages aux limites.

7. 1°. **Le passage à la limite à l'espace (x, y).**—Soit (F) une famille d'ensembles (H) pour un domaine spatial Δ, dont *la limite est* E_0. Ce qui signifie que, pour tout voisinage d'un point quelconque[1] de l'ensemble E_0, il existe une infinité d'ensembles de la famille, admettant un point au moins dans le voisinage.

Théorème 3. *La limite à l'espace,* E_0 *de la famille* (F), *appartient aussi à la classe* (H).

2°. **Le passage à la limite sur le plan y.**—Soit $(\sum)$: $E_1, E_2, \ldots,$ $E_\nu, \ldots,$ une suite d'ensembles (H) pour un domaine dicylindrique (D, D'), dont la limite spatiale est E_0. Soit $\mathfrak{H}_\nu(x)$ la section correspondant *à* E_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots.$ Considérons d'autre côté, une correspondance $\mathfrak{K}_0(x)$ de façon que, pour tout voisinage d'un point quelcouque de $\mathfrak{K}_0(x')$, x' étant un point fixe quelcouque dans D, on puisse trouver une infinité d'ensembles de la suite $\mathfrak{H}_\nu(x')$, admettant au moins un point dans le voisinage.[2]

---

(1) Qui peut être à l'infini.

(2) Bien entendu que l'ensemble $\mathfrak{K}_0(x')$ contienne tous les points pareils.

Thésrème 4. *Sur une coube de Jordan rectifiable donnée arbitrairement dans D, l'ensemble consistant des points ξ tels que la frontière de l'ensemble $\mathfrak{H}_0(\xi)$ existe (dans D'), et ne soit pas contenue dans celle de $\mathfrak{K}_0(\xi)$, est de mesure nulle.*

Eu vertu des précédants, il nous suffit d'observer un seul ensemble de la classe (*H*).

III. Généralisations d'un Théorème de M. Hartogs.

8. Nous allons d'abard faire quelques remarques sur *les capacités* d'ensembles de points sur le plan par rapport aux potentiels logarithmiques, qui jouent un rôle fondamental dans la suite. La théorie des capacités, dont la notion a été introduite par M. H. Lebesgue, était développée successivement.(1) Cependant, presque toutes les recherches étant consacrées à trois dimensions, quelques mots seront nécessaires pour donner les premières notions pour notre cas. D'abord, je vais donner les définitions.

1°. *La capacité d'un ensemble ouvert O contenu daus un cercle de rayon plus petit que* $\frac{1}{2}$, est la borne supérieure des masses positives que l'on peut répartir dans l'intérieur à O, sans que les potentiels logarithmiques correspondants surpassent l'unité.

2°. *La capacité extérieure d'un ensemble E contenu à l'intérieur d'un cerele de rayon plus petit que* $\frac{1}{2}$, est la borne inférieure de capacités des ensembles ouverts contenant *E* et contenus dans le mêmecercle.

3° *Un ensemble borné E sera de capacité nulle,* si, pour tout cercle de rayon plus petit que $\frac{1}{2}$, la capacité extérieure de la portion de *E* dans le cercle, est nulle. Si non, *E* sera de *capacité non-nulle.*

Pour les *ensembles fermés et bornés,* les champs des ensembles de capacités nulles et non-nulles respectivement, sont comme suivants:

La famille d'ensembles de *capacités nulles,* recouvre tous les ensembles *dénombrables,* et s'étend au delà.

La famille d'ensembles de *capacités non-nulles,* recouvre les ensembles non-ponctuels(2) et s'étend au delà.

---

(1) Voir: De La Vallée Poussin, Note II, Annale de L'institut Henri Poincaré, 1932.

(2) Au sens de Painlevé.

9. Dans ce qui siut, nous considérons toujours un ensemble E de la classe (H) pour un domaine dicylindrique (x dans D, y quelconque), dont la section correspondante sera dénotée par $\mathfrak{H}(x)$. Nous supposons de plus que la section $\mathfrak{H}(x)$ soit *bornée* dans le domaine D.

Lemme. *Le diamètre $d(x)$ de $\mathfrak{H}(x)$ est une fonction subharmonique logarithmiquement dans le domaine D.*

C'est-à-dire, la fonction log $d(x)$ est subharmonique au sens de M. F. Riesz,[1] seulement au present cas, les fonctions peuvent devenir "très infinies".

A partir du lemme, on obtiendra les théorèmes suivants qui peuvent être regardés comme les généralisés d'un théorème bien connu de M. Hartogs.

Théorème 5. *Si, pour tout point x sur un ensemble de capacité non-nulle, dans le domaine D, l'ensemble $\mathfrak{H}(x)$ ne contient qu' un nombre fini de points du plan y, qui peuvent changer avec x, il en est ainsi pour tout point du domaine D, et cela de façon que la section $\mathfrak{H}(x)$ consiste des fonctions algébroïdes en nombre fini.*

Théorème 6. *Si, pour tout x, sur un ensemble de points de capacité non-nulle dans D, l'ensemble $\mathfrak{H}(x)$ ne contient qu' un nombre dénombrable de points du plan y, qui peuvent changer avec x, il en est ainsi pour tout point du domaine D, où la façon précise est comme suivante :*

1°. On peut trouver un nombre ordinal transfini α de la classe II au plus, indépendant de x, tel que $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x) = 0$, dont $\mathfrak{H}^{(\alpha)}(x)$ représente le dérivé d'ordre α de l'ensemble de points $\mathfrak{H}(x)$, x étant supposé fixe.

2°. On peut recouvrir tout entierement l'ensemble E, avec un nombre dénombrable de surfaces caractéristiques S qui sont définies respectivement dans des hypersphères (ω), et sans point de deuxième espèce dans (ω).

3°. On peut choisir la famille de surfaces caracteristiques précédante de manière que le prolongement analytique de chaque caractéristique S au delà de sa hypersphère (ω) dans le domaine dicylindrique (x dans D, y queleonque), n'engendre aucun point de nouveau, en dehors de E.

(1) Acta. **48**.