Antworten auf die Fragen von Dr. W. Weber.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 27. 5. 1933.)

Nachstehend antworte ich auf die Fragen, die Dr. W. Weber meine Arbeiten betreffend aufgeworfen hat,[(1)] obwohl mir alle diese Fragen als sehr einfältig und oberflächlich erscheinen.

Fragen von Weber.

1. Es sei Primideal $\mathfrak{p}_i$ ein Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$.[(2)] *Ist $\mathfrak{p}_i$ dann ein höchstes Primideal von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m'})$?*

2. Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Einheitselement, in dem der Teilerkettensatz gilt.[(3)] *Wird $\mathfrak{R}$ dann die direkte Summe*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_m ,$$

wo jedes $\mathfrak{m}_i$ das Einheitselement hat und direkt unzerlegbar ist, und m eine endliche ganze Zahl bedeutet?

3. Es sei $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal, das ein Teiler vom nicht-primären Ideal $\mathfrak{a}$ ist, und $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, von der Art, dass $\mathfrak{q}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, und es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}$ gibt,[(4)] und es sei auch $\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+k}) = \dots = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho})\ (k \neq 0)$. *Existiert ein echter Teiler $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$, so dass*

$$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho}), \mathfrak{a}'] = \mathfrak{a} , \qquad \mathfrak{a}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

ist?

4. Hilfssatz. Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ dann und nur dann teilbar durch jede Potenz von jedem echten Teiler

---

(1) Zentralblatt über Mathematik, **5**. Band, Heft **1** (1932), S. 7–8.

(2) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Journal of Science of the Hiroshima Univ., **1**, S. 179, Z. 15.

(3) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, Jour. of Hiroshima Univ., **2**. S. *11*.

(4) S. Mori, Minimale Primärideale eines Ideals, Journal of Hiroshima Univ., **2**, S. 28–29.

von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, oder $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal vom Ring mit Einheitselement ist.(1)

Ein maximales Primideal $\mathfrak{p}$ habe einen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{b}$, und es sei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$. *Ist es nicht falsch, aus dem Hilfssatz zu schliessen, dass für eine ganze Zahl* ρ

$$\mathfrak{b} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^\rho]$$

eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{b}$ *durch grösste Primärideale ist?*

Antworten.

1. Nach der Definition von höchstem Primideal eines Ideals ist $\mathfrak{p}_i$ offenbar ein höchstes Primideal von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_i^{m'})$.

2. Ist $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, so setzen wir nur $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}_1$. Dabei besitzt $\mathfrak{o}_1$ das Einheitselement. Ist $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar, so wird $\mathfrak{R} = \mathfrak{o}_1' + \mathfrak{o}_2'$. Da $\mathfrak{R}$ das Einheitselement hat, so müssen $\mathfrak{o}_1'$ und $\mathfrak{o}_2'$ auch das Einheitselement besitzen. Ist $\mathfrak{o}_1'$ noch direkt zerlegbar, so wird auch $\mathfrak{o}_1' = \mathfrak{o}_{11}' + \mathfrak{o}_{12}'$, und jedes $\mathfrak{o}_{1i}'$ hat auch das Einheitselement. Da in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz gilt, so bricht das Verfahren im Endlichen ab. Also erhalten wir

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_m,$$

wobei jedes $\mathfrak{o}_i$ direkt unzerlegbar ist und das Einheitselement hat.

3. Nach der Voraussetzung, dass $\mathfrak{q} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^{\rho+k}) = \dots = (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho)$, und $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden ist, folgt

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a} = \mathfrak{q}' + \mathfrak{n}', \qquad \mathfrak{n}' \neq (0),$$

wo $\mathfrak{q}'$ das $\mathfrak{q}$ entsprechende Primärideal in $\mathfrak{R}'$ bedeutet (Fussnote von Seite 29). Setzen wir jetzt $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a}, \mathfrak{n}')$, so wird offenbar.

$$[(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}^\rho), \mathfrak{a}'] = \mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

4. Aus dem Hilfssatz folgt zunächst, dass $\mathfrak{p}$ durch eine Potenz $\mathfrak{a}^\lambda$ des echten Teilers $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ unteilbar ist. Aber aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal ist, folgt unmittelbar, dass $\mathfrak{a}^\lambda$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal ist. Hiermit ist offenbar $\mathfrak{b} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^\rho]$ eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{b}$ durch grösste Primärideale.

(1) S. Mori, Ueber Teilerfremdheit von Idealen, Journal of Hiroshima Univ., **2**. S. 104, Z. 14.