Ueber eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 20, 5, 1933.)

Unter Voraussetzung der Existenz einer Hauptkompositions-reihe von Idealen hat zuerst Herr Prof. M. Sono die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gefunden, dass jedes Ideal sich eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellen lässt.(1) Im allgemeinen kommutativen Ring ist dieses Problem nachträglich durch Frl. E. Noether behandelt worden.(2) Durch Umformung des Begriffs der Zerlegung von Idealen hat aber Frl. E. Noether die Darstellung vom Ideal als Durchschnitt von Primärkomponenten eingeleitet.(3) Dabei ist ein kommutativer Ring mit Teilerkettensatz zugrunde gelegt. Statt dieses Ringes hat Herr Prof. M. Sono einen Ring mit Hauptkompositionsreihe zugrunde gelegt, und unter neuer Definition von primärem Ideal hat er wieder die Reduktion von Idealen als Durchschnitt von primären Idealen untersucht.(4) So liegt es nahe, die folgende Frage zu stellen:

In welchem Ring ist jedes Ideal im Sinne von Sono, oder im Sinne von Noether eindeutig zerlegbar?

---

(1) M. Sono, On congruences. 2, Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, **3** (1918), S. 113–149.

M. Sono, On congruences. 3, Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, **3** (1918), S. 189–197.

(2) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926).

(3) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen **83** (1921).

(4) M. Sono, On the Reduction of Ideals, Memoirs of the College of Science, Kyoto Imperial University, **7** (1924).

(5) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Journal of Science of the Hiroshima Univ. **1** (1931).

S. Mori, Ueber Teilerfremdheit von Idealen, Journal of Science of the Hiroshima Univ. **2** (1932).

S. Mori, Ueber Sonosche Reduktion von Idealen, Journal of Science of the Hiroshima Univ. **2** (1932).

Bei der Voraussetzung des Teilerkettensatzes habe ich schon auf diese Frage Antwort gegeben.[5] In der vorliegenden Arbeit werde ich ohne jede Voraussetzung auf diese Frage antworten. Leider ist aber die Antwort auf die Frage bei Reduktion im Sinne von Sono noch nicht vollständig.

Zuerst werde ich die Struktur der kommutativen Ringe, in denen nur der Vielfachenkettensatz vorausgesetzt wird, bestimmen. Daraus folgt unmittelbar, dass die Reduktion jedes Ideals in diesem Ring eindeutig ist. Im allgemeineren Ring, in dem der Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal vorausgesetzt wird, gilt auch die eindeutige Reduktion von Idealen. Wir können damit behaupten, dass die Voraussetzung vom Teilerkettensatz für die eindeutige Reduktion von Idealen nicht notwendig ist.

Im dritten Kapitel werde ich einen kommutativon Ring, in dem der Teilerkettensatz von Primidealen gilt, zugrunde legen, und die Bedingungen für die eindeutige Reduktion jedes Ideals aus diesem Ring untersuchen. Aus dem gewonnenen Ergebnis erhalten wir schliesslich die Antwort auf die oben erwähnte Frage den allgemeinsten Ring betreffend.

Definitionen der wichtigsten Grundbegriffe.

Besitzt ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus dem Ring $\mathfrak{R}$ keinen echten Teiler ausser $\mathfrak{R}$, so heisst $\mathfrak{a}$ „*maximales Ideal*".

Ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ heisst „*Primideal,*" wenn aus $a \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $b \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ stets $ab \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ folgt; wenn also der Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ ein Ring ohne Nullteiler ist. Wenn ein Primideal $\mathfrak{p}$ keinen echten Primidealteiler ausser $\mathfrak{R}$ besitzt, so heisst $\mathfrak{p}$ „*maximales Primideal*".

Ein Primideal $\mathfrak{p}$, das Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, und kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, heisst „*höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$", oder „*minimales Primideal von* $\mathfrak{a}$".

Ein Ideal $\mathfrak{h}$ heisst „*Halbprimideal*", wenn $\mathfrak{h}$ gleichzeitig mit a^r $(r \geqq 1)$ stets auch a enthält, d. h. wenn es in dem Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element gibt. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so ist das Ideal $\mathfrak{h}$, das aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz zu $\mathfrak{a}$ gehört, halbprim, und $\mathfrak{h}$ heisst das „*zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$".

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ heisst „*Primärideal,*" wenn im Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}$ eine Potenz jedes Nullteilers verschwindet; wenn also aus $ab \equiv 0$ $(\mathfrak{q})$, $a \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$ notwendig $b^k \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ folgt.

Ein Ideal $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{R}$ heisst ein „*zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges primäres Ideal*", wenn das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{q}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ ist; wenn also aus $ab \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ notwendig $a^k \equiv 0\ (\mathfrak{q})$, oder $b^k \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ folgt. Ist $\mathfrak{p}$ ein höchstes Primideal eines Ideals $\mathfrak{a}$, und ist $\mathfrak{Q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges primäres Ideal, das Teiler von $\mathfrak{a}$ ist und kein echtes primäres Vielfaches mit der gleichen Eigenschaft besitzt, so heisst $\mathfrak{Q}$ das „*zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige minimale primäre Ideal von* $\mathfrak{a}$".

Eine Darstellung $[\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$ heisst eine „*kürzeste*", wenn kein $\mathfrak{q}_i$ im kleinsten gemeinsamen Vielfachen der übrigen Ideale aufgeht.

Der Ring $\mathfrak{R}$ heisst „*direkte Summe der Ideale* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{a}_n$",— in Zeichen $\mathfrak{R} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{a}_n$, wenn jedes Element $r (\neq 0)$ aus $\mathfrak{R}$ sich auf eine und nur eine Art darstellen lässt in der Form

$$r = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n\,,$$

wo jeweils a_i Element aus $\mathfrak{a}_i$ ist. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus $\mathfrak{R}$ derart, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = (0)$ ist, so wird $\mathfrak{R}$ offenbar die direkte Summe von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ und umgekehrt.

KAPITEL I.

Idealtheorie in kommutativen Ringen mit Vielfachenkettensatz.

I. Struktur der Ringe mit Vielfachenkettensatz.

In diesem Paragraphen sei ein kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ zugrunde gelegt, für den nur der Vielfachenkettensatz erfüllt ist.

Satz I. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal aus dem Ring* $\mathfrak{R}$. *Ist jedes Element aus* $\mathfrak{a}$ *stets nilpotent, so ist* $\mathfrak{a}$ *auch nilpotent.*

Ist $\mathfrak{a}$ das Nullideal, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Wir nehmen daher an, dass $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden ist. Es sei nun $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal, das durch $\mathfrak{a}$ echt teilbar ist, und es sei a_1 ein durch $\mathfrak{b}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{a}$. Dann ist der Idealquotient

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b} : (a_1)$$

von $\mathfrak{b}$ verschieden, da a_1 nilpotent ist. Ist $\mathfrak{q}_1$ kein Primideal, so existieren zwei Elemente a_2 und a_2' derart, dass

$$a_2 a_2' \equiv 0\ \ (\mathfrak{q}_1)\,, \qquad a_2 \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{q}_1)\,, \qquad a_2' \not\equiv 0\ \ (\mathfrak{q}_1)$$

ist. Daher folgt, dass $a_1 a_2 \not\equiv 0$ ($\mathfrak{b}$) ist, und dass der Idealquotient

$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{b} : (a_1 a_2)$$

ein echter Teiler von $\mathfrak{q}_1$ ist, da $a_2' \equiv 0$ ($\mathfrak{q}_2$), $a_2' \not\equiv 0$ ($\mathfrak{q}_1$) ist. Damit soll

$$(a_1) \neq (a_1 a_2)$$

sein; also ist $(a_1 a_2)$ ein echtes Vielfaches von (a_1). Wenn $\mathfrak{q}_2$ aber noch nicht Primideal ist, so ist der Idealquotient

$$\mathfrak{q}_3 = \mathfrak{b} : (a_1 a_2 a_3)$$

wieder ein echter Teiler von $\mathfrak{q}_2$ und folglich wird

$$(a_1) > (a_1 a_2) > (a_1 a_2 a_3) .$$

Indem man so fortfährt, erhält man eine Kette von Idealen

$$(a_1) > (a_1 a_2) > (a_1 a_2 a_3) > \ldots\ldots$$

Nach dem Vielfachenkettensatz soll endlich

$$(a_1 a_2 \ldots . a_k) = (a_1 a_2 \ldots . a_k a_{k+1})$$

sein. Damit soll $\mathfrak{q}_k$ ein Primideal sein, und ferner sind

$$\mathfrak{q}_k(a_1 a_2 \ldots . a_k) \equiv 0 \ (\mathfrak{b}) , \quad a_1 a_2 \ldots . a_k \not\equiv 0 \ (\mathfrak{b}) , \quad a_1 a_2 \ldots . a_k \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) .$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{a}$ nilpotent ist, so soll damit $\mathfrak{a} \equiv 0$ ($\mathfrak{q}_k$) sein. Daher folgt die Existenz eines echten Totalnullteilers von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{b}$,[1] der in $\mathfrak{a}$ enthalten ist.

Die Gesamtheit $\mathfrak{a}_1$ aller Totalnullteiler von $\mathfrak{a}$ in bezug auf (0), die in $\mathfrak{a}$ liegen, bildet ein vom Nullideal verschiedenes Ideal, das durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$, so folgt unmittelbar $\mathfrak{a}^2 = (0)$, und der Satz ist schon bewiesen. Im anderen Fall sei $\mathfrak{a}_2$ die Gesamtheit aller Totalnullteiler von $\mathfrak{a}$ in bezug auf $\mathfrak{a}_1$, die in $\mathfrak{a}$ enthalten sind, dann ist $\mathfrak{a}_2$ offenbar ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$. Wenn wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten des Verfahrens zur Beziehung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_m$ kommen, so wird

$$\mathfrak{a}^2 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{m-1}) , \qquad \mathfrak{a}^3 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_{m-2}) , \qquad \ldots . , \qquad \mathfrak{a}^{m+1} = (0) ,$$

und daraus folgt unser Satz.

(1) Ist $n\,\mathfrak{a} \equiv 0$ ($\mathfrak{b}$), $n \not\equiv 0$ ($\mathfrak{b}$), so heisst das Element n der „*echte Totalnullteiler von* $\mathfrak{a}$ *in bezug auf* $\mathfrak{b}$."

Nun muss gezeigt werden, dass wir nach endlicher Wiederholung des obigen Verfahrens schliesslich zu $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$ kommen. Aus dem Vielfachenkettensatz folgt, dass für eine bestimmte endliche ganze Zahl n

$$(1) \qquad \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1} = \dots = \mathfrak{a}^{2n}$$

ist. Andererseits existiert für $\mathfrak{a}_k$ eine ganze Zahl λ_k von der Art, dass

$$(2) \qquad \mathfrak{a}^{\lambda_k}\mathfrak{a}_k = (0) \qquad \mathfrak{a}^{\lambda_k - 1}\mathfrak{a}_k \neq (0)$$

ist. Denn es ist $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_k \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-1})$, $\mathfrak{a}^2\mathfrak{a}_k \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-2})$. Aus (1) und (2) folgt

$$(3) \qquad \lambda_k \leqq n.$$

Wir können aber

$$(4) \qquad \lambda_k = k$$

beweisen, wenn für jedes i $(< k)$ stets $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1}$ ist. Denn aus der Konstruktion von $\mathfrak{a}_k$ folgt

$$(5) \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{a}_k \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-1}), \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{a}_k \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-2}),$$

sonst würde $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k-1}$. Ferner erhalten wir

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_k) \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-2}), \ \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-3}),$$

sonst würde $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_k \equiv 0\ (\mathfrak{a}_{k-2})$, und wir hätten einen Widerspruch gegen (5). Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir endlich

$$\mathfrak{a}^{k-1}\mathfrak{a}_k \equiv 0\ (\mathfrak{a}_1), \ \not\equiv 0\ (0), \qquad \mathfrak{a}^k\mathfrak{a}_k = (0).$$

Nehmen wir an, dass für jedes i immer $\mathfrak{a}_i \neq \mathfrak{a}_{i+1}$ ist, so ergibt sich ein Widerspruch aus (3) und (4), da wir k beliebig gross nehmen können. Für eine endliche Zahl λ soll damit $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}_{\lambda+1} = \mathfrak{a}$ sein, womit der Satz bewiesen ist.

Satz 2. *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ nicht nilpotent, so existiert in $\mathfrak{a}$ ein von Null verschiedenes idempotentes Element.*

Nach dem Vielfachenkettensatz und unserer Voraussetzung wird

$$\mathfrak{a}^m = \mathfrak{a}^{m+1} \neq (0)$$

für eine endliche ganze Zahl m. Aus Satz I folgt die Existenz eines nicht-nilpotenten Elementes a von $\mathfrak{a}$. Nach dem Vielfachenkettensatz folgt auch

$$(1) \qquad (a)^{k_1} = (a)^{k_1+1} \neq (0)\,, \qquad (a\mathfrak{a})^{k_2} = (a\mathfrak{a})^{2k_2} \neq (0)\,.$$

Es sei k die grössere aus k_1 und k_2, und es sei $(a\,\mathfrak{o})^k = \mathfrak{b}$.
Ist

$$a^{2k}b = 0\,,$$

wo b ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{b}$ bedeutet, so wird

$$b = a^k r \neq 0\,, \qquad a^{3k}r = 0\,,$$

wobei r ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Damit enthält der Idealquotient $\mathfrak{q}_1 = (0):(a^k)$ nicht das Element r. Aber $\mathfrak{q}_2 = (0):(a^{3k})$ enthält das Element r. Also ist $\mathfrak{q}_1 \neq \mathfrak{q}_2$. Aus (I) folgt aber $(a^k) = (a^{3k})$, und folglich soll $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ sein, also erhalten wir einen Widerspruch. Damit ist stets

$$(2) \qquad 2^{2k}b \neq 0$$

für jedes von Null verschiedene Element b aus $\mathfrak{b}$. Aus (I) folgt weiter

$$a^{2k} = a^{2k}b'\,,$$

wo b' ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{b}$ ist. Für jedes Element b aus $\mathfrak{b}$ ist damit

$$a^{2k}(b-bb') = 0\,, \qquad b-bb' \equiv 0 \;\; (\mathfrak{b})\,,$$

und nach (2) wird folglich

$$b-bb' = 0\,.$$

Da b ein beliebiges Element aus $\mathfrak{b}$ ist, so können wir auch $b = b'$ setzen. Dann erhalten wir $b' = b'^2 \neq 0$, $b' \equiv 0$ $(\mathfrak{a})$.

Satz. 3. *Ist $\mathfrak{a}$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus dem Ring $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, so existiert in $\mathfrak{a}$ das Einheitselement in bezug auf $\mathfrak{a}$.*

Da $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 \neq (0)$ ist, so existiert nach Satz 2 ein Element a_1 von der Art, dass

$$a_1 \neq 0\,, \qquad a_1 = a_1^2\,, \qquad a_1 \equiv 0 \;\; (\mathfrak{a})$$

ist. Die Gesamtheit aller Elemente x aus $\mathfrak{a}$ derart, dass $x a_1 = x$ ist, bildet ein Ideal $\mathfrak{m}_1$, das vom Nullideal verschieden ist. Da $a_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{m}_1)$ ist, so soll dabei

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1^2 \tag{1}$$

sein. Die Gesamtheit der Elemente y aus $\mathfrak{a}$ derart, dass $y a_1 = 0$ ist, bildet auch ein Ideal $\mathfrak{n}_1$ und dabei ist $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}_1] = (0)$. Für jedes Element a aus $\mathfrak{a}$ wird

$$a a_1^2 = a a_1 , \qquad a_1(a - a a_1) = 0 ,$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 . \tag{2}$$

Aus (1), (2) und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ergibt sich unmittelbar

$$\mathfrak{n}_1^2 = n_1 .$$

Ist $\mathfrak{n}_1 = (0)$, so wird $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1$ und folglich besitzt $\mathfrak{a}$ das Einheitselement a_1. Im anderen Falle erhalten wir in gleicher Weise eine Zerlegung von $\mathfrak{n}_1$ in die direkte Summe

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_2 , \qquad \mathfrak{m}_2^2 = \mathfrak{m}_2 , \qquad \mathfrak{n}_2^2 = \mathfrak{n}_2 , \tag{3}$$

wo das Ideal $\mathfrak{m}_2$ auch das Einheitselement a_2 hat. Aus (2) und (3) folgt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_2 .$$

Ist $\mathfrak{n}_2$ noch nicht das Nullideal, so können wir fortfahren und erhalten auch

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \mathfrak{n}_3 .$$

Aber das Verfahren muss im Endlichen abbrechen; sonst hätten wir eine unendliche Kette von Idealen

$$\mathfrak{a} > \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \dots\dots > \mathfrak{m}_3 + \dots\dots > \dots\dots ,$$

bei der jedes Ideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist, was aber unmöglich ist. Hiermit erhalten wir nach einer endlichen Anzahl von Schritten des Verfahrens

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots\dots + \mathfrak{m}_\lambda ,$$

wobei jedes $\mathfrak{m}_i$ das Einheitselement a_i besitzt. Setzen wir nun

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_\lambda ,$$

so wird a das Einheitselement in bezug auf $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes 3 beweisen wir jetzt als Ziel dieses Paragraphen

Satz 4. *Der Ring* $\mathfrak{R}$ *wird eine direkte Summe*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \dots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n}_1 + \dots + \mathfrak{n}_t ,$$

wo $\mathfrak{m}_i$ *direkt unzerlegbares Ideal ist, das nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht, und* $\mathfrak{n}_i$ *ein nilpotentes Ideal bedeutet, dessen Elemente eine Potenz einer Primzahl* p_i *als Ordnung besitzen.*(1) *Die Darstellung von* $\mathfrak{R}$ *als direkter Summe von Idealen, die die oben ausgesprochenen Eigenschaften besitzen, ist eindeutig bestimmt.*

Nach dem Vielfachenkettensatz wird

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{v}^n = \mathfrak{v}^{n+1} = \dots = \mathfrak{v}^{2n} = \mathfrak{m}^2 .$$

Ist $\mathfrak{R}$ nicht nilpotent, so folgt aus Satz 3, dass $\mathfrak{m}$ ein Ring mit Einheitselement ist. Aus dem Beweis von Satz 3 erhalten wir

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_\lambda .$$

Wenn $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_{i_1} + \mathfrak{m}_{i_2}$ ist, so wird auch $\mathfrak{m}_{i_1}^2 = \mathfrak{m}_{i_1}$, $\mathfrak{m}_{i_2}^2 = \mathfrak{m}_{i_2}$ und nach Satz 3 haben $\mathfrak{m}_{i_1}$ und $\mathfrak{m}_{i_2}$ Einheitselement. Nach dem Vielfachenkettensatz bricht die Zerlegung der Ideale im Endlichen ab, und wir erhalten die direkte Summe

$$\text{1)} \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n$$

von endlich vielen direkt-unzerlegbaren Idealen $\mathfrak{m}_i$, die Einheitselement besitzen. Ist m_i ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{m}_i$, so existiert in $m_i\mathfrak{v}$ ein idempotentes Element e_i'. Es sei e_i das Einheitselement von $\mathfrak{m}_i$, dann wird $(e_i - e_i')^2 = e_i - e_i'$, $e_i'(e_i - e_i') = 0$. Ist $e_i - e_i' \neq 0$, so wird $\mathfrak{m}_i$ direktzerlegbar. Das ist aber unmöglich. Damit soll $e_i = e_i'$ sein, also ist $m_i \mathfrak{v} = \mathfrak{m}_i$. Daher folgt unmittelbar, dass jedes Element aus $\mathfrak{m}_i$ Einheiten oder nilpotent ist. Aus der Existenz des Einheitselementes von $\mathfrak{m}$ ergibt sich unmittelbar

(1) Ist r ein Element aus $\mathfrak{R}$, und ist n die kleinste, von Null verschiedene positive ganze Zahl, für welche $n r = 0$ ist, so heisst n die „*Ordnung von* r". Vgl. S. Mori, Struktur des Sonoschen Ringes, dieses Journal, **3**, S. 183.

$$(2) \qquad \mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\,, \qquad \mathfrak{n}^k = (0)\,.$$

Da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist, so soll jedes Element aus $\mathfrak{n}$ auch nilpotent sein. Nach dem Beweis von Satz I ist die Gesamtheit $\mathfrak{n}_1'$ der Totalnullteiler von $\mathfrak{n}$ in bezug auf (0), die in $\mathfrak{n}$ liegen, vom Nullideal verschieden. Da nach (2) $\mathfrak{o}\,\mathfrak{n}_1' = (0)$ ist, so ist nach dem Vielfachenkettensatz $k\,n_1' = 0$ für jedes Element n_1' aus $\mathfrak{n}_1'$, wo k eine endliche von n_1' abhängige ganze Zahl ist. Wenn $\mathfrak{n}_1' \neq \mathfrak{n}$ ist, so gibt es einen echten Totalnullteiler von $\mathfrak{n}$ in bezug auf $\mathfrak{n}_1'$ und die Ordnung des Totalnullteilers in bezug auf $\mathfrak{n}_1'$ ist endlich, da im Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{n}_1'$ der Vielfachenkettensatz auch gilt. Folglich ist die Ordnung des Totalnullteilers in bezug auf (0) auch endlich. Durch Wiederholung des Verfahrens können wir nach dem Beweise von Satz I einsehen, dass die Ordnung jedes Elementes aus $\mathfrak{n}$ in bezug auf (0) immer endlich ist. Die Gesamtheit $\mathfrak{n}_i$ aller Elemente n_i aus $\mathfrak{n}$, deren Ordnung eine Potenz einer Primzahl p_i ist, bildet ein Ideal. Wenn p_i, p_j die verschiedenen Primzahlen sind, so wird

$$[\mathfrak{n}_i,\ \mathfrak{n}_j] = (0) \qquad i \neq j \ \ (i, j = 1, 2, \ldots .)\,,$$

wo $\mathfrak{n}_i$, $\mathfrak{n}_j$ die p_i bzw. p_i entsprechenden Ideale sind.
Aber nach dem Vielfachenkettensatz soll die Anzahl der Ideale

$$\mathfrak{n}_1\,, \qquad \mathfrak{n}_2\,, \qquad \mathfrak{n}_3\,, \ \ldots .$$

die den verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots .$ entsprechen, endlich sein. Es sei jetzt n ein beliebiges Element aus $\mathfrak{n}$, so ist n als eine Summe der Elemente aus $\mathfrak{n}_i$ darstellbar, und folglich wird[1]

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2 + \ldots . + \mathfrak{n}_t\,.$$

Der zweite Teil des Satzes ist ganz ersichtlich.

2. Struktur der Ringe mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz.

Wird in einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ der eingeschränkte Vielfachenkettensatz vorausgesetzt, und ist $\mathfrak{p}$ ein vom Nullideal verschiedenes Primideal aus $\mathfrak{R}$, so gilt im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}$ der Vielfachenkettensatz und in $\mathfrak{R}'$ gibt es keinen echten Nullteiler. Nach Satz 4 soll $\mathfrak{R}'$ damit ein Körper sein. Hieraus ergibt sich

(1) Vgl. etwa S. Mori, Zusammenhang zwischen Primäridealen und Minimalidealen. dieses Journal **1**, S. 96.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz. Dann ist jedes vom Nullideal verschiedene Primideal stets ein maximales Ideal.*

Für die Struktur vom Ring $\mathfrak{R}$ mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz gilt

Satz 6. *Ist das Nullideal aus $\mathfrak{R}$ kein Primideal, so wird*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n} ,$$

wo $\mathfrak{m}_i$ die direkt-unzerlegbaren Ideale sind, die nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen bestehen, und $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal ist.(1) *Ist das Nullideal prim und gibt es in $\mathfrak{R}$ kein vom Nullideal verschiedenes Primideal, so ist jedes vom Nullideal verschiedene Ideal ein Teiler einer Potenz von $\mathfrak{R}$.*

Zum Nachweis des ersten Teiles der Behauptung gebe es in $\mathfrak{R}$ zunächst kein echtes nilpotentes Element. Ist r ein echter Nullteiler, so ist $\mathfrak{q} = (0):(r)$ vom Nullideal verschieden, und es ist $r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q})$. Sonst würde r nilpotent. Da $(r\mathfrak{o}, \mathfrak{q})$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$ und nicht nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}$ ist, so gibt es nach Satz 2 ein Element $e' = rr'$ von der Art, dass

$$e'^2 \equiv e' \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{q})$$

ist. Aus $[(r), \mathfrak{q}] = (0)$ folgt damit

$$e'^2 = e' \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{q}) , \qquad e'\mathfrak{q} = (0) .$$

Hiermit wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m} , \qquad \mathfrak{m}_1^2 = \mathfrak{m}_1 \neq (0) , \qquad \mathfrak{m} \neq (0) .$$

Nach Satz 4 sind $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}$ in direkter Summe von endlich vielen direktunzerlegbaren Idealen zerlegbar, die nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen bestehen. Da es aber kein nilpotentes Element gibt, so wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n ,$$

wo jedes Ideal $\mathfrak{m}_i$ ein Körper ist.

---

(1) Ist $\mathfrak{R}$ nilpotent, so soll die Ordnung jedes Elementes nicht notwendig endlich sein. Die Darstellung von $\mathfrak{R}$ als direkter Summe von Idealen, die die im Satz ausgesprochenen Eigetischaften besitzen, ist auch eindeutig bestimmt.

Es sei nun r ein Element derart, dass $r \neq 0$, $r^2 = 0$ ist. Dann gilt im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid (r)$ der Vielfachenkettensatz. Wenn es kein Primideal in $\mathfrak{R}'$ gibt, so wird

$$\mathfrak{R}^n \equiv 0 \ \ ((r)) ,$$

und folglich ist

$$\mathfrak{R}^{2n} = (0) .$$

Im anderen Fall existiert ein solches Element e', dass

$$e'^2 \equiv e' \not\equiv 0 \ \ ((r))$$

ist. Daher folgt unmittelbar

$$(e'^2 - e')^2 = 0 , \qquad e'^2 = e'^2 r' , \qquad e'^2 = e'^2 r'^k ,$$

wo $r' = 2e' - e'^2$ ist. Damit können wir

$$e'^2 = e'^4 r''$$

setzen, dabei ist r'' ein Element aus $\mathfrak{R}$. Setzen wir nun $e_1 = e'^2 r''$, so wird

$$e_1 = e_1^2 \neq 0 .$$

Damit wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m} , \qquad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1^2 \neq (0) .$$

Es sei $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, dann ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}^2$ und e_1 ist das Einheitselement von $\mathfrak{R}$. Ist r_1 kein nilpotentes Element aus $\mathfrak{R}$, so wird

$$r_1 \mathfrak{o} = \mathfrak{o} .$$

Denn nach Satz 2 wird

$$(r_1 r_1')^2 \equiv r_1 r_1' \not\equiv 0 \ \ ((r)) ,$$

wo r_1' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. In gleicher Weise wie bei obigem Beweis können wir ein Element e_1' finden, so dass

$$e_1' = e_1'^2 \neq 0 , \qquad e_1' = r_1 r_1''$$

ist. Wäre $e_1 - e_1' \neq 0$, so folgte aus $(e_1-e_1')^2 = e_1 - e_1', e_1'(e_1-e_1') = 0$, dass $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar ist. Hiermit soll $e_1 = e_1'$ sein; also muss $r_1\mathfrak{o} = \mathfrak{o}$ sein. Damit ist jedes Element aus $\mathfrak{R}$ Einheit oder nilpotent. Ist $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar, so wird nach Satz 4

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n}\,,$$

wo $\mathfrak{m}_i$ die Ideale sind, die aus Einheiten und nilpotenten Elementen bestehen, und $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal ist. Zusammenfassend ergibt sich der erste Teil dieses Satzes.

Zum Beweis des zweiten Teiles sei $\mathfrak{a}$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal. Da es nach unserer Voraussetzung kein Primideal im Restklassenring $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ gibt, so soll $\mathfrak{R}$ nach Satz 4 nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$ sein. Hiermit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Satz. 7. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz und es sei $\mathfrak{a}$ ein vom Nullideal verschiedenes Ideal aus $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, so enthält $\mathfrak{a}$ das Einheitselement in bezug auf $\mathfrak{a}$.*

Da $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden ist, so können wir ein von Null verschiedenes Element a von $\mathfrak{a}$ finden. Ist $\mathfrak{a}'$ das $\mathfrak{a}$ entsprechende Ideal im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid (a)$, so wird $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}'^2$, da $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$ ist. Ist $\mathfrak{a} \neq (a)$, so existiert nach Satz 4 das Einheitselement e' in $\mathfrak{a}'$, und folglich wird

$$\mathfrak{a} = (e', a)\,.$$

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2 \neq (0)$ folgt, dass eines aus e', a, etwa a, nicht nilpotent ist, und ferner dass

$$e' = a_1 e' + a_2 a\,, \qquad a = a_3 e' + a_4 a$$

ist, wo a_i die Element aus $\mathfrak{a}$ bedeuten. Durch Multiplikation mit a ergibt sich

$$(1) \qquad e'(aa_1 - a) + aa_2 a = 0\,, \qquad e'aa_3 + a(aa_4 - a) = 0\,.$$

Durch Elimination von e' aus (1) erhalten wir

$$a \begin{vmatrix} aa_1 - a & aa_2 \\ aa_3 & aa_4 - a \end{vmatrix} = 0\,.$$

Daher folgt

$$(2) \qquad a^3 = a^3 a' \neq 0\,,$$

wo a' ein Element aus $\mathfrak{a}$ bedeutet, da a nicht nilpotent ist. In gleicher Weise erhalten wir auch

$$e'^3 = e'^3 a' . \tag{3}$$

Da jedes Element a'' aus $\mathfrak{a}$ in der Form

$$a'' = \alpha_1 a^3 + \alpha_2 e'^3$$

darstellbar ist, so ergibt sich aus (2) und (3)

$$a'' a' = a''$$

für jedes Element a'' aus $\mathfrak{a}$. Hiermit ist das Element a' das Einheitselement in bezug auf $\mathfrak{a}$; also ist unser Satz bewiesen.

Ist $\mathfrak{a} = (a)$, so gilt nach Satz 6 auch unser Satz.

3. Reduktion von Idealen im Ring mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz.

Satz 8. *Ist in einem kommutativen Ring der eingeschränkte Vielfachenkettensatz erfüllt, so sind in jeder kürzesten Darstellung eines Ideals durch die grössten Primärideale die primären Komponenten eindeutig bestimmt*[1].

Zunächst nehmen wir an, dass das Ideal $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden ist. Nach Satz 4 ist der Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ als direkte Summe

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_n' + \mathfrak{n}', \qquad \mathfrak{n}'^k = (0)$$

darstellbar, und diese Darstellung ist eindeutig bestimmt. Da $\mathfrak{m}_i'$ nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht, so sind

$$\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_{i-1}' + \mathfrak{m}_{i+1}' + \dots + \mathfrak{m}_n' + \mathfrak{n}'$$

die verschiedenen Primidealen zugehörigen Primärideale, und $\mathfrak{q}' = \mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_n'$ ist das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärideal, und ferner wird

$$(0) = [\mathfrak{q}_1', \dots, \mathfrak{q}_n', \mathfrak{q}']$$

eine kürzeste Darstellung von (0) in $\mathfrak{R}'$. Die Eindeutigkeit der Darstellung von (0) durch Primärkomponenten folgt offenbar aus der Ein-

(1) Ohne Hilfe der Sätze 4 und 6 können wir den Satz auch beweisen. Vgl. den Beweis von Satz 12.

deutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{R}'$ als direkter Summe. Hiermit lässt $\mathfrak{a}$ eine eindeutige Darstellung als kürzesten Durchschnitt von endlich vielen, zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen zu.

Es sei nun $\mathfrak{a}$ das Nullideal im Ring $\mathfrak{R}$. Ist $\mathfrak{a}$ prim, so ist unsere Behauptung schon einleuchtend. Im anderen Fall ist die Behauptung nach Satz 6 auch richtig.

Aus den Sätzen 4 und 6 folgt auch

Satz 9. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit eingeschränktem Vielfachenkettensatz. Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ ist als Durchschnitt von endlich vielen minimalen primären Idealen eindeutig darstellbar.*

4. Unabhängigkeit von Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz.

Dass im kommutativen Ring die Bedingungen, Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz, von einander unabhängig sind, zeigt das folgende

Beispiel. Es sei $\mathfrak{R}$ der Polynombereich von abzählbar vielen unbestimmten x_i mit ganzzahligen Koeffizienten. In $\mathfrak{R}$ gebe es aber kein ganzzahliges Element.

$$\mathfrak{a} = (x_1^2,\ x_2^2,\ \ldots\ldots,\ px_1,\ x_1 - px_2,\ x_2 - px_3,\ \ldots\ldots)$$

ist ein Ideal aus $\mathfrak{R}$, wobei p eine Primzahl bedeutet. Im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ sind

$$x_i^2 = 0\,,\ px_1 = 0\,,\ x_1 = px_2\,,\ x_2 = px_3\,,\ \ldots\ldots,\ x_i = px_{i+1}\,,\ \ldots\ldots$$

Setzen wir nun

$$\mathfrak{a}_1' = (x_1)\,,\quad \mathfrak{a}_2' = (x_1, x_2)\,,\quad \mathfrak{a}_3' = (x_1, x_2, x_3)\,,\quad \ldots\ldots$$

Dann erhalten wir eine Kette von Idealen

$$\mathfrak{a}_1' < \mathfrak{a}_2' < \mathfrak{a}_3' < \ldots\ldots\ldots,$$

bei der jedes Ideal ein echter Teiler des vorangehenden ist. Aber die Kette bricht nicht im Endlichen ab, also gilt der Teilerkettensatz nicht im Restklassenring $\mathfrak{R}'$.

Es sei

$$\mathfrak{b}_1' > \mathfrak{b}_2' > \mathfrak{b}_3' > \ldots\ldots\ldots,$$

eine beliebige Kette von Idealen aus $\mathfrak{R}'$, bei der jedes Ideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist. Wenn $\mathfrak{b}_2'$ aus endlich vielen verschiedenen Elementen besteht, so bricht die Kette offenbar im Endlichen ab. Im anderen Fall soll

$$\mathfrak{b}_2' = \mathfrak{R}'$$

sein, und daraus ergibt sich ein Widerspruch gegen die Tatsache, dass $\mathfrak{b}_1'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{b}_2'$ ist. Denn, wenn b ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{b}_2'$ ist, so wird

$$p^n b = 0\,, \qquad p^{n-1} b \neq 0$$

für eine ganze Zahl n, da im Ring die Summe von unendlich vielen Elementen nicht definiert ist. Wir können das Element b in der Form

$$b = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots. + \alpha_n x_n$$

darstellen, wo α_i eine zu p relativ prime ganze Zahl, oder Null und $\alpha_n \neq 0$ ist. Daher folgt die Existenz des Elementes x_1 in $\mathfrak{b}_2'$ und daraus folgt auch die Existenz von x_2, x_3, ..., x_n in $\mathfrak{b}_2'$. Da $\mathfrak{b}_2'$ unendlich viele Elemente besitzt, so gibt es in $\mathfrak{b}_2'$ ein solches Element b', dass

$$p^{n'} b' = 0 \qquad p^{n'-1} b' \neq 0 \qquad n' > N$$

ist, wo N eine beliebig gegebene grosse ganze Zahl bedeutet. Hiermit enthält $\mathfrak{b}_2'$ stets das Element $x_{n'}$, wenn n' jede grosse ganze Zahl ist. Also soll $\mathfrak{b}_2' = \mathfrak{R}'$ sein.

KAPITEL II.

Idealtheorie in Ringen, in denen der Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal gilt.

5. Struktur dieser Ringe.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem keine Bedingung vorausgesetzt wird. Ein „*nilpotentes Ideal*" von $\mathfrak{R}$ ist ein Ideal, das aus lauter nilpotenten Elementen besteht. Besitzt ein Ideal wenigstens ein nichtnilpotentes Element, so heisst das Ideal „*nicht-nilpotentes Ideal*". Ist ein Ideal $\mathfrak{b}$ ein Teiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ und ist eine Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{b}$ stets durch $\mathfrak{a}$ teilbar, so heisst $\mathfrak{b}$ „*nilpotent in bezug auf* $\mathfrak{a}$“, oder „*nilpotenter Teiler von* $\mathfrak{a}$“. Ist wenigstens ein Element aus $\mathfrak{b}$ nicht-nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$, so heisst $\mathfrak{b}$ „*nicht-nilpotenter Teiler von* $\mathfrak{a}$“.

In diesem Kapitel sei $\mathfrak{R}$ immer ein kommutativer Ring, in dem die folgende Annahme gilt:

Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal. Eine unendliche Kette von nicht-nilpotenten Idealen, in der jedes Ideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist, ist unmöglich.

Aus der Annahme ergibt sich nach Satz 4

Satz 10. *Jedes von* $\mathfrak{R}$ *verschiedene Primideal aus* $\mathfrak{R}$ *ist ein maximales Ideal.*

Satz 11. *Der Ring* $\mathfrak{R}$ *wird die direkte Summe*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n} ,$$

wo $\mathfrak{n}$ *ein nilpotentes Ideal ist,*[1] *und* $\mathfrak{m}_i$ *nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht und direkt unzerlegbar ist.*

Ist $\mathfrak{h}$ die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{R}$, so gibt es im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element. Nach Satz 4 wird $\mathfrak{R}'$ die direkte Summe

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \dots + \mathfrak{m}_n' ,$$

wo jedes $\mathfrak{m}_i'$ ein Körper ist. Es sei e_i' das Einheitselement von $\mathfrak{m}_i'$. Dann wird in $\mathfrak{R}$

$$(e_i' - e_i'^2)^{m_i} = 0 ,$$

da jedes Element aus $\mathfrak{h}$ nilpotent ist. Folglich wird

$$e_i'^{m_i} = e_i'^{2m_i} r_i \neq 0 . \tag{1}$$

Setzen wir damit

$$e_i'^{m_i} r_i = e_i ,$$

so wird

$$e_i^2 = e_i , \qquad e_i e_j = 0 \quad (i \neq j) .$$

---

(1) Dabei gilt in $\mathfrak{n}$ weder der Teilerkettensatz noch der Vielfachenkettensatz.

Hiermit wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \dots + \mathfrak{m}_n + \mathfrak{n} ,$$

wo $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal bedeutet. Dabei ist e_i das Einheitselement in bezug auf $\mathfrak{m}_i$. Wäre $\mathfrak{m}_1$ direkt zerlegbar, so würde $e_1 = e_{11} + e_{12}$, $e_{11} e_{12} = 0$ und folglich würde nach (1) $\mathfrak{m}_1'$ auch direkt zerlegbar. Damit ist jedes $\mathfrak{m}_i$ direkt unzerlegbar, und folglich besitzt nach Satz 10 jedes $\mathfrak{m}_i$ ein einziges Primideal, das zugleich ein maximales Ideal ist, und unsere Behauptung ist bewiesen.

6. Reduktion der Ideale in Ringen mit Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal.

Mit Hilfe von Satz 11 können wir den folgenden Satz leicht beweisen. Aber ich möchte hier einen Beweis ohne Benutzung von Sats 11 geben.

Satz 12. *Jedes Ideal aus dem Ring $\mathfrak{R}$, in dem der Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal gilt, ist als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen eindeutig darstellbar.*

Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal aus $\mathfrak{R}$. Das Ideal $\mathfrak{h}$, das aus allen und nur den Elementen besteht, von denen eine Potenz zu $\mathfrak{a}$ gehört, ist offenbar halbprim. Ist $\mathfrak{h}$ nicht prim, so existieren zwei Elemente p_1 und p_2, so dass

$$p_1 p_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \qquad p_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \qquad p_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h})$$

ist. Setzen wir $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : (p_1)$, so wird $\mathfrak{h}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Ist $\mathfrak{h}_1$ noch nicht prim, so existieren auch zwei Elemente p_1' und p_2', so dass

$$p_1' p_2' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1) , \qquad p_1' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1) , \qquad p_2' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1)$$

ist. Da $p_1 p_1' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h})$ ist, so setzen wir $\mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h} : (p_1 p_1')$. Dann ist $\mathfrak{h}_1'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}_1$ und von $\mathfrak{R}$ verschieden. Dabei ist

$$(p_1 p_1') \neq (p_1) .$$

Sonst würde $p_1 = p_1 p_1'(a + r)$, also würde durch Multiplikation mit p_2'

$$p_1 p_2' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) .$$

Damit ergäbe sich ein Widerspruch, dass $p_2' \equiv 0\ (\mathfrak{h}_1)$ ist. So fortfahrend, erhalten wir eine Kette von Idealen

$$(p_1) \supset (p_1 p_1') \supset (p_1 p_1' p_1'') \supset \ldots\ldots ,$$

wobei jedes Ideal nicht nilpotent ist. Da der Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal gilt, so hat das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Ende. Damit gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}_1$, so dass

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} : (r_1)\,, \qquad r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{h})$$

ist. Dabei soll $r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ sein, da $\mathfrak{h}$ halbprim ist. Nach Satz 10 ist $\mathfrak{p}_1$ auch ein maximales Ideal aus $\mathfrak{R}$. Die Anzahl n der Primideale mit den soeben erwähnten Eigenschaften soll auch endlich sein, da im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{h}$ jedes $r_i \mathfrak{R}'$ ein Körper ist, und da $r_i r_j \equiv 0$ $(\mathfrak{h})$ $(i \neq j)$ ist. Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ alle Primideale mit den obig ausgesprochenen Eigenschaften. Ist $\mathfrak{h}' = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n]$ mit $\mathfrak{h}$ nicht identisch, so können wir ein Primideal $\mathfrak{p}$ finden, so dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} : (r)$, $r \not\equiv 0$ $(\mathfrak{h})$, $r \equiv 0\ (\mathfrak{h}')$ ist. Damit soll eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ mit $\mathfrak{p}$ identisch sein und folglich ist $r^2 \equiv 0\ (\mathfrak{h})$, womit wir einen Widerspruch erhalten. Hiermit soll

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_n]$$

sein.

Da $\mathfrak{p}_i$ ein maximales Ideal ist, so wird

$$(\mathfrak{p}_i\,,\ h_i) = \mathfrak{R}\,,$$

wo h_i ein Element aus $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n]$ bedeutet. Aus der Tatsache, dass $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_i$ ein Körper ist, folgt damit

$$r_i'^2 - r_i' = p_i\,, \qquad r_i' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\,,$$

wo r_i' ein Element aus $\mathfrak{h}_i$ und p_i ein Element aus $\mathfrak{p}_i$ bedeutet. Daher ergibt sich

$$r_i'^2 - r_i' = h\,,$$

wo h ein Element aus $\mathfrak{h}$ ist. Da h aber nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$ ist, so wird

$$(r_i'^2 - r_i')^k \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) , \qquad \text{oder} \qquad r_i'^k \equiv r_i'^{2k} r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}) ,$$

wobei r' ein Element aus (r_i') ist. Setzen wir

$$e_i = r_i'^k r' ,$$

so folgt daher

$$e_i \equiv e_i^2 \ (\mathfrak{a}) , \qquad e_i \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_i) , \qquad \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) .$$

Da aber $e_i e_j \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) \ (i \neq j)$ ist, so muss

$$e_i e_j \equiv e_i^k e_j^k \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) \qquad (i \neq j)$$

sein. Es sei nun

$$\mathfrak{q} = (e_1 , e_2 , \ldots\ldots , e_n , \mathfrak{a}) ,$$

so ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Denn, wenn jede Potenz eines durch $\mathfrak{q}$ unteilbaren Elementes r aus $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{q}$ unteilbar wäre, so wäre $\mathfrak{q}$ durch ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar. Da $\mathfrak{h} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, so sollte $\mathfrak{p}$ nach Satz 10 identisch mit einem, etwa $\mathfrak{p}_j$, aus $\mathfrak{p}_1 , \ldots\ldots , \mathfrak{p}_n$ sein. Aus der Tatsache, dass $e_j \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j)$, $e_j \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ ist, ergäbe sich ein Widerspruch. Damit ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal.

Es sei $\mathfrak{q}_i$ die Gesamtheit aller Element q_i von der Art, dass

$$e_i q_i \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

ist. Dann ist $\mathfrak{q}_i$ durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar und zugleich ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal. Denn, wenn jede Potenz eines Elementes p_i aus $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbar wäre, so gäbe es ein von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{p}_i$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$, das ein Teiler von $\mathfrak{q}_i$ ist, da in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}_i$ der Vielfachenkettensatz gilt, falls $n \neq 1$ ist. Aus $\mathfrak{h} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ wäre $\mathfrak{p}$ identisch mit einem, etwa $\mathfrak{p}_j$ $(i \neq j)$, aus $\mathfrak{p}_1 , \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$. Aus $e_i e_j \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$ folgte aber $e_j \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j)$, womit ein Widerspruch sich ergäbe. Ist aber $n = 1$, so wird $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1$. Hiermit soll eine Potenz jedes Elementes aus $\mathfrak{p}_i$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}_i$ sein. Wäre

$$r_i p_i \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_i) ,$$

wobei r_i ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element, und p_i ein durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_i$ bedeutet, so würde für ein Element p_i' aus $\mathfrak{p}_i$

$$r_i r_i' = e_i - p_i' ,$$

da e_i das Einheitselement in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_i$ ist. Aus $p_i'^m \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ folgte

$$(e_i - p_i')(e_i^{m-1} + e_i^{m-2} p_i' + \dots + p_i'^{m-1}) = e_i^m - p_i'^m \equiv e_i^m\ (\mathfrak{q}_i)\,.$$

Daher folgte

$$p_i e_i^m \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)\,.$$

Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{q}_i$ würde

$$p_i e_i^{m+1} \equiv 0\ (\mathfrak{a})\,, \qquad \text{oder} \qquad p_i e_i \equiv 0\ (\mathfrak{a})\,.$$

Also sollte $p_i \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ sein, wobei wir einen Widerspruch hätten. Damit soll $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges Primärideal sein.

Ist $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n]$ von $\mathfrak{a}$ verschieden, so setzen wir

$$\mathfrak{a}'' = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{q}]\,.$$

Dann ist $\mathfrak{a}''$ offenbar ein Teiler von $\mathfrak{a}$. Ist a'' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{a}''$, so wird nach der Struktur von $\mathfrak{q}$

$$a'' \equiv e_1(\alpha_1 + r_1) + \dots + e_n(\alpha_n + r_n)\ (\mathfrak{a})\,,$$

wo α_j die ganzen Zahlen und r_j die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Da $a'' \equiv 0\ (\mathfrak{q}_j)$ ist, so soll

$$e_j^2(\alpha_j + r_j) \equiv 0\ (\mathfrak{a})\,, \qquad \text{oder} \qquad e_j(\alpha_j + r_j) \equiv 0\ (\mathfrak{a})$$

sein. Daher ergibt sich $a'' \equiv 0\ (\mathfrak{a})$; also erhalten wir

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{q}]\,,$$

und die Darstellung ist offenbar eine kürzeste, da $e_j \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)\ (i \neq j)$ ist.

Schliesslich müssen wir die Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von Primäridealen zeigen. Die Eindeutigkeit der isolierten Primärkomponenten ist aber trivial. Es seien damit

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{q}] = [\mathfrak{a}', \mathfrak{q}']$$

zwei kürzeste Darstellungen von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{q}' \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$, so wird für ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element q' aus $\mathfrak{q}'$

$$e(q' - eq') \equiv 0\ (\mathfrak{a})\,, \qquad q' - eq' \not\equiv 0\ (\mathfrak{q})\,, \equiv 0\ (\mathfrak{q}')\,,$$

wo $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ ist. Nach der Eigenschaft von Primäridealen $\mathfrak{q}_i$ folgt daraus $q' - eq' \equiv 0$ $(\mathfrak{a}')$. Damit erhalten wir einen Widerspruch $[\mathfrak{a}' \, \mathfrak{q}'] \neq \mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{q}'$ durch $\mathfrak{q}$ echt teilbar, so könnte $\mathfrak{q}'$ kein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal sein. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Aus Satz 11 folgt unmittelbar

Satz 13. *Jedes Ideal aus dem Ring mit dem Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal ist als kürzester Durchschnitt von endlich vielen minimalen primären Idealen eindeutig darstellbar.*

7. Ueber Reduktion der Ideale im Ring, in dem der eingeschränkte Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal gilt.

Für den zugrunde gelegten kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ werde das folgende Axiom vorausgesetzt:

Eingeschränkter Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal. Jede Kette von Idealen, die sämtlich Teiler eines festen, nicht-nilpotenten Ideals sind, und bei der jedes Ideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab.

Satz 14. *In $\mathfrak{R}$ gilt die eindeutige Darstellbarkeit jedes Ideals als Durchschnitt von endlich vielen minimalen primären Idealen, aber es gilt nicht die eindeutige Darstellbarkeit jedes Ideals durch grösste Primärideale (im Sinne von Noether).*

Es sei $\mathfrak{a}$ ein nicht-primäres Ideal und es sei $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathfrak{h}$ nicht prim, und folglich existieren zwei Elemente r_1, r_1' derart, dass

$$r_1 r_1' \equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}), \qquad r_1 \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}), \qquad r_1' \not\equiv (\mathfrak{h})$$

ist. Ist $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : (r_1)$, so ist $\mathfrak{h}_1$ nicht nilpotent, da $\mathfrak{h}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ ist. Ist $\mathfrak{h}_1$ noch nicht prim, so existieren auch zwei Elemente r_2, r_2', so dass

$$r_2 r_2' \equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}_1), \qquad r_2 \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}_1), \qquad r_2' \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}_1)$$

ist. Daher folgt

$$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h} : (r_1 r_2), \quad \mathfrak{h}_2 \supset \mathfrak{h}_1, \quad r_1 r_2 \not\equiv 0 \;\; (\mathfrak{h}_1), \quad (r_1, \mathfrak{h}_1) \supset (r_1 r_2, \mathfrak{h}_1).$$

Denn, wäre $(r_1, \mathfrak{h}_1) = (r_1 r_2, \mathfrak{h}_1)$, so würde $(r_1 r_2')^2 \equiv 0\ (\mathfrak{h})$, also würde $r_1 r_2' \equiv 0\ (\mathfrak{h})$, womit wir einen Widerspruch $r_2' \equiv 0\ (\mathfrak{h}_1)$ hätten. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine Kette von Idealen

$$(r_1, \mathfrak{h}_1) > (r_1 r_2, \mathfrak{h}_1) > \ldots\ldots > \mathfrak{h}_1,$$

wo $\mathfrak{h}_1$ nicht nilpotent ist. Nach unserer Voraussetzung bricht die Kette im Endlichen ab, und wir erhalten ein Primideal derart, dass

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} : (p_1), \qquad p_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$$

ist. Hiermit können wir genau wie bei Satz 12 beweisen, dass

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n]$$

ist. Da jedes $\mathfrak{p}_i$ nicht nilpotent ist, so ist $\mathfrak{p}_i$ auch ein maximales Ideal und folglich wird

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{h} = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_n',$$

wobei jedes $\mathfrak{m}_i'$ ein Körper ist. Da $\mathfrak{h}$ das Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ ist, so wird auch

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1'' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_n'' + \mathfrak{n}'',$$

wobei jedes $\mathfrak{m}_i''$ nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht, und $\mathfrak{n}''$ ein nilpotentes Ideal ist. Aus dieser Struktur des Ringes können wir leicht einsehen, dass $(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_1'' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_{i-1}'' + \mathfrak{m}_{i+1}'' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_n'')$ minimales primäres Ideal von $\mathfrak{a}$ ist. Hiermit ist die erste Behauptung bewiesen.

Um den zweiten Teil des Satzes zu beweisen, genügt es, einen Ring zu zeigen, in dem die eindeutige Zerlegung jedes Ideals (im Sinne von Noether) nicht gilt. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Polynomring von einer Unbestimmten x mit ganz rationalen Koeffizienten. Dabei sei aber $x^2 = 0$, $3x = 0$. Dann gilt in $\mathfrak{R}$ der eingeschränkte Vielfachenkettensatz ohne nilpotentes Ideal. Aus $x(x-3) = 0$ folgt aber

$$(0) = [(x), (3)] = [(x), (x-3)],$$

wo (3) und $(x-3)$ die zum Primideal $(3, x)$ gehörigen Primärideale und von einander verschieden sind. Also erhalten wir zwei verschiedene Darstellungen durch grösste Primärideale. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

KAPITEL III.

Idealtheorie in Ringen, in denen der Teilerkettensatz von Primidealen gilt.

8. Bedingung für die Endlichkeit von höchsten Primidealen jedes Ideals.

In diesem Kapitel legen wir nur den kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ zugrunde, der die folgende Bedingung erfüllt:

Teilerkettensatz von Primidealen. Jede Kette von Primidealen, bei der jedes Primideal ein echter Teiler des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab.

Ist $\mathfrak{b}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{b}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$, oder nicht. Nach dieser Tatsache werden wir den folgenden speziellen Teilerkettensatz definieren:

Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen. Es gibt keine unendliche Kette von Idealen, bei der jedes Ideal ein nicht-nilpotenter Teiler in bezug auf das vorangehende ist.

Satz 15. *Ist jedes Halbprimideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar, so gilt in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen.*

Es sei

$$(1) \qquad \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \mathfrak{a}_3 < \ldots\ldots\ldots$$

eine unendliche Reihe von Idealen, bei der jedes Ideal nicht-nilpotent in bezug auf das vorangehende ist. Dann sind die zugehörigen Halbprimideale $\mathfrak{h}_i$ von $\mathfrak{a}_i$ voneinander verschieden, und daraus erhalten wir eine Kette von Halbprimidealen

$$\mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \mathfrak{h}_3 < \ldots\ldots\ldots$$

Es seien $\mathfrak{p}_1^{(i)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{n_i}^{(i)}$ die sämtlichen höchsten Primideale von $\mathfrak{h}_i$. Dann ist nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{h}_i = [\mathfrak{p}_1^{(i)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{n_i}^{(i)}]$. Wir streichen die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}_1$ aus, die zu jedem aus $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \ldots\ldots\ldots$ gehören, und es seien $\mathfrak{p}_1^{(1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{m_1}^{(1)}$ die übrig gebliebenen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}_1$. Dann können wir ein Halbprimideal $\mathfrak{h}_{k_1}$ finden, so dass jedes zugehörige Primideal von $\mathfrak{h}_{k_1}$ von jedem aus $\mathfrak{p}_1^{(1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m^{(1)}$ verschieden ist. Wir streichen wieder die Primideale aus, die Teiler von jedem aus $\mathfrak{h}_{k_1+1}, \mathfrak{h}_{k_1+2}, \ldots\ldots$ sind, und es seien $\mathfrak{p}_1^{(k_1)}, \mathfrak{p}_2^{(k_1)}, \ldots\ldots, {}^{(k_1)}_{m_{k_1}}$ die übrig gebliebenen zugehörigen Primideale von $\mathfrak{h}_{k_1}$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir die verschiedenen Primideale

$$\mathfrak{p}_1^{(1)},\ \mathfrak{p}_2^{(1)},\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_{m_1}^{(1)};\ \mathfrak{p}_1^{(k_1)},\ \mathfrak{p}_2^{(k_1)},\ \ldots\ldots,\ \mathfrak{p}_{m_{k_1}}^{(k_1)};\ \ldots\ldots$$

Dabei soll jedes $\mathfrak{p}_i^{(k_s)}$ ein Teiler eines aus $\mathfrak{p}_i^{(k_{s-1})}$ sein. Wir betrachten nun die Ketten von Primidealen

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} \mathfrak{p}_1^{(1)} & \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{p}_1^{(k_1)} & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p}_1^{(k_2)} \\ \vdots \end{array} \right. \quad \{\ldots\ldots \\ \mathfrak{p}_2^{(k_1)} & \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p}_{t_1+1}^{(k_2)} \\ \vdots \end{array} \right. \quad \{\ldots\ldots \\ \vdots & \end{array} \right. \\ \mathfrak{p}_2^{(1)} & \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{p}_{s_1+1}^{(k_1)} & \{\ \vdots \end{array} \right. \\ \vdots & \end{array}$$

Dabei sind $\mathfrak{p}_{s_{i-1}+1}^{(k_1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{s_i}^{(k_1)}$ die Teiler von $\mathfrak{p}_i^{(1)}$, $\mathfrak{p}_{t_{i-1}+1}^{(k_2)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{t_i}^{(k_2)}$ die Teiler von $\mathfrak{p}_i^{(k_1)}$, und so weiter. Da die Kette (1) unendlich ist, so soll wenigstens eine Kette von (2) unendlich sein. Hiermit erhalten wir eine unendliche Teilerkette von verschiedenen Primidealen gegen die Voraussetzung des Teilerkettensatzes von Primidealen; also ist unser Satz bewiesen.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch

Satz 16. *Wird in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen vorausgesetzt, so gilt in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von Primidealen, und jedes Halbprimideal ist als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar.*

Der erste Teil dieses Satzes ist einleuchtend.

Es sei $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal, das kein Primideal ist. Dann existieren zwei Elemente r_1, r_2 von der Art, dass

$$r_1 r_2 \equiv 0\ (\mathfrak{h}), \qquad r_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{h}), \qquad r_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{h})$$

ist. Es sei $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : (r_2)$. Ist $\mathfrak{h}_1$ noch nicht prim, so gibt es auch zwei Elemente r_1', r_2' derart, dass

$$r_1' r_2' \equiv 0\ (\mathfrak{h}_1), \qquad r_1' \not\equiv 0\ (\mathfrak{h}_1), \qquad r_2' \not\equiv 0\ (\mathfrak{h}_1)$$

ist. Damit wird

$$\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h} : (r_2 r_2'), \qquad r_2 r_2' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}),$$

und $\mathfrak{h}_2$ ist ein nicht-nilpotenter Teiler von $\mathfrak{h}_1$, da $r_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_2)$, $r_1'^k \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1)$ ist. Wäre $r_1'^k \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1)$, so würde $(r_1' r_2)^k \equiv 0 \ (\mathfrak{h})$, oder $r_1' r_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h})$, da $\mathfrak{h}$ Halbprimideal ist. Daher folgte $r_1' \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_1)$. Indem wir so fortfahren, erhalten wir eine Kette von Idealen

$$\mathfrak{h} < \mathfrak{h}_1 < \mathfrak{h}_2 < \ldots\ldots\ldots,$$

dabei ist jedes Ideal ein nicht-nilpotenter Teiler des vorangehenden. Nach unserer Voraussetzung bricht die Kette im Endlichen ab, also gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}_1$ derart, dass $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} : (r')$, $r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h})$ ist.

Da r' durch $\mathfrak{h}$ unteilbar ist, so ist r' nicht nilpotent in bezug auf $\mathfrak{h}$, und folglich ist

$$\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{h}, r')$$

ein nicht-nilpotenter Teiler von $\mathfrak{h}$. Ist $\mathfrak{h}'$ das zu $\mathfrak{b}_1$ gehörige Halbprimideal, so wird

$$[\mathfrak{h}', \mathfrak{p}_1] = \mathfrak{h}.$$

Denn eine Potenz des gemeinsamen Elementes g von $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{p}_1$ ist durch $\mathfrak{b}_1$ teilbar, und folglich ist die Potenz von g durch $\mathfrak{h}$ teilbar, also muss g durch $\mathfrak{h}$ teilbar sein. Nach dem obigen Beweis hat $\mathfrak{h}'$ auch ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_2$ und ferner wird

$$[\mathfrak{h}'', \mathfrak{p}_2] = \mathfrak{h}'.$$

Dabei ist $\mathfrak{h}''$ ein Halbprimideal und zugleich ein nicht-nilpotenter Teiler von $\mathfrak{h}'$. So fortfahrend und bedenkend, dass die Kette von nicht-nilpotenten Teilern im Endlichen abbricht, gelangt man nach einer endlichen Reihe dieses Verfahrens zu der Beziehung

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n],$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ verschiedene Primideale bedeuten. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 17. *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primärkomponenten darstellbar, so bildet die Gesamtheit aller Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ endlich viele Primideale.*

Nach Voraussetzung sei

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$$

eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch Primärkomponenten. Es seien auch $\mathfrak{p}_{n1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{n_i}$ die zugehörigen niedersten Primideale von $\mathfrak{a}$. Ist p ein beliebiges Element eines aus $\mathfrak{p}_{n1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{n_i}$, das durch $\mathfrak{a}$ unteilbar ist, so können wir zwei verschiedene Fälle betrachten. Zum ersten sei p durch $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_l$ teilbar, aber nicht durch $\mathfrak{q}_{l+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$. In diesem Fall ist p offenbar ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a} = \big[[\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_l], [\mathfrak{q}_{l+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]\big]$, $[\mathfrak{q}_{l+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n] \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist. Zum zweiten sei p durch keines aus $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$ teilbar. Dann gibt es eine solche ganze Zahl $\lambda (\geqq 2)$, dass $p^{\lambda-1}$ durch keines aus $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$ teilbar ist, p^{λ} aber durch wenigstens eines aus $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$ teilbar ist. Nach dem ersten Fall folgt unmittelbar die Existenz des Elementes r derart, dass

$$p^{\lambda} r \equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad r \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$$

ist. Folglich können wir auch eine ganze Zahl $\mu (\geqq 1)$ finden, so dass

$$p^{\mu} r \equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad p^{\mu-1} r \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$$

ist. Damit ist p auch ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$.

Ist ein Element r durch keines der zugehörigen Primideale teilbar, so soll r kein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ sein. Denn, wäre

$$rr' \equiv 0\ (\mathfrak{a}), \qquad r' \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

so würde nach der Eigenschaft der Primärideale

$$r' \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

und wir erhalten einen Widerspruch, dass $r' \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ ist.

9. Bedingungen für eindeutige Reduktion jedes Ideals durch endlich viele Primärideale.

Satz 18. *Ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ als kürzester Durchschnitt von endlich vielen Primärkomponenten eindeutig darstellbar, so ist das zugehörige Primideal von $\mathfrak{a}$, das kein höchstes ist, mit dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ identisch, und für das zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ gilt*

$$(\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = (\mathfrak{q}^2, \mathfrak{a}) = \ldots\ldots, \qquad \mathfrak{R} \,|\, \mathfrak{a} = \mathfrak{q}' + \mathfrak{n}',$$

wo jedes Element aus $\mathfrak{n}'$ *nilpotent ist, und das* $\mathfrak{q}$ *entsprechende Ideal* $\mathfrak{q}'$ *das Einheitselement besitzt.*

Ist $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal, so soll jedes $\mathfrak{q}_i$ in der kürzesten Darstellung $\mathfrak{h} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$ ein Primideal sein. Folglich gilt nach Satz 15 der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen im Ring $\mathfrak{R}$.

Es sei

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$$

die kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale, und es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ die zugehörigen Primideale und $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_s$ die höchsten Primideale und $\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ die nicht-höchsten Primideale. Dann folgt die Existenz eines Elementes r_1 von der Art, dass

$$r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots\ldots, s), \qquad r_1 \equiv 0 \ \ ([\mathfrak{q}_{s+1}\mathfrak{q}_{s+2}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n])$$

ist. Denn wir können ein Element p_i finden, so dass

$$p_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i)\,, \ \ p_i \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1)\,, \ \ldots\ldots, \ (\mathfrak{p}_{i-1})\,, \ (\mathfrak{p}_{i+1})\,, \ \ldots\ldots, \ (\mathfrak{p}_s)\,, \ (\mathfrak{p}_{s+1})$$
$$(i = 1, \ 2, \ \ldots\ldots, \ s).$$

ist. Setzen wir $r_{s+1} = p_1 + \ldots\ldots + p_s$, dann wird

$$r_{s+1} \equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}_{s+1})\,, \qquad r_{s+1} \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}_i) \ \ \ (i = 1, \ 2, \ \ldots\ldots, \ s)\,.$$

Setzen wir wieder $r_1 = r_{s+1}^{\alpha s+1} \ldots\ldots r_n^{\alpha n}$, so besitzt r_1 die oben angegebene Eigenschaft. Es wird offenbar

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ \ldots\ldots, \ \mathfrak{q}_s, \ (r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})]$$

eine kürzeste Darstellung, da $r_1 \not\equiv 0 \ \ (\mathfrak{p}_i) \ (i = 1, \ldots\ldots, s)$ ist, und $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, s)$ zu dem höchsten Primideal von $\mathfrak{a}$ gehört. Nach der eindeutigen Zerlegbarkeit von $\mathfrak{a}$ bestehen alle $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$ in der Darstellung von $(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ durch grösste Primärideale. Es sei damit

$$(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = [\mathfrak{q}_1', \ \ldots\ldots, \ \mathfrak{q}_\alpha', \ \mathfrak{q}_{s+1}, \ \ldots\ldots, \ \mathfrak{q}_n]\,.$$

Wenn keines aus $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n$ ein isoliertes Primärideal von $(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist, so können wir auch ein Element r_2 finden, so dass

$$(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) = [\mathfrak{q}_1' \ldots \mathfrak{q}_t', (r_1\mathfrak{o}, r_2\mathfrak{o}, \mathfrak{a})], \; r_2 \not\equiv 0\, (\mathfrak{p}_i')\; (i = 1, 2, \ldots, t),$$
$$r_2 \equiv 0\; ([\mathfrak{q}_{t+1}', \ldots, \mathfrak{q}_\alpha', \mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n])$$

ist. Weiter ist $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s, (r_1\mathfrak{o}, r_2\mathfrak{o}, \mathfrak{a})]$ auch eine kürzeste Darstellung. $(r_2\mathfrak{o}, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist aber nicht nilpotent in bezug auf $(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$. Ist keines aus $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n$ die isolierte Primärkomponente von $(r_2\mathfrak{o}, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$, so wiederholen wir das Verfahren. Nach Satz 15 bricht das Verfahren im Endlichen ab, und schliesslich erhalten wir, dass

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s (r_\lambda\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})]$$

eine kürzeste Darstellung ist, und eines, etwa $\mathfrak{q}_{s+1}$, aus $\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n$ eine isolierte Primärkomponente von $(r_\lambda\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist. Dabei ist offenbar

$$(r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) < (r_2\mathfrak{o}, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) < \ldots\ldots$$

eine Teilerkette von nicht-nilpotenten Idealen. Ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_{\lambda-1}$ von $(r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ soll durch $\mathfrak{p}_{s+1}$ teilbar sein, da $\mathfrak{p}_{s+1}$ ein zugehöriges nicht-höchstes Primideal von $(r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist. Es sei nun $\mathfrak{p}_{s+1}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden, dann soll

$$(r_\lambda\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \neq (r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$$

sein; sonst würde

$$r_\lambda r' \equiv r_1 p_{\lambda 1} + \ldots + r_\lambda p_{\lambda\lambda} \; (\mathfrak{a}),$$

wo r' ein durch $\mathfrak{p}_{s+1}$ unteilbares Element, und $r_1 p_{\lambda 1} + \ldots + r_{\lambda-1} p_{\lambda\lambda-1}$ ein Element aus $\mathfrak{p}_{\lambda-1}$, und $p_{\lambda\lambda}$ ein Element aus $\mathfrak{p}_{s+1}$ bedeutet. Da $r_\lambda \not\equiv 0$ $(\mathfrak{p}_{\lambda-1})$ ist, so ergäbe sich ein Widerspruch, dass $r' - p_{\lambda\lambda} \equiv 0\; (\mathfrak{p}_{\lambda-1})$, $r' \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_{s+1})$ ist, da $\mathfrak{p}_{\lambda-1} \equiv 0\; (\mathfrak{p}_{s+1})$ ist. Da $(r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a}) \not\equiv 0\; (\mathfrak{p}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, $\equiv 0\; \big([\mathfrak{q}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n]\big)$ sind, so ist die Darstellung

$$(1) \qquad \mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s, (r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})]$$

auch eine kürzeste. Jedes höchste Primideal von $(r_\lambda\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ ist zugleich das höchste Primideal von $(r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, \mathfrak{o} r_1, \mathfrak{a})$, da $r_\lambda \equiv 0\; (\mathfrak{p}_{s+1})$ ist. Gibt es in der kürzesten Darstellung von $(r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$ das Primärideal $\mathfrak{q}_{s+1}$, so wird

$$r_1 a_1 + \ldots + r_\lambda a_\lambda \not\equiv 0\; ((r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o} \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})),$$
$$r''(r_1 a_1 + \ldots + r_\lambda a_\lambda) \equiv 0\; ((r_\lambda\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, r_1\mathfrak{o}, \mathfrak{a})),$$

wo $r'' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{s+1})$ ist. Denn $\mathfrak{q}_{s+1}$ ist eine isolierte Primärkomponente von $(r_\lambda \mathfrak{o}, \ldots, r_1 \mathfrak{o}, \mathfrak{a})$. Also wird $r'' r_\lambda a_\lambda - r_\lambda p_{s+1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{\lambda-1})$. Aber aus $r_\lambda \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{\lambda-1})$ folgt $r'' a_\lambda - p_{s+1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{\lambda-1})$. Da $\mathfrak{p}_{\lambda-1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{s+1})$ ist, so ergibt sich daraus $r'' a_\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{s+1})$. Hiermit erhalten wir $a_\lambda \equiv 0\ (\mathfrak{p}_{s+1})$, und daher folgt

$$r_1 a_1 + \ldots + r_\lambda a_\lambda \equiv 0\ ((r_\lambda \mathfrak{p}_{s+1}, r_{\lambda-1}\mathfrak{o}, \ldots, r_1 \mathfrak{o}, \mathfrak{a})).$$

Das widerspricht unserer Voraussetzung. Folglich besteht $\mathfrak{q}_{s+1}$ nicht in der kürzesten Darstellung (1) von $\mathfrak{a}$ und damit ist ein Widerspruch bewiesen. Hiermit soll $\mathfrak{p}_{s+1}$ mit $\mathfrak{R}$ identisch sein, und der erste Teil des Satzes ist bewiesen.

Ist in der kürzesten Darstellung $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_s, \mathfrak{q}]$ $\mathfrak{q}$ das zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal, so wird $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}^2)]$ auch eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$, und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}^2)$ ist auch ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal. Aber nach der Eindeutigkeit der Darstellung von $\mathfrak{a}$ folgt unmittelbar

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}^2) = \ldots\ldots\ldots$$

Es sei $\mathfrak{q}'$ das $\mathfrak{q}$ entsprechende Primärideal im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} | \mathfrak{a}$. Dann gibt es in $\mathfrak{q}'$ ein nicht-nilpotentes Element r_1'. Es sei r_2' ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{q}'$ in bezug auf (r_1'), und r_3' ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{q}'$ in bezug auf (r_1', r_2') und so weiter. Dann wird nach Satz 15 und nach der eindeutigen Zerlegung

$$\mathfrak{q}' = (r_1', r_2' \ldots r_n') = (r_1', r_2', \ldots, r_n')^2 \neq (0).$$

Damit besitzt $\mathfrak{q}'$ das Einheitselement e'(1) und daher folgt

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{q}' + \mathfrak{n}',$$

wobei jedes Element aus $\mathfrak{n}'$ nilpotent ist, und $\mathfrak{q}'$ das Einheitselement e' besitzt.

Satz 19. *Es sei $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, und es sei jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ eindeutig zerlegbar im Sinne von Noether. Dann ist jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}_1$ ($\neq (0)$) zugleich ein maximales Ideal.*

(1) S. Mori, Ueber Ringe., dieses Journal, **1**. S. 174.

Es sei r_1 ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{p}_1$. Gibt es in $\mathfrak{p}_1$ noch ein nicht-nilpotentes Element r_2 in bezug auf (r_1), so betrachten wir das Ideal (r_1, r_2). Gibt es in $\mathfrak{p}_1$ noch ein nicht-nilpotentes Element r_3 in bezug auf (r_1, r_2), so bilden wir das Ideal (r_1, r_2, r_3). Da in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt, so kommt dieser Prozess zum Abschluss und liefert ein Ideal $\mathfrak{r}_1 = (r_1, \ldots\ldots, r_n)$ von der Art, dass alle Elemente aus $\mathfrak{p}_1$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{r}_1$ sind, und $\mathfrak{r}_1 \equiv 0$ $(\mathfrak{p}_1)$ ist. Wenn alle Elemente aus $\mathfrak{p}_1$ aber nilpotent sind, so soll $\mathfrak{r}_1 = (0)$ sein.

Zunächst nehmen wir an, dass $\mathfrak{r}_1^2$ kein Primärideal ist. Dann wird

$$\mathfrak{r}_1^2 = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}],$$

wo $\mathfrak{q}_1$ zu $\mathfrak{p}_1$, und $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört, da $\mathfrak{p}_1$ ein maximales Primideal ist. Nach Satz 18 ist

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{q}_1' + \mathfrak{q}',$$

wo $\mathfrak{q}'$ das Einheitselement e' besitzt. Dabei bedeuten $\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{q}'$ die $\mathfrak{q}_1$ bzw. $\mathfrak{q}$ entsprechenden Ideale in $\mathfrak{R}'$. Damit ist $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_1$ ein Körper, da $\mathfrak{p}_1$ ein maximales Primideal ist und da es in $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_1$ das Einheitselement e' gibt.

Es sei $\mathfrak{r}_1^2 \neq \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{r}_1^2$ primär. Besitzt $\mathfrak{p}_1$ einen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler $\mathfrak{a}$, so wird

$$p_1 \not\equiv 0 \quad ((p_1\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_1^2)),$$

wo p_1 ein durch $\mathfrak{r}_1^2$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_1$ bedeutet. Denn, wäre

$$p_1 \equiv 0 \quad ((p_1\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_1^2)),$$

so würde $rp_1 \equiv ap_1$ $(\mathfrak{r}_1^2)$, wo r ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element ist. Da $\mathfrak{r}_1^2$ primär ist, so sollte

$$r - a \equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_1), \qquad \text{oder} \qquad r \equiv 0 \quad (\mathfrak{a})$$

sein, und ein Widerspruch ergäbe sich. Also ist $(p_1\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_1^2)$ nicht primär, und folglich wird

$$(p_1\mathfrak{a}, \mathfrak{r}_1^2) = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}].$$

Daher folgt genau wie bei obigem Fall, dass $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_1$ ein Körper ist. Das widerspricht unserer Varaussetzung. Hiermit soll $\mathfrak{p}_1$ ein maximales Ideal sein.

Es sei endlich $\mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{p}_1$. Dann ist offenbar

$$(r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n) = (r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n)^2 \neq (0).$$

Daraus folgt

$$r_i = p_{i1} r_1 + \ldots\ldots + p_{in} r_n \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

wo p_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}_1$ sind. Durch Multiplikation mit r_s erhalten wir daraus

$$r_s r_i = p_{i1} r_s r_1 + \ldots\ldots + p_{in} r_s r_n \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Durch Elimination von $r_1, \ldots\ldots r_{s-1}, r_{s+1}, \ldots\ldots, r_n$ ergibt sich

$$r_s^{n+1} - r_s^{n+1} p_1 = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots\ldots, n),$$

wo p_1 auch ein Element aus $\mathfrak{p}_1$ bedeutet. Dabei ist offenbar $r_s^{n+1} \neq 0$. Aus $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1^2 = \mathfrak{p}_1$ folgt damit $p_1 = p_1^2$, und folglich ist $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar, und wir gelangen zu einem Widerspruch gegen die Annahme, dass $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar ist. Hiermit ist unsere Behauptung richtig.

Satz 20. *Es sei jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ eindeutig zerlegbar im Sinne von Noether. Ist ein vom Nullideal verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ durch ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}_1$ echt teilbar, so soll*

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$$

sein.

Wie beim Beweise des Satzes 19 sei

$$\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n)$$

ein durch $\mathfrak{p}$ teilbares Ideal von der Art, dass jedes Element aus $\mathfrak{p}$ stets nilpotent in bezug auf $\mathfrak{r}$ ist, und dass jedes $r_i (\neq 0)$ nicht nilpotent ist.

Es sei zunächst $\mathfrak{r}^{i-1} \neq \mathfrak{r}^i$ für eine ganze Zahl $i \geqq 1$. Dabei ist $\mathfrak{r}^0 = \mathfrak{p}$. Dann gibt es in $\mathfrak{p}$ ein Ideal $\mathfrak{a}_i$, das nicht primär und $\mathfrak{r}^{i-1} > \mathfrak{a}_i \geqq \mathfrak{r}^i$ ist. Denn, ist $\mathfrak{r}^i$ nicht primär, so setzen wir $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{r}^i$. Dann ist unsere Behauptung einleuchtend. Im anderen Fall sei

$$\mathfrak{a}_i = (p_1 p\ ,\ \mathfrak{r}^i)\ ,$$

wo p ein durch $\mathfrak{r}^i$ unteilbares Element aus $\mathfrak{r}^{i-1}$ und p_1 ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_1$ bedeutet. Dann ist

$$p \not\equiv 0\ \ ((p_1 p\ ,\ \mathfrak{r}^i))\ ,$$

sonst würde $rp \equiv rp_1' p\ (\mathfrak{r}^i)$, wobei r ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element ist. Folglich wäre

$$r - p_1' r \equiv 0\ \ (\mathfrak{p})\ , \qquad p_1' r \equiv 0\ \ (\mathfrak{p}_1)\ ,$$

da $\mathfrak{r}_1^2$ primär ist. Also ergäbe sich ein Widerspruch, dass $r \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ ist. Damit soll $\mathfrak{a}_i$ nicht primär, und $\mathfrak{r}^{i-1} > \mathfrak{a}_i \geqq \mathfrak{r}^i$ sein. Folglich wird nach Satz 18

$$\mathfrak{a}_i = [\,\mathfrak{q}_i\ ,\ \mathfrak{q}\,]\ ,$$

wo $\mathfrak{q}_i$ die isolierte Primärkomponente und $\mathfrak{q}$ das zu $\mathfrak{R}$ gehörige Primärideal ist. Nach Satz 18 ist weiter

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}_i = \mathfrak{q}_i' + \mathfrak{q}', \tag{1}$$

wo $\mathfrak{q}'$ das Einheitselement e' besitzt.

I. Es sei $\mathfrak{r} = (0)$. Dann wird

$$(e' - e'^2)^m = 0\ , \qquad \text{oder} \qquad e'^m = e'^{2m} a'\ ,$$

wo $a' \equiv 0\ (\mathfrak{q})$ ist. Setzen wir $e = e'^m a'$, so wird $e^2 = e$, $e \equiv 0\ (\mathfrak{q})$. Daher folgt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\ , \qquad \mathfrak{n} \neq (0)\ ,$$

wo $\mathfrak{m}$ das Einheitselement e enthält. Da jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent ist, so soll $\mathfrak{n} \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ sein. Wäre $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{n}$, so folgte nach Satz 18, dass ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal mit $\mathfrak{R}$ identisch sein solle, da $[\mathfrak{m}\ ,\ \mathfrak{p}] \neq (0)$ wäre. Daher folgt $\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$.

II. Es sei $\mathfrak{r}^{i-1} \neq \mathfrak{r}^i\ (i \geqq 3)$. Dann ist nach dem Fall 1

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}\ , \tag{2}$$

sonst folgte nach Satz 18, dass ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal mit $\mathfrak{R}$ identisch sein solle. Aus (1) und (2) folgt

$$e'\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_i)\,, \qquad e' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})\,.$$

Da $\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}_i \equiv 0 \ (\mathfrak{r}^i)$ ist, so soll

$$e'\mathfrak{r}^2 \equiv 0 \ (\mathfrak{r}^i)\,, \quad (i \geqq 3)$$

sein, und folglich wird

$$\begin{aligned} e' r_1' &= p_{11} r_1' + \ldots\ldots + p_{1n'} r_{n'}' \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ e' r_{n'}' &= p_{n'1} r_1' + \ldots\ldots + p_{n'n'} r_{n'}'\,, \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{r}^2 = (r_1', r_2', \ldots\ldots, r_{n'}')$ ist, und p_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}$ bedeuten. Durch Elimination von $r_1', \ldots\ldots, r_{i-1}', r_{i+1}' \ldots\ldots r_{n'}'$ ergibt sich

$$r_i'(e'^{n'} - p) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n')\,,$$

wo p ein Element aus $\mathfrak{p}$ ist. Wenn $e'^{n'} - p \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ wäre, so würde $e'^{n'} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Das widerspricht der Tatsache, dass $e' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist. Hiermit soll

$$(e'^{n'} - p)\mathfrak{r}^2 = (0)\,, \qquad e'^{n'} - p \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

sein. Folglich ist $\mathfrak{r}^i \ (i \geqq 3)$ nicht primär, und aus der Struktur von $\mathfrak{a}_i$ wird $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{r}^i$. Wir erhalten damit

$$(e'^{n'} - p)e'^{2n} \equiv e'^{n} \ (\mathfrak{r}^i)\,, \quad \text{oder} \quad (e'^{n'} - p)^2 e'^{2n} = (e'^{n'} - p)e'^{n}\,.$$

Wir setzen jetzt $e = e'^{n}(e'^{n} - p)$. Dann wird $e = e^2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Daher folgt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\,,$$

wo $\mathfrak{m}$ das Einheitselement e hat. Aber aus $e\,\mathfrak{r}^2 = (0)$, $e \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{n} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Wie beim ersten Fall können wir beweisen, dass $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$ ist. Also erhalten wir

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}\,.$$

Endlich sei $\mathfrak{r}^i = \mathfrak{r}^{i+1} \neq (0)$ für eine ganze Zahl. i. Dann wird

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}\,.$$

Dabei enthält $\mathfrak{m}$ das Einheitselement e und das Ideal $\mathfrak{r}^{\nu}$. Daher folgt, dass $\mathfrak{r}^{n} = \mathfrak{m} \equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist. Ist $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}$, so ist nach dem Fall 1 das Ideal $\mathfrak{n}$ direkt zerlegbar, und wir erhalten auch

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{p} + \mathfrak{n}'$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Satz 21. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als kürzester Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen, die zu verschiedenen Primidealen gehören, eindeutig darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. Der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt in $\mathfrak{R}$.

2. Ist $\mathfrak{p}(\neq (0))$ ein maximales Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ zugleich ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$, oder $\mathfrak{R} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$, wobei eines aus $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ das Einheitselement besitzt.

3. Ist $\mathfrak{p}_1(\neq (0))$ ein nicht-maximales Primideal, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{p}_1$, wo eines aus $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{p}_1$ das Einheitselement hat.

Zunächst nehmen wir an, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ die eindeutige Zerlegung durch grösste Primärideale zulässt. Nach Satz 15 gilt in $\mathfrak{R}$ offenbar der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen. Es sei $\mathfrak{p}(\neq (0))$ ein maximales Primideal. Ist $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, so wird nach Satz 19 $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal. Im anderen Fall ist aber die Anzahl der unzerlegbaren nicht-nilpotenten Ideale, aus denen $\mathfrak{R}$ als direkte Summe besteht, endlich, da in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt. Ein nicht-nilpotentes unzerlegbares Ideal $\mathfrak{R}_1$ ist durch $\mathfrak{p}$ unteilbar, und $\mathfrak{R} = (\mathfrak{R}_1, \mathfrak{p})$. Ist $[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{p}] \neq (0)$, so soll nach Satz 19 $\mathfrak{p}$ zugleich ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$ sein. Ist aber $[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{p}] = (0)$, so wird offenbar

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{p} .$$

Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{p}$ echt teilbar, und ist jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$, so wird

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{p}, (\mathfrak{a}, \mathfrak{R}_1)]$$

eine kürzeste Darstellung durch grösste Primärideale. Aus der eindeutigen Zerlegbarkeit von $\mathfrak{a}$ folgt, dass $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1^2$ ist. Da $\mathfrak{R}_1$ kein nilpotentes Element hat, so soll $\mathfrak{R}_1$ das Einheitselement besitzen. Denn jedes zu $\mathfrak{R}_1$ gehörige Primärideal soll mit $\mathfrak{R}_1$ identisch sein. Für jedes durch $\mathfrak{p}$ teilbare Ideal $\mathfrak{a}$ gebe es in $\mathfrak{p}$ immer ein nicht-nilpotentes Element in bezug auf $\mathfrak{a}$. Dann besitzt $\mathfrak{p}$ das Einheitselement, da $\mathfrak{p} = (r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n)^2$ ist, wo $(r_1) < (r_1, r_2) < \ldots\ldots$ eine Teilerkette von nicht-nilpotenten Idealen ist. Hiermit ist die zweite Bedingung notwendig.

Ist $\mathfrak{p}_1 (\neq (0))$ ein nicht-maximales Primideal, so wird nach Satz 20

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{p}_1 .$$

Wir können ganz genau wie beim vorigen Fall beweisen, dass $\mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement besitzen. Damit ist die dritte Bedingung auch notwendig.

Es werden nun die drei Bedingungen vorausgesetzt. Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, das nicht primär ist, und es sei $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$. Dann wird nach Satz 16

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n] .$$

Ferner wird der Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ die direkte Summe

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_n' + \mathfrak{n}', \tag{1}$$

wo $\mathfrak{n}'$ ein nilpotentes Ideal ist, oder

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \ldots\ldots + \mathfrak{m}_{n-1}' + \mathfrak{n}' , \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{n}'$ ein Ideal ohne Nullteiler ist, in dem jedes von (0) verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal ist. In beiden Fällen ist $\mathfrak{m}_i'$ direkt unzerlegbares Ideal mit Einheitselement, aber ohne Nullteiler, in dem jedes von (0) verschiedene Primideal ein maximales Ideal ist, oder direkt unzerlegbares Ideal mit Einheitselement, das nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht.

Denn, wenn $\mathfrak{p}_1$ ein nicht-maximales Primideal ist, so wird nach der dritten Bedingung

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{p}_1' ,$$

wo $\mathfrak{m}_1'$ oder $\mathfrak{p}_1'$ das Einheitselement besitzen, und $\mathfrak{m}_1'$ ein Ideal ohne Nullteiler ist. Ist $\mathfrak{p}_2$ ein maximales Primideal, so ist $\mathfrak{p}_2$ zugleich ein maximales Ideal oder $\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_2' + \mathfrak{p}_2'$. Im ersten Fall ist

$$\mathfrak{p}_2 r \equiv 0 \ (\mathfrak{h}) , \quad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_2) , \quad r \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n]) .$$

Da $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_2$ ein Körper ist, so wird damit

$$(rr')^2 - rr' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_2)\,, \qquad rr' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_2)\,.$$

Also wird $(rr')^2 - rr' \equiv 0 \ (\mathfrak{h})$. Damit können wir ein Element e'_2 finden, so dass

$$e'^2_2 \equiv e'_2 \ (\mathfrak{a})\,, \qquad e'_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_2)\,, \qquad e'_2 \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_3, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n])$$

ist. Folglich wird auch

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}' + \mathfrak{n}'\,, \qquad \mathfrak{n}' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'_2)\,,$$

wo $\mathfrak{m}'$ das Einheitselement e'_2 hat. Dabei ist $\mathfrak{m}'$ dirket unzerlegbar, sonst würde in $\mathfrak{R}'$

$$e'_2 = e'_{21} + e'_{22}\,, \qquad e'_{21} = e'^2_{21}\,, \qquad e'_{22} = e'^2_{22}\,, \qquad e'_{22}\, e'_{21} = 0\,.$$

Da $\mathfrak{p}'_2$ prim ist, so würde etwa $e'_{21} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'_2)$. Aus $e'_2 e'_{21} \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_3 \ldots \mathfrak{p}_n])$ folgte $e'_2 e'_{21} \equiv 0 \ (\mathfrak{a})$, womit wir einen Widerspruch hätten. Ist m' ein nicht-nilpotentes Element aus $\mathfrak{m}'$, so soll $m' \not\equiv 0 \, (\mathfrak{p}'_2)$ sein, sonst würde aus $m' e'_2 = m'$ offenbar $m'^k = 0$. Damit ist $m'm'' = e'_2$, da $(e'_2 p'_2)^k = 0$ ist, wo p'_2 ein Element aus $\mathfrak{p}'_2$ ist. Also besteht $\mathfrak{m}'$ nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen. Im zweiten Fall ist

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}'_2 + \mathfrak{p}'_2\,,$$

wobei $\mathfrak{m}'_2$ oder $\mathfrak{p}'_2$ das Einheitselement hat, und $\mathfrak{m}'_2$ ein Ring ohne Nullteiler ist. Daher erhalten wir die soeben erwähnte Darstellung von $\mathfrak{R}'$. Hiermit ist jedes Ideal als Durchscenitt von isolierten Primärkomponenten und dem zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Primärideal darstellbar. Es wird nämlich $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{q}]$, oder $\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$.

Es sei jetzt

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}'_1, \mathfrak{q}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}'_{n'}]$$

eine andere kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Dann ist für jede isolierte Primärkomponente leicht zu beweisen, dass $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}'_i \, (i = 1, \ldots\ldots, n)$ ist. Ist $\mathfrak{q}'_{n'}$ nicht isolierte Primärkomponente, so ist das zu $\mathfrak{q}'_{n'}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}'_{n'}$ ein Teiler eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$. Dabei soll $\mathfrak{p}_1$ kein Einheitselement hahen, da die Darstellung von $\mathfrak{a}$ eine kürzeste ist. Nach der dritten Bedingung ist $\mathfrak{p}'_{n'} = \mathfrak{R}$, sonst würde $\mathfrak{q}'_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}'_{n'})$. Aus der Darstellung von $\mathfrak{R}'$ als direkter Summe folgt damit $\mathfrak{q}'_{n'} = \mathfrak{q}$, und der Satz ist vollständig bewiesen.

10. Bedingungen für eindeutige Reduktion jedes Ideals durch primäre Ideale.

Satz 22. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als kürzester Durchschnitt von den endlich vielen zu höchsten Primidealen gehörigen primären Idealen eindeutig darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt in $\mathfrak{R}$.*
2. *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ nicht primär, so besitzt $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ das Einheitselement.*
3. *Zwei gegenseitig relativprime Primideale sind stets teilerfremd*[1].

Zunächst nehmen wir an, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ die eindeutige Reduktion zulässt. Dann ist die erste Bedingung nach Satz 15 offenbar notwendig.

Ist

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n] \quad n \geqq 2,$$

so wird nach unserer Voraussetzung

$$\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i) = (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i^2) = \ldots\ldots \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Aus eindeutiger Reduktion von $\mathfrak{a}$ erhalten wir auch

$$\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{a}, r_{i1}, r_{i2}, \ldots\ldots, r_{im_i}),$$

wo $\mathfrak{a} < (\mathfrak{a}, r_{i1}) < (\mathfrak{a}, r_{i1}, r_{i2}) < \ldots\ldots$ eine Teilerkette von nicht-nilpotenten Idealen bedeutet. Im Restklassenring $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$ hat das $\mathfrak{q}_i$ entsprechende Ideal $\mathfrak{q}'_i$ damit das Einheitselement e'_i, und folglich wird in $\mathfrak{R}'$

$$e_i = e'_1 \ldots\ldots e'_{i-1} e'_{i+1} \ldots\ldots e'_n \neq 0, \quad e'_1 e'_2 \ldots\ldots e'_n = 0, \quad e_i e_j = 0 \ (i \neq j)$$

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}'_1 + \mathfrak{m}'_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{m}'_n + \mathfrak{n}',$$

wo $\mathfrak{m}'_i$ das Einheitselement e_i hat. Da $e_i \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}'_i)$ ist, so soll $\mathfrak{m}'_1 + \ldots\ldots + \mathfrak{m}'_{i-1} + \mathfrak{m}'_{i+1} + \ldots + \mathfrak{m}'_n + \mathfrak{n}' \equiv 0\ (\mathfrak{p}'_i)$ sein, und folglich ist jedes Element aus $\mathfrak{n}'$ nilpotent. Nach der Eindeutigkeit von $\mathfrak{q}_i$ muss $\mathfrak{n}' = (0)$ sein. Damit ist die Bedingung 2 notwendig.

---

(1) Zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heissen „*teilerfremd*", wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}$ ist. Zwei Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ heissen „*gegenseitig relativprim*", wenn $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2)$, $\mathfrak{p}_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ ist.

Da

$$e_i'(e_1+\dots\dots+e_{i-1}+e_{i+1}+\dots\dots+e_n) = e_1+\dots\dots+e_{i-1}+e_{i+1}+\dots\dots e_n\,,$$
$$e_i e_i' = 0\,.$$

ist, so soll $\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{m}_1'+\dots\dots+\mathfrak{m}_{i-1}'+\mathfrak{m}_{i+1}'+\dots\dots+\mathfrak{m}_n'$ sein. Im Ring $\mathfrak{m}_i'$ soll das Nullideal damit primär sein, und folglich ist $\mathfrak{m}_i'$ direkt unzerlegbar. Daher folgt, dass $(\mathfrak{p}_i\,,\,\mathfrak{p}_j) = \mathfrak{R}$ ist, wenn $\mathfrak{p}_i\,,\,\mathfrak{p}_j$ die verschiedenen höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ sind. Es seien $\mathfrak{p}\,,\,\mathfrak{p}'$ zwei gegenseitig relativprime Primideale, dann wird $\mathfrak{a}' = [\mathfrak{p}\,,\,\mathfrak{p}']$ eine kürzeste Darstellung durch primäre Ideale. Nach dem soeben gewonnenen Ergebnis folgt unmittelbar, dass

$$(\mathfrak{p}\,,\,\mathfrak{p}') = \mathfrak{R}$$

ist. Hiermit ist die dritte Bedingung auch notwendig.

Es werden die drei Bedingungen vorausgesetzt. Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal und ist $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal, so folgt nach Satz 16

$$\mathfrak{h} = [\,\mathfrak{p}_1,\,\mathfrak{p}_2\,,\,\dots\dots\,,\,\mathfrak{p}_n\,]\,,$$

wo $\mathfrak{p}_1\,,\,\mathfrak{p}_2\,,\,\dots\dots\,,\,\mathfrak{p}_n$ alle höchsten Primideale von $\mathfrak{a}$ bedeuten. Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal. Im anderen Fall folgt aus dem Bedingungen (2) und (3), dass $\mathfrak{R}\,|\,\mathfrak{a}$ das Einheitselement e hat, und dass

$$(\mathfrak{p}_i\,,\,\mathfrak{p}_j) = \mathfrak{R} \quad (i \neq j)$$

ist. Folglich wird

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{p}_i\,,\,e)\,, \qquad e \equiv p_j\ (\mathfrak{p}_i) \quad (i \neq j)\,,$$

wo p_j ein Element aus $\mathfrak{p}_j$ bedeutet. Daraus folgt

$$(1) \qquad e \equiv p_i'\ (\mathfrak{p}_i)\,, \qquad p_i' = p_1\dots\dots p_{i-1}p_{i+1}\dots\dots p_n \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\,.$$

Andererseits ist aber

$$e^2 \equiv e\ (\mathfrak{p}_i)\,.$$

Nach (1) ist damit

$$p_i'^2 - p_i' \equiv 0\ (\mathfrak{h})\,, \qquad \mathfrak{p}_i\,p_i' \equiv 0\ (\mathfrak{h})\,.$$

Daher folgt

$$(p_i'^2 - p_i')^m \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) , \qquad p_i'^m \equiv p_i'^{2m} r \ (\mathfrak{a}) ,$$

wo r ein Element aus $\mathfrak{R}$ ist. Setzen wir $e_i' = p_i'^m r$, so wird

$$e_i'^2 \equiv e_i' \ (\mathfrak{a}) , \qquad e_i' e_j' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}) \quad (i \neq j) ,$$

und folglich ist

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \dots + \mathfrak{m}_n' + \mathfrak{n}'.$$

Da $e_i' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i)$ ist, so soll $\mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_{i-1}' + \mathfrak{m}_{i+1}' + \dots + \mathfrak{m}_n' + \mathfrak{n}' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{a})$ sein. Damit ist jedes Element aus $\mathfrak{n}'$ nilpotent. Wäre $\mathfrak{n}' \neq (0)$, so sollte

$$e = m_1' + \dots + m_n' + n , \qquad n \neq 0$$

sein. Da $\mathfrak{n}$ nilpotent ist, so folgte daraus $e = m_1'^k + \dots + m_n'^k$ und wir hätten einen Widerspruch. Hiermit ist $\mathfrak{R}' = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \dots + \mathfrak{m}_n'$. Aus $\mathfrak{h} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n]$ folgt auch, dass jedes Element aus $[\mathfrak{m}_i', \mathfrak{p}_i \mid \mathfrak{a}]$ nilpotent ist. Damit ist das Nullideal in $\mathfrak{R}'$ als Durchschnitt

$$(0) = [\mathfrak{m}_2' + \dots \mathfrak{m}_n' , \ \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_3' + \dots + \mathfrak{m}_n' , \ \dots , \ \mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_{n-1}']$$

von primären Idealen $\mathfrak{m}_1' + \dots + \mathfrak{m}_{i-1}' + \mathfrak{m}_{i+1}' + \dots + \mathfrak{m}_n'$ eindeutig darstellbar.

11. Bedingungen für eindeutige Reduktion jedes Ideals durch endlich viele minimale primäre Ideale.

Satz 23. *Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als kürzester Durchschnitt von endlich vielen minimalen primären Idealen eindeutig darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen gelten:*

1. *Der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt in $\mathfrak{R}$.*

2. *Je zwei gegenseitig relativprime Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ aus $\mathfrak{R}$ sind teilerfremd, und $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{p}_2$ besitzen das Einheitselement.*

Zunächst beweisen wir, dass die Bedingungen notwendig sind. Nach Satz 15 ist die erste Bedingung notwendig. Sind zwei Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ gegenseitig relativprim, so setzen wir $\mathfrak{a} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2]$, und es sei

$\mathfrak{a} = [\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2]$ die Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch minimale primäre Ideale. Dann werden nach der Voraussetzung in $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a}$

$$\mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{Q}_1'^2, \qquad \mathfrak{Q}_2' = \mathfrak{Q}_2'^2,$$

wo $\mathfrak{Q}_i' = (r_{i1}, r_{i2}, \ldots . r_{in_i})$ ist, und $(r_{i1}) < (r_{i1}, r_{i2}) < \ldots . \leqq \mathfrak{p}_i'$ eine Teilerkette von nicht-nilpotenten Idealen bedeutet. Daher folgt die Existenz des Einheitselementes von $\mathfrak{Q}_i'$ und

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{Q}_1' + \mathfrak{Q}_2' + \mathfrak{m}' .$$

Aber aus $\mathfrak{Q}_1' \equiv 0\,(\mathfrak{p}_1')$, $\mathfrak{Q}_2' \equiv 0\,(\mathfrak{p}_2')$ $[\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'] = (0)$ folgt $\mathfrak{m}' = (0)$. Damit ist die zweite Bedingung auch notwendig.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Es sei ein Ideal $\mathfrak{a}$ nicht primär, dann ist das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar. Nach der Bedingung 2 wird

$$R' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{h} = \mathfrak{m}_1' + \mathfrak{m}_2' + \ldots . + \mathfrak{m}_n',$$

wobei jedes $\mathfrak{m}_i'$ das Einheitselement, aber kein nilpotentes Element hat. Denn es gibt ein Element r_i derart, dass

$$r_i^2 - r_i \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \quad r_i \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \quad r_i \equiv 0\,([\mathfrak{p}_1 \ldots . \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots . , \mathfrak{p}_n])$$

ist. Da $\mathfrak{h}$ das Halbprimideal von $\mathfrak{a}$ ist, so wird auch

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{R} \mid \mathfrak{a} = \mathfrak{m}_1'' + \mathfrak{m}_2'' + \ldots . + \mathfrak{m}_n'' + \mathfrak{n}'',$$

wobei jedes $\mathfrak{m}_i''$ das Einheitselement hat, und $\mathfrak{n}''$ nilpotent ist. Ferner ist $[\mathfrak{m}_i'', \mathfrak{p}_i'']$ nilpotent. Damit ist jedes $(\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_1'' + \ldots + \mathfrak{m}_{i-1}'' + \mathfrak{m}_{i+1}'' + \ldots . + \mathfrak{m}_n'')$ das minimale primäre Ideal von $\mathfrak{a}$. Also ist $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von endlich vielen minimalen primären Idealen eindeutig darstellbar.

KAPITEL IV.

Idealtheorie im allgemeinsten Ring.

12. Bedingungen für eindeutige Reduktion jedes Ideals.

Hilfssatz. *Es sei jedes Ideal aus dem allgemeinsten Ring $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen (im Sinne von Noether) eindeutig darstellbar. Dann ist jedes Halbprimideal $\mathfrak{h}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar.*

Nach der Voraussetzung lässt $\mathfrak{h}$ eine kürzeste Darstellung

$$\mathfrak{h} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$$

durch grösste Primärideale zu. Es sei $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal. Dann soll $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ sein, und alle $\mathfrak{p}_i$ sollen durch einander unteilbar sein. Denn, wäre $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{p}_2$ teilbar, so würde jedes Element aus $\mathfrak{q}_1$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}_2$. Aus $\mathfrak{h}_2 = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_3, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_n]$ folgte aber, dass

$$h_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{h}_2), \qquad h_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}), \qquad h_2^k \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_2)$$

ist. Also würde

$$h_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}), \qquad h_2^k \equiv 0 \ (\mathfrak{h}).$$

Das widerspräche der Eigenschaft eines Halbprimideals. Damit sind alle $\mathfrak{p}_i$ durch dinander unteilbar. Wäre $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{q}_i$, so würde

$$p_i \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \qquad p_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_i), \qquad p_i r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_i),$$

wo r ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element aus $[\mathfrak{q}_1 \ldots\ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots\ldots \mathfrak{q}_n]$ bedeutet. Daraus folgte

$$p_i r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{h}), \qquad (p_i r)^l \equiv 0 \ (\mathfrak{h}).$$

Das widerspräche der Eigenschaft vom Halbprimideal. Damit ist unsere Behauptung richtig.

Satz 24. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne jede Bedingung. Ist jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen (im Sinne von Noether) eindeutig darstellbar, so gilt in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz von Primidealen.*

Es sei

$$\mathfrak{p}_1 < \mathfrak{p}_2 < \mathfrak{p}_3 < \ldots\ldots\ldots$$

eine Teilerkette von Primidealen, und es sei $\mathfrak{p}_3$ von $\mathfrak{R}$ verschieden. Es sei p_2 ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{h}_1$ das Halbprimideal von $(\mathfrak{p}_1, p_2)$. Dann gibt es nach dem Hilfssatz ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_2'$ von $(\mathfrak{p}_1, p_2)$, das durch $\mathfrak{p}_2$ teilbar ist. Es sei p_3 ein durch $\mathfrak{p}_2'$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{h}_2$ das Halbprimideal von $(\mathfrak{p}_2', p_3)$. Dann gibt es auch ein höchstes Primideal $\mathfrak{p}_3'$ von $(\mathfrak{p}_2', p_3)$, das durch $\mathfrak{p}_3$ teilbar ist. Setzen wir

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{p}_1, p_2 \mathfrak{p}_3'),$$

so wird $p_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})$. Sonst würde

$$rp_2 \equiv 0\ (\mathfrak{a})\,, \qquad \text{oder} \qquad rp_2 \equiv p_2 p_3'\ (\mathfrak{p}_1)\,,$$

wo r ein durch p_3' unteilbares Element und p_3' ein Element aus p_3' ist. Da $\mathfrak{p}_1$ prim und $p_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$ ist, so folgte daraus $r \equiv 0\ (\mathfrak{p}_3')$, und wir hätten einen Widerspruch. Damit ist $\mathfrak{a}$ kein Primärideal. Nach unserer Voraussetzung ist damit

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n] \quad (n \geqq 2)\,;$$

dabei seien $\mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$ die zugehörigen Primideale von $\mathfrak{a}$. Es seien auch $\mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_s''$ die Primideale, die kein Teiler von $\mathfrak{p}_3'$ sind, und $\mathfrak{p}_{s+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$ die Primideale, die Teiler von $\mathfrak{p}_3'$ sind. Dann ist

$$(1) \qquad p_2 \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, s)\,,$$

da $p_2 \mathfrak{p}_3' \equiv 0\ (\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{p}_3' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i'')$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ist. Damit soll $s < n$ sein. Sind alle $\mathfrak{p}_{s+1}'', \ldots, \mathfrak{p}_n''$ echte Teiler von $\mathfrak{p}_3'$, so existiert ein Element q von der Art, dass

$$(2) \qquad q \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i) \quad (i = s+1, \ldots, n)\,, \qquad q \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_3')$$

ist. Ferner wird

$$(3) \qquad p_2 q \not\equiv 0\ (\mathfrak{a})\,.$$

Sonst würde $p_2 q \equiv p_2 p_3'\ (\mathfrak{p}_1)$, $q - p_3' \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1)$, $q \equiv 0\ (\mathfrak{p}_3')$. Aus (1) und (2) folgt $p_2 q \equiv 0\ (\mathfrak{a})$, und das widerspricht (3). Hiermit soll $\mathfrak{p}_3'$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal sein, und folglich gehört eine Primärkomponente $\mathfrak{q}_3$ von $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{p}_3'$. Da $\mathfrak{p}_2'$ auch ein höchstes Primideal von $\mathfrak{a}$ ist, so gehört $\mathfrak{q}_2$ auch zu $\mathfrak{p}_2'$. Damit ist

$$\mathfrak{a}_1 = [\mathfrak{p}_2', \mathfrak{q}_3]$$

auch eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}_1$ durch grösste Primärideale. Da $\mathfrak{p}_3'$ ein höchstes Primideal von $(\mathfrak{p}_2', p_3)$ ist, so wird

$$(4) \qquad \mathfrak{p}_3' r \equiv 0\ (\mathfrak{h}_2)\,,$$

wo r ein durch $\mathfrak{p}_3'$ unteilbares Element ist. Aus der Eigenschaft des Primärideals $\mathfrak{q}_3$ folgt

$$p_3^m \equiv 0\ (\mathfrak{q}_3)\,.$$

Es sei jetzt $\mathfrak{a}_2 = (p_3^{2m}, \mathfrak{a}_1)$, und $\mathfrak{q}_3'$ die Gesamtheit aller Elemente p_3' aus $\mathfrak{p}_3'$ derart, dass

$$p_3' r' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_2), \qquad r' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3')$$

ist. Dann ist $\mathfrak{q}_3'$ auch ein zu $\mathfrak{p}_3'$ gehöriges Primärideal.
Denn, wäre

$$p_3'' r'' \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3'), \quad p_3'' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3'), \quad p_3'' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3'), \quad r'' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3'),$$

so würde $p_3'' r''' \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_2)$, $r''' \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3')$. Also ergäbe sich ein Widerspruch, dass $p_3'' \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3')$ ist. Ist p_3''' ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}_3'$, so wird nach (4)

$$(p_3''' r)^k \equiv 0 \ ((\mathfrak{p}_2', p_3)), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3').$$

Da jedes Element aus $\mathfrak{p}_2'$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}_1$ ist, so soll $(p_3''' r)^{kl} \equiv 0$ $(\mathfrak{a}_2)$ sein, also wird $p_3'''^{kl} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3')$.
Damit ist $\mathfrak{q}_3'$ ein zu $\mathfrak{p}_3'$ gehöriges Primärideal.

Wäre $p_3{}^m \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3')$, so würde

$$p_3^m r_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_2), \qquad r_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3').$$

Daher folgte

$$p_3^m r_1 \equiv (r_2 + a)\, p_3^{2m} \ (\mathfrak{p}_2'), \quad \text{oder} \quad r_1 - (r_2 + a) p_3^m \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_2'), \ r_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_3').$$

Also ergäbe sich ein Widerspruch. Damit muss nach der Struktur von $\mathfrak{q}_3'$

$$\mathfrak{q}_3' \subset \mathfrak{q}_3$$

sein, da $\mathfrak{a}_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{q}_3)$ ist.

Da $\mathfrak{a}_1$ aber durch $\mathfrak{q}_3'$ teilbar ist, so soll

$$\mathfrak{a}_1 = [\mathfrak{q}_3', \ \mathfrak{p}_2']$$

auch eine kürzeste Darstellung durch grösste Primärideale sein. Wir erhalten damit einen Widerspruch gegen die Tatsache, dass die Darstellung jedes Ideals eindeutig ist. Also soll $\mathfrak{p}_3$ mit dem Einheitsideal identisch sein, und der Satz ist vollständig bewiesen.

Nach dem Sätzen 21 und 24 erhalten wir endlich

Satz 25. *Fs sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeinster kommutativer Ring ohne jede Bedingung. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als kürzester Durchschnitt von endlich vielen, zu verschiedenen Primidealen gehörigen Primäridealen (im Sinne von Noether) eindeutig darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Der Teilekettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt in $\mathfrak{R}$.*

2. *Ist $\mathfrak{p}\,(\neq(0))$ ein maximales Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ zugleich ein maximales Ideal von $\mathfrak{R}$, oder $\mathfrak{R}=\mathfrak{m}+\mathfrak{p}$, wobei eines aus $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ das Einheitselement hat.*

3. *Ist $\mathfrak{p}_1\,(\neq(0))$ ein nicht-maximales Primideal, so ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{p}_1$, wobei eines aus $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{p}_1$ auch das Einheitselement besitzt.*

Mit Hilfe des Beweises von Satz 21 ergibt sich aus Satz 25

Satz 26. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeinster kommutativer Ring ohne jede Bedingung. Jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann (im Sinne von Noether) eindeutig zerlegbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Der Teilerkettensatz von nicht-nilpotenten Idealen gilt in $\mathfrak{R}$.*

2. *$\mathfrak{R}$ wird die direkte Summe*

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{m}_n+\mathfrak{n}\,,$$

wo $\mathfrak{m}_i$ ein direkt unzerlegbares Ideal mit Einheitselement, aber ohne Nullteiler bedeutet, in dem jedes von (0) verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal ist, oder wo $\mathfrak{m}_i$ ein direkt unzerlegbares Ideal mit Einheitselement ist, das nur aus Einheiten und nilpotenten Elementen besteht. Dabei ist $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal, oder ein Ideal ohne Nullteiler, in dem jedes von (0) verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal ist.

Herrn Professor M. Sono bin ich für seine Anregung zu dieser Arbeit und sein dauerndes Interesse an ihrem Fortgang zu grossem Dank verpflichtet.