Ueber ganz abgeschlossene Ringe.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 15. I. 1933.)

Von den ganz abgeschlossenen Ringen, in denen der Teilerkettensatz gilt, sind bisher einige Struktureigenschaften durch E. Noether,[1] B. L. van der Waerden,[2] W. Krull[3] und Y. Akizuki[4] behandelt worden. In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften und die Struktur dieser Ringe noch ferner untersucht.

Unter *Nullteilerideal* verstehen wir ein Ideal, das aus lauter Nullteilern besteht. Enthält ein Ideal dagegen mindestens ein reguläres Element, so heisst das Ideal *regulär*.

Ein *höheres Primideal* ist ein reguläres Primideal, das keine echten Primvielfachen ausser Nullteileridealen besitzt.

Ringe, in denen die Produktzerlegbarkeit der regulären Ideale gilt.

Satz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein ganz abgeschlossener Ring, in dem der Teilerkettensatz gilt. Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes höheres Primideal aus $\mathfrak{R}$, so bildet die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale eine unendliche Hauptreihe von Primäridealen, nämlich eine unendliche Kette von Primäridealen, bei der jedes Primärideal ein echtes Vielfaches des vorangehenden ist, und kein Primärideal dazwischengeschaltet werden kann. Ferner besitzen die Primärideale verschiedene Exponenten.*[5]

---

(1) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Ann. 96.

(2) B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen 101.

B. L. van der Waerden, Zur Idealtheorie der ganz abgeschlossenen Ringe, ebenda.

(3) W. Krull, Ueber den Aufbau des Nullideals in ganz abgeschlossenen Ringen mit Teilerkettensatz, Math. Annalen 102.

(4) Y. Akizuki, Bemerkungen über den Aufbau des Nullideals, Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, 3rd. Ser. 14. S. 253.

(5) Fügt man zu den Eigenschaften von $\mathfrak{R}$ noch die Voraussetzung hinzu, dass jedes höhere Primideal maximal ist, so ist in $\mathfrak{R}$ jedes reguläre Element ein Potenzprodukt von höheren Primidealen. Ist a ein Nullteiler von $\mathfrak{R}$, so wird

Gehört das von $\mathfrak{o}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ zum höheren regulären Primärideal $\mathfrak{q}$, so wird[1]

$$\mathfrak{p}^r \equiv 0(\mathfrak{q}), \quad \mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}),$$

und folglich wird

$$\mathfrak{c}^r = \mathfrak{p}^{-r}\mathfrak{p}^r \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{-r}\mathfrak{q}).$$

Hiermit existiert ein grösstes ρ, so dass

$$\mathfrak{p}^{-\rho}\mathfrak{q} \equiv 0\,(\mathfrak{p}) \tag{1}$$

ist. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}^\rho$ erhalten wir

$$\mathfrak{c}^\rho\mathfrak{q} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{p}^{\rho+1}).$$

Nach (1) ist $\mathfrak{p}^{-\rho-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal, aber durch $\mathfrak{p}$ unteilbar. Daher folgt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{\rho+1} \equiv 0\,(\mathfrak{q}).$$

Da $\mathfrak{q}$ aber primär ist, so wird

$$\mathfrak{p}^{\rho+1} \equiv 0 \;\; (\mathfrak{q}).$$

Ist $\mathfrak{q}'$ ein minimales Primärideal von $\mathfrak{p}^{\rho+1}$, so soll damit

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$$

sein, denn $\mathfrak{c}^\rho \not\equiv \mathfrak{o}\,(\mathfrak{p})$ ist, und $\mathfrak{q}'$ ist primär. Hiermit ist jedes höhere Primärideal ein minimales Primärideal einer Potenz des Primideals,[2] und folglich existiert ein einziges Primärideal von gegebenem Exponenten.

Ist c ein durch ein höheres Primideal $\mathfrak{p}$ unteilbares Element, und ist

$$c\mathfrak{p}^r \equiv 0 \;\; (\mathfrak{p}^{r+1}),$$

so wird $\mathfrak{p}^r$ nicht regulär. Denn, setzen wir

$$\mathfrak{p}^r = (p_1, \ldots, p_s), \quad \mathfrak{p} = (p_1, \ldots, p_s, \ldots, p_m),$$

so folgt aus der obigen Voraussetzung

$$(a) = \mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{p}_n^{\lambda_n}\mathfrak{a}', \quad (\mathfrak{p}_1^{\lambda_1} \ldots \mathfrak{p}_n^{\lambda_n}, \mathfrak{a}') = \mathfrak{o},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die höheren Primideale bedeuten, und die zu $\mathfrak{a}'$ gehörigen Primideale Nullteilerideale sind. Vgl. den Beweis von Satz 2.

(1) Vgl. B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale.

(2) Ein primärer Teiler $\mathfrak{q}_r$ der Potenz $\mathfrak{p}^r$ heisst *minimales Primärideal von* $\mathfrak{p}^r$, wenn es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{q}_r$ und $\mathfrak{p}^r$ gibt. Für $\mathfrak{q}_r$ existiert immer ein solches Element c, dass

$$c\mathfrak{q} \equiv 0 \; (\mathfrak{p}^r), \; c \not\equiv 0 \; (\mathfrak{p})$$

ist. Vgl. S. Mori, Minimale Primärideale eines Ideals, Journal of Sci. of the Hiroshima University, **2**. S. 28.

Die Existenz eines minimalen Primärideals eines Ideals folgt leicht aus dem Fundamentalsatz von Noether.

$$p_i(c^s-p)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, s),$$

wobei p ein Element aus $\mathfrak{p}$ bedeutet. Das minimale Primärideal $\mathfrak{q}_r$ von $\mathfrak{p}^r$ ist damit vom minimalen Primärideale $\mathfrak{q}_{r+1}$ von $\mathfrak{p}^{r+1}$ verschieden, und ferner ist offenbar

$$\mathfrak{q}_{r+1}\equiv 0 \quad (\mathfrak{q}_r).$$

Die Gesamtheit aller Primärideale, die zu einem höheren Primideal gehören, bilden eine unendliche Kette

$$\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \ldots,$$

und alle Primärideale besitzen verschiedene Exponenten.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einheitselement,*[1] *in dem der Teilerketten satz gilt, und das Nullideal Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist. Jedes reguläre Ideal aus $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann als Produkt der Potenzen der Primideale darstellbar,*[2] *wenn $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen ist, und wenn jedes reguläre Primideal ein maximales Ideal, oder das Einheitsideal $\mathfrak{o}$ ist.*

Zunächst nehmen wir an, dass jedes reguläre Ideal aus $\mathfrak{R}$ als Produkt der Potenzen der Primideale darstellbar ist. Ist ein reguläres Primideal $\mathfrak{p}$ nicht maximal, so ist $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$, da $\mathfrak{p}$ ein reguläres Primideal ist. Hiermit ist eine Potenz $\mathfrak{a}^n$ des echten Teilers $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ kein Teiler von $\mathfrak{p}$.[3] Daher folgt, dass eine Primärkomponente von $\mathfrak{a}^n$ kein Teiler von $\mathfrak{p}$ ist und das zugehörige Primideal $\mathfrak{p}_1$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Ist $\mathfrak{p}_1$ auch kein maximales Ideal, so können wir wieder ein Primideal $\mathfrak{p}_2$ finden, so dass ein zu $\mathfrak{p}_2$ gehöriges Primärideal kein Teiler von $\mathfrak{p}_1$, und ferner $\mathfrak{p}_2$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}_1$ ist. Nach dem Teilerkettensatz können wir endlich zu einem solchen maximalen Primideal $\mathfrak{p}_n$ gelangen, dass $\mathfrak{p}_n$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}_{n-1}$ and ein zu $\mathfrak{p}_n$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}_n$ kein Teiler von $\mathfrak{p}_{n-1}$ ist. Aus der Annahme von der Existenz des Einheitselements ist hiermit jede Potenz von $\mathfrak{p}_n$ ein Primärideal, und ferner wird

$$\mathfrak{p}_{n-1}\not\equiv 0 \quad (\mathfrak{p}_n^m)$$

für eine ganze Zahl m. Daraus folgt die Existenz einer ganzen Zahl k von der Art, dass

(1) Enthält $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so ist die ganze Abgeschlossenheit nicht notwendig.

(2) Wenn jedes reguläre Ideal als Potenzprodukt der Primideale darstellbar ist, so soll die Darstellung eindeutig bestimmt sein, sonst würde das Ideal ein Nullteilerideal.

(3) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. 2, S. 6.

$$\mathfrak{p}_{n-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_n^k), \quad \mathfrak{p}_{n-1} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_n^{k+1})$$

ist. Also ergibt sich

$$\mathfrak{p}_n^k = (\mathfrak{p}_{n-1}, \ \mathfrak{p}_n^{k+1}).$$

Denn nach der Produktzerlegbarkeit gibt es zwischen $\mathfrak{p}_n$ und $\mathfrak{p}_n^2$ kein Ideal, und folglieh gibt es auch kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}_n^i$ und $\mathfrak{p}_n^{i+1}$ für jede ganze Zahl i.[1] Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{p}_n$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}_{n-1}$ und vom Einheitsideal verschieden ist.[2] Daher folgt, dass es in $\mathfrak{R}$ kein reguläres nicht-maximales Primideal gibt.

Es sei ein Primideal $\mathfrak{p}$ durch ein reguläres Primideal $\mathfrak{p}'$ echt teilbar. Dabei soll $\mathfrak{p}'$ aus der eben bewiesenen Tatsache ein maximales Ideal sein. Da es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}'^i$ und $\mathfrak{p}'^{i+1}$ gibt, so soll für jede ganze Zahl λ stets

(1) $$\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}'^{\lambda})$$

sein. Sonst würde

$$\mathfrak{p}'^k = (\mathfrak{p}, \ \mathfrak{p}'^{k+1})$$

für eine ganze Zahl k, und daher ergäbe sich ein Widerspruch. Gehört ein reguläres Primideal zu einem Ideal $\mathfrak{a}$, so ist das Primideal damit kein Teiler jedes anderen zugehörigen Primideals. Für jedes Element a wird hiermit

(2) $$(a) = \mathfrak{p}_1'^{\lambda_1} \dots \mathfrak{p}_s'^{\lambda_s} \mathfrak{a}',$$

wo $\mathfrak{p}_1', \dots, \mathfrak{p}_s'$ die regulären Primideale bedeuten, und $\mathfrak{a}'$ durch kein $\mathfrak{p}'_i$ teilbar ist, und ferner jedes zu $\mathfrak{a}'$ gehörige Primideal ein Nullteilerideal ist.

Ist $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes reguläres Primideal, so ist $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$, und in $\mathfrak{p}$ gibt es ein reguläres Element p, so dass

$$p \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^2)$$

ist. Denn, wenn p kein reguläres Element ist, so können wir nach der Voraussetzung einen Nullteiler p' finden, so dass $p+p'$ regulär und

$$p+p' \equiv 0 \ (\mathfrak{p}), \quad \not\equiv 0 (\mathfrak{p}^2)$$

ist. Hiermit wird

$$(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}, \quad \mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}),$$

und daher folgt die Existenz eines Elementes a von $\mathfrak{a}$, so dass

(3) $$\mathfrak{p} = (p) : (a), \quad a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$$

(1) S. Mori, Axiomatische Begründung des Multiplikationsringes, Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. 3, S. 44.

(2) Do. S. 45.

ist. $\frac{a}{p}$ ist damit ein wirklich gebrochenes Element, und $\mathfrak{p}\left(\frac{a}{p}\right)$ ist ein ganzes Ideal. Im Quotientenring ist also $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}:\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{p}^2$ ein Primärideal ist, so muss

$$\mathfrak{p}\,(a)\not\equiv 0\;(\mathfrak{p}^2)$$

sein, und folglich wird

$$\mathfrak{p}\,(a)\not\equiv 0\;(\mathfrak{p}(p)).$$

Für jedes reguläre Primideal $\mathfrak{p}$ ist damit

(4) $$\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{o}.$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein reguläres Ideal, und sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, und $\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die anderen verschiedenen regulären Primideale, so wird

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{n_1}\ldots\mathfrak{p}_s^{n_s},\; \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m\neq\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m.$$

Folglich gibt es ein solches Element a_i, dass

$$a_i\equiv 0\;(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m),\; a_i\not\equiv 0\;(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m)$$

ist. Setzen wir nun

$$a=a_1+a_2+\ldots+a_m,$$

so wird

$$a\equiv 0\;(\mathfrak{a}),\; a\not\equiv 0\;(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i)\; (i=1, 2, \ldots, m.).$$

Sonst würde $a_i\equiv 0\;(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m)$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i)$, und daher folgte $a_i\equiv 0$ $(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_{i-1}\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}\ldots\mathfrak{p}_m)$ entgegen der Voraussetzung. Da $\mathfrak{a}=[\mathfrak{p}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{n_s}]$, $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_i=[\mathfrak{p}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{p}_i^{n_i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{n_s}]$ ist, so wird $a\equiv 0\;(\mathfrak{p}_i^{n_i})$, $\not\equiv 0\;(\mathfrak{p}_i^{n_i+1})$. Ist a nicht regulär, so können wir damit ein Element a' finden, so dass $a'\equiv 0\;(\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_m)$ und $a+a'$ regulär ist. Daraus folgt

(5) $$(a)=\mathfrak{a}\mathfrak{p}_{m+1}^{n_{m+1}}\ldots,$$

wobei a regulär ist, und alle $\mathfrak{p}_{m+1}, \ldots$ von allen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ verschieden sind.

Es sei jetzt r ein reguläres Element aus $\mathfrak{R}$, dann wird

(6) $$(r)=\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{p}_m^{\lambda_m},$$

wobei $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ die verschiedenen regulären Primideale bedeuten. Durch Multiplikation von (2) und (6) ergibt sich

$$(a)\,\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}\ldots\mathfrak{p}_m^{\lambda_m}=(r)\mathfrak{p}'^{\lambda_1}_1\ldots\mathfrak{p}_s'^{\lambda_s}\mathfrak{a}'.$$

Nach (4) folgt damit

(7) $$(a)P=(r)P'\mathfrak{a}',\; (P, P')=\mathfrak{o},$$

wobei P und P' die Potenzprodukte der regulären Primideale bedeuten.

Nach (5) können wir ein zu P gegenseitig relativprimes Ideal $\mathfrak{q}$ finden, so dass

$$(p)=P\mathfrak{q}$$

ist, wobei p ein reguläres Element aus P, und $\mathfrak{q}$ ein Potenzprodukt der regulären Primideale ist. Daher folgt

$$(a)(p)=(r)P'\mathfrak{a}'\mathfrak{q}.$$

Folglich ergeben sich

$$ap=rt, \quad (t)=P'\mathfrak{a}'\mathfrak{q}.$$

Ist $t\not\equiv 0((p))$, so wird $P'\mathfrak{a}'\not\equiv 0(P)$, also wird $\mathfrak{a}'\not\equiv 0\ (P)$. Für jedes k ist damit

$$\mathfrak{a}'^k\not\equiv 0(P).$$

Sonst würde nach (I) $\mathfrak{a}'\equiv 0(P)$, da jedes zu $\mathfrak{a}'$ gehörige Primideal nicht regulär ist. Da aber $(P, P')=\mathfrak{o}$, $(P, \mathfrak{q})=\mathfrak{o}$ sind, so folgt daraus

$$\mathfrak{a}'^k P'^k \mathfrak{q}^{k-1}\not\equiv 0(P), \text{ oder } t^k\not\equiv 0\ ((p)).$$

Daher folgt unmittelbar,[1] dass $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen ist.

Die Bedingungen sind auch hinreichend. Da jedes reguläre Primideal maximal ist, so ist jeder Teiler einer Potenz vom regulären Primideal $\mathfrak{p}$ stets primär. Nach Satz I gibt es damit zwischen $\mathfrak{p}^n$ und $\mathfrak{p}^{n+1}$ kein Ideal, und folglich ist jedes reguläre Ideal ein Produkt der Potenzen von regulären Primidealen. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Ueber die Struktur der ganz abgeschlossenen Ringe mit echten Nullteilern.

Es sei $\mathfrak{R}$ im folgenden stets ein ganz abgeschlossener Ring, in dem der Teilerkettensatz gilt.

Satz 3. *Ist für ein von Null verschiedenes nilpotentes Element* n

$$\mathfrak{p}=(0):(n),$$

wo $\mathfrak{p}$ *ein Primideal bedeutet, so gibt es keinen regulären Teiler von* $\mathfrak{p}$ *ausser* $\mathfrak{R}$.

Aus der obigen Voraussetzung folgt,[2] dass $\mathfrak{p}$ ein zu (0) gehöriges Primideal sein soll. Es sei ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes reguläres Ideal $\mathfrak{a}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$. Dann gibt es in $\mathfrak{a}$ ein reguläres Element r, und

---

(1) Vgl. E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie, Math. Annalen **96**, S. 56.

(2) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. **1**, S. 170.

$$\frac{n}{r}=n'$$

ist ein Element aus $\mathfrak{R}$, da $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen ist. Wenn $(n)=(n')$ ist, so wird

$$n=rn'=rr'n,$$

wo r' ein solches Element ist, dass $n'=r'n$ ist. Da in $\mathfrak{R}$ aber das Einheitslement e existiert, so folgt daraus

$$n\,(e-rr')=0.$$

Aus unserer Voraussetzung ergibt sich damit

$$e-rr'\equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Also wird

$$e\equiv 0 \ (\mathfrak{a}).$$

Das widerspricht der Voraussetzung, dass $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden ist. Hiermit soll (n') ein echter Teiler von (n) sein. Da n' wieder ein nilpotentes Element ist, so wird

$$\frac{n'}{r}=n''$$

auch ein nilpotentes Element aus $\mathfrak{R}$. Ist $pn'=0$ für ein Element p aus $\mathfrak{R}$, so wird auch $pn=0$, und folglich ist $p\equiv 0\,(\mathfrak{p})$. Aus $\mathfrak{p}\,(n)=(o)$ folgt ferner $\mathfrak{p}\,(n')=(o)$, da r ein reguläres Element ist. Damit ist auch $\mathfrak{p}=(o):(n')$. Wir können hiermit in gleicher Weise wie im obigen Beweise zeigen, dass (n'') ein echter Teiler von (n') ist. In solcher Weise erhalten wir eine Kette von Idealen

$$(n)<(n')<(n'')<\ldots\ldots$$

Aber nach dem Teilerkettensatz bricht die Kette im Endlichen ab. Es wird nämlich $(n^{(m)})=(n^{(m+1)})$. Das ist aber auch unmöglich, womit ein Widerspruch bewiesen ist. Daher folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}$, und der Satz ist bewiesen.

Satz 4. *Ist mindestens eine Primärkomponente des Nullideals vom Primideal verschieden, so ist ein Nullteilerideal zugleich ein maximales Ideal.*

Ist eine Primärkomponente $\mathfrak{q}$ des Nullideals von ihrem zugehörigen Primideal $\mathfrak{p}$ verschieden, so gibt es ein Element p von der Art, dass $\mathfrak{p}=(o):(p)$ ist.

Wäre $p\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$, so würde nach $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{p}$

$$pp'\equiv 0\,(\mathfrak{q}) \quad p'\not\equiv 0\,(\mathfrak{q}), \quad p\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}).$$

Das widerspricht der Eigenschaft vom Primärideal $\mathfrak{q}$. Hiermit soll p auch durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, und folglich ist es ein nilpotentes Element.

Also gibt es ein solches nilpotentes Element p, dass $\mathfrak{p}=(0):(p)$ ist.[1] Nach Satz 3 ist damit der reguläre Teiler von $\mathfrak{p}$ nur das Einheitsideal. Ferner gibt es ein niederstes Primideal $\mathfrak{p}'$ von (0), das ein Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Aber die Gesamtheit aller Nullteiler bildet die zum Nullideal gehörigen niedersten Primideale.[2] Damit ist jeder echte Teiler von $\mathfrak{p}'$ regulär, und folglich ist das Einheitsideal ein einziger echter Teiler von $\mathfrak{p}'$. Damit ist das Nullteilerideal $\mathfrak{p}'$ zugleich maximal, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Satz 5. *Ist im Ring $\mathfrak{R}$ nur eine Primärkomponente des Nullideals Primideal, so ist jedes reguläre Ideal stets ein Teiler des Primideals.*

Es sei das Primideal $\mathfrak{p}_1$ die einzige Primärkomponente des Nullideals. Gibt es kein zu (0) gehöriges Primideal ausser $\mathfrak{p}_1$, so wird nach der Voraussetzung $\mathfrak{p}_1=(0)$, und die Behauptung ist einleuchtend. Im anderen Fall seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle zu (0) gehörigen Primideale. Dann ist jedes zugehörige Primideal ausser $\mathfrak{p}_1$ durch kein reguläres Ideal ausser $\mathfrak{o}$ teilbar. Da $\mathfrak{p}_1$ eine Primärkomponente von (0) ist, so wird

$$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^{m_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{m_n}=(0)$$

wo $m_1, \ldots, m_n$ die bestimmten ganzen Zahlen bedeuten. Ist $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes reguläres Primideal, so wird für ein zu $\mathfrak{p}'$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{p}_1\equiv 0(\mathfrak{q}'), \text{ oder } \mathfrak{p}_2^{m_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{m_n}\equiv 0 \ (\mathfrak{p}').$$

Im letzten Fall ist eines aus $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$, etwa $\mathfrak{p}_2$, durch $\mathfrak{p}'$ teilbar. Da $\mathfrak{p}_2$ aber durch kein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes reguläres Ideal teilbar ist, so ergibt sich daraus ein Widerspruch. Daher folgt, dass jedes Primär-

(1) Aus der oben bewiesenen Tatsache und Satz 3 ergibt sich leicht der Krullsche Satz.

In einem ganz abgeschlossenen Ring, in dem der Teilerkettensatz gilt, ist entweder jeder Nichtnullteiler Einheit. oder es ist mindestens eine isolierte Primärkomponente des Nullideals Primideal.

Beweis. Es seien alle isolierten Primärkomponenten von Primidealen verschieden. Dann ist in $\mathfrak{R}$ jeder von $\mathfrak{o}$ verschiedene Teiler vom zu (0) gehörigen Primideal immer Nullteilerideal. Es sei ρ ein reguläres Element, und es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle zugehörigen Primideale von (0). Dann wird

$$e=\rho\bar{\rho}_i+p_i, \quad p_i\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i) \ (i=1, 2, \ldots, n).$$

Durch Multiplikation dieser Formeln erhalten wir

$$e=\rho\bar{\rho}+p_1p_2\ldots p_n,$$

wobei $p_1p_2\ldots p_n$ nilpotent ist. Damit ist ρ Einheit.

(2) Ist ein zu (0) gehöriges Primideal $\mathfrak{p}'$ durch kein anderes zugehöriges Primideal teilbar, so heisst $\mathfrak{p}'$ *niederstes Primideal von* (0). S. Mori, Minimale Primärideale eines Ideals, Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. **2**, S. 27.

ideal, das einem regulären Primideal zugehört, stets ein Teiler von $\mathfrak{p}_1$ ist. Ist $\mathfrak{a}$ ein vom Einheitsideal verschiedenes reguläres Ideal, so sind alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale auch regulär. Da jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ damit ein Teiler von $\mathfrak{p}_1$ ist, so wird

$$\mathfrak{p}_1 \equiv 0\ (\mathfrak{a}),$$

und daraus folgt die Behauptung.

Satz 6. *Der Ring* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann zerlegbar in eine direkte Summe, wenn in* $\mathfrak{R}$ *zwei von Null verschiedene Elemente* p_1 *und* p_2 *derart existieren, dass* $p_1 p_2 = 0$ *und* $p_1 + p_2$ *ein reguläres Element ist.*

Wir nehmen zunächst an, dass $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar ist. In der Darstellung $\mathfrak{R} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ besitzt der Ring $\mathfrak{m}_i$ das Einheitselement e_i, da $\mathfrak{R}$ das Einheitselement e enthält. Dabei ist offenbar

$$e_1 + e_2 = e, \quad e_1 e_2 = 0.$$

Also ist die Bedingung notwendig.

Es sei jetzt die Bedingung vorausgesetzt. Dann wird

$$\frac{p_1}{p_1+p_2} = \frac{p_1}{p_1+p_2} \cdot \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2} = \frac{p_1^2}{(p_1+p_2)^2}.$$

Da $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen ist, so soll $\frac{p_1}{p_1+p_2}$ auch ein Element aus $\mathfrak{R}$ sein. Für ein Element r wird damit

(1) $$p_1 = r(p_1 + p_2).$$

Daher folgt

$$p_1^2 = r p_1^2, \quad p_1(p_1 - r p_1) = 0.$$

Aus $p_1 p_2 = 0$ folgt damit

$$(p_1 + p_2)(p_1 - r p_1) = 0.$$

Da $p_1 + p_2$ ein reguläres Element ist, so soll

(2) $$p_1 = r p_1$$

sein. Aus (1) und (2) folgt ferner

(3) $$r p_2 = 0.$$

Aus (2) und (3) folgt auch

$$(p_1 + p_2)(r - r^2) = 0.$$

Da $p_1 + p_2$ regulär ist, so folgt daher

(4) $$r - r^2 = 0.$$

Die Gesamtheit aller Elemente x, vorausgesetzt dass $x = rx$ ist, bildet ein Ideal $\mathfrak{m}$, und der Ring $\mathfrak{m}$ enthält das Einheitselement r. Die Gesamtheit aller Elemente y, vorausgesetzt dass $ry=0$ ist, bildet auch ein Ideal $\mathfrak{n}$. Dabei ist offenbar

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]=(0).$$

Ist a ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so wird nach (4)

$$r(a-ar)=0.$$

Daher folgt

$$a-ar\equiv 0\ (\mathfrak{n}).$$

Aber aus $ar.r=ar$ folgt unmittelbar $ar\equiv 0\ (\mathfrak{m})$. Damit ist

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{m}+\mathfrak{n},$$

wobei $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ vom Nullideal verschieden sind, und der Satz ist bewiesen.

Durch die Anwendung von Satz 6 erhalten wir

Satz 7. *Der Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann zerlegbar in eine direkte Summe, wenn das Nullideal gegenseitig relativprim reduzibel ist.*(1)

Satz 8. *Jedes höhere Primideal aus $\mathfrak{R}$ gehört zu keinem nilpotenten Ideal.*

Es sei $\mathfrak{p}$ ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes höheres Primideal, und es sei $\mathfrak{p}'$ ein Primideal, das durch $\mathfrak{p}$ echt teilbar ist. Wir nehmen an, dass ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ kein Teiler von $\mathfrak{p}'$ ist. Dabei ist offenbar $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$. Da $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{p}$ gehört, so soll für eine ganze Zahl n

$$\mathfrak{p}^n\equiv 0\ (\mathfrak{q}),\quad \mathfrak{p}^{n-1}\not\equiv 0\ (\mathfrak{q})$$

sein. Aus Satz I folgt, dass für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element c

$$c\mathfrak{q}\equiv 0\ (\mathfrak{p}^n)$$

---

(1) Akizuki hat schon in anderer Weise bewiesen, dass die Bedingung hinreichend ist. Y. Akizuki, Bemerkungen über den Aufbau des Nullideals, S. 259.

Ist ein Ring $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement, in dem der Teilerkettensatz gilt, zerlegbar in eine direkte Summe, so ist das Nullideal gegenseitig relativprim reduzibel.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}$ zerlegbar in eine direkte Summe, so gibt es die Elemente p_1 und p_2, so dass p_1+p_2 regulär, und $p_1p_2=0$ ist. Da p_1 und p_2 Nullteiler sind, so sollen sie durch die zu (0) gehörigen Primideale teilbar sein. Ferner können p_1 und p_2 nicht durch dasselbe zu (0) gehörige Primideal teilbar sein; sonst würde p_1+p_2 ein Nullteiler. Es seien $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1m}$ alle zu (0) gehörigen Primideale, die das Element p_1 enthalten, und $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots, \mathfrak{p}_{2n}$ alle zu (0) gehörigen Primideale, die das Element p_2 enthalten. Dann besitzen die beiden Systeme von zugehörigen Primidealen kein gemeinsames Primideal, und keines der zu einem System gehöriger Primideale ist durch eines der zum anderen System gehörigen teilbar. Da $p_1p_2=0$ ist, so soll jedes zugehörige Primideal von (0) zu einem dieser Systeme gehören. Es sei $\mathfrak{q}_{ik}$ die $\mathfrak{p}_{ik}$ entsprechende Primärkomponente des Nullideals. Dann sind $\mathfrak{a}_1=[\mathfrak{q}_{11}, \ldots, \mathfrak{q}_{1m}]$, $\mathfrak{a}_2=[\mathfrak{q}_{21}, \ldots, \mathfrak{q}_{2n}]$ gegenseitig relativprim, und ferner ist $(0)=[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$.

sein soll. Da $\mathfrak{p}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}'$ ist, so setzen wir

$$\mathfrak{p}=(\mathfrak{p}', p_1, \ldots, p_k). \tag{1}$$

Ist p' ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}'$, so wird nach Satz 1

$$c'\mathfrak{p}^{n-1}\equiv 0\,((p', \mathfrak{p}^n)), \tag{2}$$

dabei ist c' ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element. Aus (1) und (2) folgt

$$c'h_i \equiv a_{1i}h_1 + a_{2i}h_2 + \ldots + a_{li}h_l(\mathfrak{p}') \quad (i=1, 2, \ldots, l),$$

wo a_{ji} die Elemente aus $\mathfrak{p}$, und h_i die Produkte der Potenzen von $p_1, \ldots, p_k$ bedeuten. Da h_1 durch $\mathfrak{p}'$ unteilbar ist, so folgt daraus durch Elimination von h_i

$$c'^l \equiv 0 \ (\mathfrak{p}).$$

Das ist aber unmöglich, denn $\mathfrak{p}$ ist ein Primideal und c' durch $\mathfrak{p}$ unteilbar. Daher folgt, dass jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ stets ein Teiler von $\mathfrak{p}'$ ist.

Ist (0) ein Primärideal, aber kein Primideal, so soll jedes höhere Primideal $\mathfrak{p}$ nach Satz 3 identisch mit dem Ring $\mathfrak{R}$ sein, und der Satz ist einleuchtend. Im anderen Fall sei $\mathfrak{a}$ ein nilpotentes Ideal, und $\mathfrak{p}$ sei ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges höheres Primideal. Jedes höchste Primideal von $\mathfrak{a}$ ist zugleich auch ein höchstes Primideal von (0).[1] $\mathfrak{p}$ ist damit ein echter Teiler eines höchsten Primideals $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{p}$ aber zu $\mathfrak{a}$ gehört, so muss ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ kein Teiler von $\mathfrak{p}'$ sein. Das widerspricht der oben bewiesenen Tatsache. Somit gehört keinem nilpotenten Ideal ein höheres Primideal zu.

---

(1) Ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ heisst *höchstes Primideal von* $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{p}$ kein Teiler jedes anderen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideals ist.