Axiomatische Begründung des Multiplikationsringes.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 30. 9. 1932.)

Nach Herrn W. Krull[1] heisst ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem der Teilerkettensatz gilt, *Multiplikationsring*, wenn in $\mathfrak{R}$ aus der Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ folgt. In einer vor kurzem erschienenen Arbeit[2] hat Herr Akizuki die Definition des Multiplikationsringes etwas verallgemeinert und seine Struktureigenschaften untersucht. Dabei heisst ein kommutativer Ring mit Teilerkettensatz *Multiplikationsring im Sinne von Akizuki*, wenn im Ring aus der *echten* Teibarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ folgt. In der vorliegenden Arbeit möchte ich aus drei voneinander unabhängigen Axiomen schrittweise die Struktur von immer stärker eingeschränktem Ring bis hin zu dem Multiplikationsring untersuchen, und in die Struktur desselben tiefer eindringen. Der Multiplikationsring ist aber nur ein spezieller Fall von Ringen, die als eine direkte Summe von endlich vielen Sonoschen Ringen[3] darstellbar sind.

Besitzt der Multiplikationsring im Sinne von Akizuki keinen Nullteiler, so ist im Ring jedes Ideal eindeutig als Potenzprodukt der Primideale darstellbar. Zum Schluss wird damit die Struktur des kommutativen Ringes gezeigt, in dem jedes Ideal sich eindeutig als Produkt von Potenzen der Primideale darstellen lässt. Wie wohl bekannt ist, haben Prof. M. Sono und Frl. E. Noether dasselbe Problem nach verschiedenen Gesichtspunkten behandelt. Prof. Sono's Theorie ist auf der Voraussetzung entwickelt, dass der zugrunde gelegte Ring die folgenden Eigenschaften besitzt:

---

(1) W. Krull, Ueber Multiplikationsringe, *Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie, Math-naturw.* Klasse, 1925.

W. Krull, Ueber den Aufbau des Nullideals in ganz-abgeschlossenen Ringen mit Teilerkettensatz, *Math. Annalen* **102**, S. 368.

(2) Y. Akizuki, Bemerkungen über den Aufbau des Nullideals, *Proceedings of the Physico-Mathematical Soc. of Japan*, 3. **13**, S. 253.

(3) Der Sonosche Ring ist ein kommutativer Ring, in dem der Teilerkettensatz und der eingeschränkte Vielfachenkettensatz vorausgesetzt werden.

1. Existenz der Hauptreihe von Idealen, die mit einem von (0) verschiedenen Ideal beginnt.

2. Existenz des Einheitselementes.

Frl. Noether hat auch vorausgesetzt, dass jedes vom Null- und Einheitsideal verschiedene Primideal keinen von $\mathfrak{R}$ verschiedenen echten Teiler besitzt, und dass die Umkehrung auch gilt, und daraus die Existenz des Einheitselementes und den Teilerkettensatz abgeleitet. Welche Bedingungen notwendig und hinreichend sind, damit jedes Ideal im allgemeinen kommutativen Ring eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist? Die Antwort auf diese Frage scheint uns von grosser Schwierigkeit zu sein, und wir können hier nicht weiter auf sie eigenhen. Im folgenden wollen wir aber nur nach der Voraussetzung des Teilerkettensatzes das Problem behandeln.

Struktur der Ringe, in denen jedes Primärideal eine Potenz vom Primideal ist.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein allgemeiner kommutativer Ring, in dem die folgenden Axiome gelten:[4]

Axiom 1. *Teilerkettensatz.*

Axiom 2. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ (*einschl. das Einheitsideal*) *gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$.[5]

Für diesen Ring gilt der

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein beliebiges Primideal* (*einschl.* $\mathfrak{R}$), *so gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{p}^n$ *und* $\mathfrak{p}^{n+1}$ *für jede ganze Zahl* n.

Ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$, so wird offenbar $\mathfrak{p}^n=\mathfrak{p}^{n+1}$ für jede ganze Zahl n, und folglich wird unsere Behauptung einleuchtend. Wir nehmen damit an, dass $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist. Dann folgt aus Axiom 2, dass für ein durch $\mathfrak{p}^2$ unteilbares Element p aus $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p}=(p,\mathfrak{p}^2)$$

(4) Die folgenden Beispiele zeigen die Unabhängigkeit der beiden Axiome.

Beispiel 1. Es sei $\mathfrak{R}$ der Polynombereich von abzählbar unendlich vielen Unbestimmten x_i mit ganz rational-zahligen Koeffizienten. Aber $\mathfrak{R}$ enthält keine ganze rationale Zahl als Element. Wir betrachten den Restklassenring $\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}=(x_1-x_1^2, x_2-x_2^2,\ldots, x_i x_k,\ldots)$ $i\neq k$ ist. Dann wird $\mathfrak{R}'$ eine direkte Summe von abzählbar unendlich vielen Idealen und für jedes Primideal $\mathfrak{p}'$ aus $\mathfrak{R}'$ gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'^2$. In $\mathfrak{R}$ gilt aber nicht der Teilerkettensatz.

Beispiel 2. Es sei $\mathfrak{R}$ der Polynombereich vom Unbestimmten x mit Koeffizienten aus dem Ring von ganzen rationalen Zahlen, und $\mathfrak{R}$ enthält alle ganzen rationalen Zahlen. Dann gilt in $\mathfrak{R}$ der Teilerkettensatz, aber nicht Axiom 2.

(5) Dieser Begriff rührt von Prof. Sono her.

ist. Daraus folgt auch

$$\mathfrak{p}^n = (p^n, \mathfrak{p}^{n+1}).$$

Wenn $\mathfrak{p}^n \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^{n+1}$ ist, so wird

$$\mathfrak{p}^n \supset \mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{a}' \supset \mathfrak{p}^{n+1},$$

wo $\mathfrak{a}' = ((r+\alpha)p^n,\ \mathfrak{p}^{n+1})$ ist. Dabei bedeutet r ein Element aus $\mathfrak{R}$ und α eine ganze Zahl. Da $(r+\alpha)p^n \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{n+1})$ ist, so soll $r+\alpha$ kein Element aus $\mathfrak{p}$ sein. Andererseits ist aber nach Axiom 2

$$\mathfrak{p} = ((r+\alpha)p, \mathfrak{p}^2), \text{ oder } \mathfrak{p}^2 = ((r+\alpha)p, \mathfrak{p}^2).$$

Der zweite Fall ist unmöglich, da daraus $(r+\alpha)p^n \equiv 0\ (\mathfrak{p}^{n+1})$ folgt. Hiermit erhalten wir aus dem ersten Fall

$$p \equiv 0 \quad (((r+\alpha)p, \mathfrak{p}^2)),$$

also wird

$$p^n \equiv 0 \quad (((r+\alpha)p^n,\ \mathfrak{p}^{n+1})), \text{ oder } \mathfrak{p}^n \equiv 0 \ (\mathfrak{a}').$$

Das widerspricht der obigen Voraussetzung, damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Zur Bestimmung der Struktur dieses Ringes beweisen wir vorerst den

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem Axiom 1 erfüllt ist. Ist $\mathfrak{p}'$ ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal, das ein echter Teiler vom anderen Primideal $\mathfrak{p}$ ist, so ist es unmöglich, dass für eine endliche ganze Zahl m*

$$\mathfrak{p}'^m = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^{m+1})$$

ist.

Ist $\mathfrak{p}'^m = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^{m+1})$, so wird $\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}'^m)$. Da im Ring der Teilerkettensatz erfüllt ist, so können wir

$$\mathfrak{p}'^m = (\mathfrak{p}, p_1', p_2', \ldots . p_s'),\ p_i' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})\ (i = 1, 2, \ldots, s)$$

setzen; dabei soll offenbar $\mathfrak{p}'^m \neq \mathfrak{p}$ sein, da $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Daher folgt

$$(1) \qquad p_i' \equiv a_{i1} p_1' + a_{i2} p_2' + \ldots + a_{is} p_s'\ (\mathfrak{p})\ (i = 1, 2, \ldots, s),$$

wo a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}'$ bedeuten. Multiplizieren wir (1) mit einem durch $\mathfrak{p}'$ unteilbaren Element r, so wird

$$(2) \qquad r p_i' \equiv a_{i1}' p_1' + a_{i2}' p_2' + \ldots + a_{is}' p_s'\ (\mathfrak{p})\ (i = 1, 2, \ldots, s),$$

wo a_{ij}' auch die Elemente aus $\mathfrak{p}'$ sind. Durch Elimination von $p_2', \ldots, p_s'$ aus (2) ergibt sich

$$(r^s - a) p_1' \equiv 0\ (\mathfrak{p}),$$

wobei a ein Element aus $\mathfrak{p}'$ ist. Da $p_1' \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ ist, so soll $r^s - a \equiv 0\ (\mathfrak{p})$

sein, und folglich ist

$$r^s \equiv 0\ (\mathfrak{p}').$$

Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{p}'$ ein Primideal und $r \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}')$ ist; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Satz 2. *Werden im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ Axiome 1 und 2 vorausgesetzt, und ist $\mathfrak{R}$ direkt-unzerlegbar, so ist $\mathfrak{R}$ nilpotent, oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring, oder ein Ring mit Einheitselement, in dem jedes von $\mathfrak{R}$ und* (0) *verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal ist. Existiert in $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so ist jedes vom Nullideal verschiedene Ideal immer eine Potenz von $\mathfrak{R}$. Folglich gilt in $\mathfrak{R}$ der eingeschränkte Vielfachenkettensatz.*

Gibt es in $\mathfrak{R}$ kein Primidal ausser $\mathfrak{R}$ und $(\mathfrak{o})$, so soll $\mathfrak{R}$ nilpotent, oder ein Körper, oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring sein. Es sei $\mathfrak{p}$ jetzt ein von $\mathfrak{R}$ und (0) verschiedenes Primideal. Dann folgt aus Axiom 2 und Satz 1, dass für jede ganze Zahl n kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}^n$ und $\mathfrak{p}^{n+1}$ existiert. Ferner ist stets $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$, falls $\mathfrak{p}^n \neq (0)$ ist, da $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar ist. Es sei $\mathfrak{p}'$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal, das ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ ist. Dann ist $\mathfrak{p}'^n \neq \mathfrak{p}'^{n+1}$ für jede ganze Zahl n. Da es zwischen $\mathfrak{p}'^n$ und $\mathfrak{p}'^{n+1}$ kein Ideal gibt, so folgt

$$\mathfrak{p}' = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^2), \text{ oder } \mathfrak{p}'^2 = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^2).$$

Nach Hilfssatz 1 ist aber der erste Fall unmöglich. Damit soll nur der zweite Fall möglich sein, und folglich wird auch

$$\mathfrak{p}'^2 = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^3), \text{ oder } \mathfrak{p}'^3 = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'^3).$$

Aber der erste Fall ist auch unmöglich, und folglich soll der zweite Fall möglich sein. Indem wir so fortfahren, folgt, dass jede Potenz von jedem von $\mathfrak{R}$ verschiedenen primen Teiler von $\mathfrak{p}$ stets ein Teiler von $\mathfrak{p}$ sein muss. Ist $\mathfrak{a}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$, so sollen damit alle Primärkomponenten von $\mathfrak{a}^m$ in der kürzesten Darstellung $\mathfrak{a}^m = [\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n]$ durch grösste Primärideale ein Teiler von $\mathfrak{p}$ sein. Mit anderen Worten ist jede Potenz eines echten Teilers von $\mathfrak{p}$ stets ein Teiler von $\mathfrak{p}$, wenn wir annehmen, dass $\mathfrak{p}$ kein maximales Primideal ist. Andererseits gilt der Satz, dass ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent oder ein maximales Primideal vom Ring mit Einheitselement sein soll, wenn jede Potenz vom beliebigen echten Teiler von $\mathfrak{p}$ stets ein Teiler von $\mathfrak{p}$ ist.[6] Da aus der Voraussetzung, dass $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar ist, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ folgt, so ergibt sich ein Widerspruch, wenn wir annehmen, dass

(6) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, *Journal of Sci. of the Hiroshima Univ.* Ser. A, 2. S. 6.

$\mathfrak{p}$ kein maximales Primideal ist. Damit muss jedes von (0) verschiedene Primideal von $\mathfrak{R}$ immer ein maximales Primideal sein.

Nach unserer Voraussetzung, dass es kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$ gibt, ergibt sich

$$\mathfrak{o}^2=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^2), \text{ oder } \mathfrak{o}=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^2).$$

Im ersten Falle folgt daraus auch

$$\mathfrak{o}^3=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^3), \text{ oder } \mathfrak{o}^2=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^3),$$

da es nach Satz 1 kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}^2$ und $\mathfrak{o}^3$ gibt. Indem wir so fortfahren, gelangen wir schliesslich zum Resultat, dass für eine endliche ganze Zahl m $\mathfrak{o}^m=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{m+1})$ ist, oder dass $\mathfrak{p}$ durch jede Potenz von $\mathfrak{o}$ stets teilbar ist. Ist $\mathfrak{o}^m=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{m+1})$, so wird

$$\mathfrak{o}^m=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{m+1})=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{m+2})=\ldots\ldots$$

Damit existiert in $\mathfrak{o}^m$ ein Element e von der Art, dass für jedes Element r aus $\mathfrak{o}^m$

$$er\equiv r \ (\mathfrak{p})$$

ist.(7) Da $\mathfrak{p}$ aber ein maximales Primideal ist, so wird der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper. Daraus folgt, dass $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist. Ist für jede ganze Zahl m immer $\mathfrak{p}\equiv 0\,(\mathfrak{o}^m)$, so ist jede Potenz vom beliebigen echten Teiler von $\mathfrak{p}$ stets ein Teiler von $\mathfrak{p}$. Nach dem obigen ausgesprochenen Satz muss $\mathfrak{p}$ idempotent oder ein maximales Ideal sein. Aber $\mathfrak{R}$ ist direkt unzerlegbar, damit soll $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal sein. Nun werden wir die Existenz des Einheitselementes beweisen. Ist das Nullideal kein Primideal, so wird

$$\mathfrak{o}^\lambda=\mathfrak{o}^{\lambda+1}$$

für eine ganze Zahl λ,(8) und daraus folgt die Existenz des Einheitselementes, da $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar ist. Es sei nun (0) prim. Aus Axiom 2 folgt

$$\mathfrak{o}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}, \text{ oder } \mathfrak{o}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2.$$

Im ersten Fall gibt es ein Element r_1 derart, dass

$$r_1 p=p$$

ist,(9) we p ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}$ bedeutet. Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler besitzt, so folgt daraus, dass r_1 das Einheitselement ist. Im zweiten

---

(7) S. Mori, Ueber Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, *Journal of Sci. of the Hiroshima Univ.* **1**, S. 176.

(8) S. Mori, Ueber Teilerfremdheit von Idealen, *Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ.* **2**, S. 105.

(9) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, S. 1.

Fall setzen wir

$$\mathfrak{p}=(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

und es sei r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element. Dann werden

$$rp_i=a_{i1}p_1+\ldots+a_{in}p_n \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

oder

$$a_{i1}p_1+\ldots+(a_{ii}-r)p_i+\ldots+a_{in}p_n=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

dabei sind a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}$. Durch Elimination ergibt sich

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r \;\ldots & \\ \ldots & & \\ \ldots & & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & a_{nn}-r \end{vmatrix}=0,$$

oder

$$r^n=a\equiv 0 \ (\mathfrak{p}),$$

was aber unmöglich ist, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $r\not\equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ ist. Hiermit soll $\mathfrak{R}$ das Einheitselement besitzen; also ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Besitzt $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so gibt es in $\mathfrak{R}$ kein von $\mathfrak{o}$ und (o) verschiedenes Primideal, und folglich ist jedes von (o) verschiedene Ideal $\mathfrak{a}$ immer ein zu $\mathfrak{o}$ gehöriges Primärideal. Für eine ganze Zahl n wird damit

$$(1) \qquad \mathfrak{o}^n\not\equiv 0 \ (\mathfrak{a}), \ \mathfrak{o}^{n+1}\equiv 0 \ (\mathfrak{a}),$$

wenn $\mathfrak{a}$ keine Potenz von $\mathfrak{o}$ ist. Aus $\mathfrak{a}\equiv 0 \ (\mathfrak{o})$ folgt auch

$$\mathfrak{a}\equiv 0 \ (\mathfrak{o}^m), \ \mathfrak{a}\not\equiv 0 \ (\mathfrak{o}^{m+1}). \ m\leqq n$$

für eine ganze Zahl m. Da es kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$ gibt, so wird nach Satz 1

$$\mathfrak{o}^m=(\mathfrak{a}, \mathfrak{o}^{m+1}).$$

Durch Multiplikation mit $\mathfrak{o}^{n-m}$ erhalten wir

$$\mathfrak{o}^n=(\mathfrak{a}\mathfrak{o}^{n-m}, \mathfrak{o}^{n+1})\equiv 0 \ (\mathfrak{a})$$

gegen die erste Beziehung von (1). Also muss jedes von (0) verschiedene Ideal eine Potenz von $\mathfrak{o}$ sein.

Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einheitselement, so folgt aus dem obigen Beweise, dass jedes vom Nullideal verschiedene Ideal einen minimalen Teiler besitzt.[10] Andereseits sind die Längen der Hauptreihen eines Ideals

(10) S. Mori, Struktur des Sonoschen Ringes, *Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ.* **2**, S. 183.

identisch, die mit demselben Ideal beginnen.[11] Daraus folgt die Gültigkeit des eingeschränkten Vielfachenkettensatzes Ist $\mathfrak{R}$ nilpotent oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring, so ist der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{o}^m$ immer endlich, und folglich ist $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ auch endlich, falls $\mathfrak{a}$ vom Nullideal verschieden ist. In diesem Fall gilt auch damit der eingeschränkte Vielfachenkettensatz, also ist der letzte Teil des Satzes auch bewiesen.

Satz 3. *Werden im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ Axiome 1 und 2 vorausgesetzt, so wird $\mathfrak{R}$ eine direkte Summe von endlich vielen direkt-unzerlegbaren Idealen, und babei ist höchstens ein Ideal nilpotent, oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring, und alle anderen sind Ring mit Einheitselement, in dem jedes von (o) verschiedene Primideal zugleich ein maximales Ideal ist. Ist ein Ideal in der Darstellung nicht idempotent, so sollen alle anderen Körper sein, und im nicht-idempotenten Ideal ist jedes von (o) verschiedene Ideal eine Potenz vom Ideal. Ferner ist die Darstellung von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe von direkt-unzerlegbaren Idealen eindeutig bestimmt.*

Ist $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, so ist der Satz nach Satz 2 schon einleuchtend. Im anderen Fall existiert nach Axiom 1 eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ als direkte Summe von endlich vielen direkt-unzerlegbaren Idealen. Es sei damit

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots.+\mathfrak{m}_n.$$

Besitzen zwei Ideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ kein Einheitselement, so wird

$$\mathfrak{o}\supset\mathfrak{m}_1^2+\mathfrak{m}_2+\ldots.+\mathfrak{m}_n\supset\mathfrak{o}^2.$$

Denn, wenn $\mathfrak{o}=\mathfrak{m}_1^2+\mathfrak{m}_2+\ldots+\mathfrak{m}_n$ ist, so folgt $\mathfrak{m}_1\equiv 0\,(\mathfrak{m}_1^2)$, und folglich besitzt $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement gegen die obige Voraussetzung. Wenn $\mathfrak{o}^2=\mathfrak{m}_1^2+\mathfrak{m}_2+\ldots.+\mathfrak{m}_n$ ist, so wird

$$\mathfrak{m}_1^2+\mathfrak{m}_2^2+\ldots.+\mathfrak{m}_n^2=\mathfrak{m}_1^2+\mathfrak{m}_2+\ldots.+\mathfrak{m}_n.$$

Daraus folgt die Existenz des Einheitselementes von $\mathfrak{m}_2$ gegen die Voraussetzung. Da es kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$ gibt, so besitzt damit höchstens ein Ideal $\mathfrak{m}_1$ kein Einheitselement. Besitzt der Ring $\mathfrak{m}_n$ ein vom Nullideal und $\mathfrak{m}_n$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}_n$, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_1+\ldots.+\mathfrak{m}_{n-1}+\mathfrak{p}_n$ ein Primideal von $\mathfrak{R}$ und daraus folgt

$$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{m}_1+\ldots.+\mathfrak{m}_{n-1}+\mathfrak{p}_n^2\supset\mathfrak{p}^2. \tag{1}$$

Denn, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_1+\ldots+\mathfrak{m}_{n-1}+\mathfrak{p}_n^2$ ist, so wird $\mathfrak{p}_\iota=\mathfrak{p}_n^2$ gegen die Tatsache, dass $\mathfrak{m}_n$ direkt unzerlegbar ist. Ist $\mathfrak{m}_1+\ldots.+\mathfrak{m}_{n-1}+\mathfrak{p}_n^2=\mathfrak{p}^2$, so wird

(11) M. Sono, On Congruences, *Memoirs of the College of Sci., Kyoto Imperial Univ.* (1917).

$$\mathfrak{m}_1 + \ldots + \mathfrak{p}_n^2 = \mathfrak{m}_1^2 + \ldots + \mathfrak{p}_n^2.$$

Daher folgt ein Widerspruch, dass $\mathfrak{m}_1$ das Einheitselement besitzt. Die Beziehung (1) widerspricht aber dem Axiom 2. Hiermit sollen alle Ideale $\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots \mathfrak{m}_n$ Körper sein. Ferner besitzt $\mathfrak{m}_1$ kein von (o) verschiedenes Primideal ausser $\mathfrak{m}_1$, sonst hätte $\mathfrak{m}_1$ nach Satz 2 das Einheitselement. Da $\mathfrak{m}_1$ direkt unzerlegbar ist, so muss $\mathfrak{m}_1$ nilpotent oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring sein, und ferner ist jedes von (o) verschiedene Ideal aus $\mathfrak{m}_1$ eine Potenz von $\mathfrak{m}_1$. Besitzt jedes $\mathfrak{m}_i$ das Einheitselement, so gibt es nach Axiom 2 kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i^2$, wenn $\mathfrak{p}_i$ ein Primideal aus $\mathfrak{m}_i$ ist. Da $\mathfrak{m}_i$ direkt unzerlegbar ist, so folgt damit aus Satz 2, dass jedes vom Nullideal verschiedene Primideal aus $\mathfrak{m}_i$ zugleich ein maximales Ideal ist. Hiermit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen. Der zweite Teil ist aber ersichtlich.

Aus dem Satz ergibt sich auch

Satz 4. *Ein kommutativer Ring, in dem die Axiome 1 und 2 erfüllt sind, ist eine direkte Summe von endlich vielen Sonoschen Ringen, in denen Axiom 2 gilt.*

Hilfssatz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem Axiom 1 erfüllt ist. Ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ zugleich ein maximales Ideal und existert kein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ (einschl. $\mathfrak{p}^2$), so wird*

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{p},$$

wo $\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Da es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ (einschl. $\mathfrak{p}^2$) gibt, so wird

$$r\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{p}^2),\quad r \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$$

für ein Element r aus $\mathfrak{R}$. Setzen wir $\mathfrak{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n)$, so ergibt sich daraus

$$rp_i = a_{i1}p_1 + \ldots + a_{in}p_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo a_{ij} die Elemente aus $\mathfrak{p}$ sind. Durch Elimination folgt die Existenz eines durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Elementes r' derart, dass

$$(1) \qquad r'\mathfrak{p} = 0,\quad r' = r^n - a$$

ist, dabei ist a ein Element aus $\mathfrak{p}$. Andererseits ist

$$\mathfrak{o} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{o}r') = (\mathfrak{p}, \mathfrak{o}r'^2) = \ldots,$$

da das Primideal $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist. Ist $c\ (\neq 0)$ ein gemeinsames Element von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{o}r'$, so wird nach (1)

$$c = r'r'',\quad r'' \equiv 0\ (\mathfrak{p}).$$

Das widerspricht der Tatsache, dass $c \neq 0$ ist. Damit soll

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$$

sein. Da $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal ist, so ist $\mathfrak{m}$ ein Körper.

Satz 5. *Ist im Ring $\mathfrak{R}$ Axiom 1 erfüllt, so ist die Voraussetzung von Axiom 2 identisch mit der Voraussetzung des folgenden Axiomes:*

Axiom 2'. *Es gibt zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$ kein Ideal, und für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ gibt es auch kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*

Aus Axiom 2 folgt offenbar Axiom 2'. Wir setzen nun die Gültigkeit des Axiomes 2' voraus, und wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle, je nachdem der Ring das Einheitselement besitzt oder nicht.

1. Fall. $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^2$. Es sei $\mathfrak{p}'$ ein nicht-idempotentes Primideal, das durch ein maximales Primideal $\mathfrak{p}$ echt teilbar ist. Dann existiert nach Axiom 1 ein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}''$ derart, dass

$$\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}''\geqq\mathfrak{p}'$$

ist, und dass es kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}''$ gibt. Da $\mathfrak{p}'$ kein idempotentes Primideal ist, so ist $\mathfrak{p}''$ auch kein idempotentes Primideal. Ist $\mathfrak{p}''$ noch durch ein nicht-maximales Primideal teilbar, so können wir auch ein nicht-maximales Primideal $\mathfrak{p}'''$ finden, das ein echter Teiler von $\mathfrak{p}''$ ist. Indem wir so fortfahren, erhalten wir nach Axiom 1 schliesslich ein nicht-maximales nich-idempotentes Primideal $\mathfrak{p}^{(n)}$, das durch kein nicht-maximales Primideal echt teilbar ist. Da $\mathfrak{p}^{(n)}$ nicht idempotent ist, so wird [12]

$$\mathfrak{p}^{(n)}\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^k),$$

wo $\mathfrak{p}_2$ ein maximales Primideal bedeutet, das ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(n)}$ ist. Damit wird

$$\mathfrak{p}^{(n)}\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^l),\ \ \mathfrak{p}^{(n)}\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^{l+1}),\ \ l\geqq 1,$$

für eine ganze Zahl l. Nach Axiom 2' ergibt sich damit

$$\mathfrak{p}_2^l=(\mathfrak{p}^{(n)},\ \mathfrak{p}_2^{l+1}).$$

Das ist aber nach Hilfssatz 1 unmöglich. Hiermit muss jedes nicht-maximale Primideal idempotent sein; also gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$, wenn $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal ist.

2. Fall. $\mathfrak{o}\neq\mathfrak{o}^2$. Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht-idempotentes maximales Primideal, so wird [13]

$$(1)\qquad \mathfrak{p}\not\equiv 0\ (\mathfrak{o}^m),$$

für eine ganze Zahl m. Daraus folgt

$$\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{o}^l),\ \ \mathfrak{p}\not\equiv 0\ (\mathfrak{o}^{l+1}),$$

für eine ganze Zahl l. Nach Axiom 2' folgt daraus

(12), (13) Vgl. den Satz, der beim Beweise von Satz 2 gebraucht worden ist.

$$\mathfrak{o}^l=(\mathfrak{p}, \mathfrak{o}^{l+1}).$$

Also ist der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper, da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Hiermit ist $\mathfrak{p}$ zugleich ein maximales Ideal aus $\mathfrak{R}$. Nach Axiom 2′ ist aber

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{o}\mathfrak{p}, \text{ oder } \mathfrak{p}^2=\mathfrak{o}\mathfrak{p}.$$

Im ersten Fall wird $\mathfrak{p}\equiv 0\,(\mathfrak{o}^n)$ für eine ganze Zahl n,[14] und wir erhalten einen Widerspruch gegen (1). Im zweiten Fall gibt es kein Primideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ (einschl. $\mathfrak{p}^2$). Nach Hilfssatz 2 folgt daher

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{p}+\mathfrak{m},$$

wo $\mathfrak{m}$ ein Körper ist. Damit ist jedes maximale Primideal kein echter Teiler vom Primideal; also gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$, wenn $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal ist. Aus Axiom 2′ folgt damit Axiom 2.

Satz 6. *Ist im kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ Axiom 1 erfüllt, so ist die Voraussetzung von Axiom 2 identisch mit der Voraussetzung des folgenden Axiomes:*

Axiom 2″. *Jedes Primärideal vom Ring ist stets eine Potenz vom Primideal.*

Zunächst setzen wir die Gültigkeit des Axiomes 2 voraus. Ist $\mathfrak{q}$ ein zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, und ist $\mathfrak{q}$ keine Potenz von $\mathfrak{p}$, so wird für eine ganze Zahl n

(1) $$\mathfrak{p}^{n+1}\equiv 0\,(\mathfrak{q}),\quad \mathfrak{p}^n\not\equiv 0\,(\mathfrak{q}).$$

Aus $\mathfrak{q}\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ folgt auch

$$\mathfrak{q}\equiv 0\,(\mathfrak{p}^m),\quad \mathfrak{q}\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{m+1})$$

für eine ganze Zahl m ($\leqq n$). Nach Satz 1 folgt daher

$$\mathfrak{p}^m=(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}^{m+1}).$$

Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}^{n-m}$ erhalten wir

$$\mathfrak{p}^n=(\mathfrak{q}\mathfrak{p}^{n-m}, \mathfrak{p}^{n+1}),$$

also wird nach (1)

$$\mathfrak{p}^n\equiv 0\,(\mathfrak{q})$$

gegen die letzte Beziehung von (1). Aus Axiom 2 folgt damit Axiom 2″.

Es werde jetzt Axiom 2″ vorausgesetzt. Existiert in $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so ist jeder Teiler einer Potenz vom maximalen Primideal $\mathfrak{p}$ immer ein Primärideal,[15] und folglich gibt es nach Axiom 2″ kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ Enthält $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so wird $\mathfrak{o}\neq\mathfrak{o}^2$. Gäbe

(14) S. Mori, Ueber. Produktzerlegung der Ideale, S. 1.
(15) S. Mori, Ueber. Produktzerlegung der Ideale, S. 10.

es ein Ideal $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$, so würde $\mathfrak{a}$ ein Primärideal und keine Potenz von $\mathfrak{o}$; was dem Axiom 2'' widerspricht. Nach dem Beweise von Satz 5 folgt daher, dass jedes nicht-idempotente maximale Primideal zugleich ein maximales Ideal ist. $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ist nämlich ein Körper. Aus Axiom 2'' folgt auch, dass es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt. Wenn $\mathfrak{p}^2$ nicht primär ist, so wird nach Hilfssatz 2

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{p}+\mathfrak{m},$$

wo $\mathfrak{m}$ einen Körper bedeutet, also gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{p}'^2$, wenn $\mathfrak{p}'$ jedes Primideal ist. Denn es gibt kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$. Es sei jetzt $\mathfrak{p}^2$ primär. Da $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ ein Körper ist, so wird

$$r^2\equiv r\ (\mathfrak{p}),\quad (r-r^2)^2\equiv 0\ (\mathfrak{p}^2).$$

Daher folgt, dass für jedes Element r' aus $\mathfrak{R}$ stets $r'\equiv er'\ (\mathfrak{p}^2)$ ist, da $\mathfrak{p}^2$ primär ist. Also wird $\mathfrak{o}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$, und folglich wird $\mathfrak{p}\equiv 0\ (\mathfrak{o}^m)$ für jede ganze Zahl m. Das ist unmöglich, da $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzt und $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist.(16) Ist $\mathfrak{p}$ idempotent, so gibt es offenbar zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ kein Ideal. Nach Satz 5 gilt damit in $\mathfrak{R}$ Axiom 2; also ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Struktur des Multiplikationsringes im Sinne von Krull.

Wir werden zu der Voraussetzung der Axiome 1 und 2 noch das folgende Axiom hinzufügen:

Axiom 3. *Existenz des Einheitselementes der Multiplikation.*

Aus Satz 3 folgt unmittelbar die Tatsache, dass Axiom 3 keine Folge der Axiome 1 und 2 ist. Das im vorigen Paragraphen angeführte Beispiel ermöglicht uns den folgenden Beweis, dass aus den Axiomen 2 und 3 Axiom 1 nicht erfolgt. Ferner ist offenbar Axiom 2 keine Folge der Axiome 1 und 3. Hiermit sind die drei Axiome 1, 2 und 3 voneinander unabhängig.

Satz 7. *Ein allgemeiner kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein Multiplikationsring im Sinne von Krull, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden voneinander unabhängigen Axiome erfüllt sind:*

1. *Teilerkettensatz.*

2. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$.*

3. *Existenz des Einheitselementes.*

Es werden zunächst die Axiome vorausgesetzt. Da $\mathfrak{R}$ das Einheit-

(16) Vgl. den Satz, der beim Beweise des Satzes 2 gebraucht worden ist.

selement besitzt, so folgt aus Satz 3, dass

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{m}_n$$

ist, wo jedes $\mathfrak{m}_i$ das Einheitselement besitzt und direkt unzerlegbar ist. Ferner ist jedes vom Nullideal verschiedene Primideal aus $\mathfrak{m}_i$ zugleich ein maximales Ideal. Jedes Primideal aus $\mathfrak{R}$ ist damit idempotent oder ein maximales Ideal. Da $\mathfrak{m}_i$ direkt unzerlegbar ist, so ist jedes idempotente Primideal $\mathfrak{p}$ in der folgenden Form darstellbar:

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{m}_1+\ldots\ldots+\mathfrak{m}_{i-1}+\mathfrak{m}_{i+1}+\ldots\ldots+\mathfrak{m}_n.$$

Zwei gegenseitig relativprime Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ sind damit stets teilerfremd, also ist $\mathfrak{o}=(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$. Weiter ist nach Satz 6 jedes Primärideal aus $\mathfrak{R}$ immer eine Potenz vom Primideal. Es sei nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal und sei

$$\mathfrak{a}=[\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n] \tag{1}$$

eine kürzeste Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch grösste Primärideale. Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, so sind sie gegenseitig relativprim, und folglich wird

$$\mathfrak{o}=(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j) \quad (i \neq j,\ i, j=1, 2, \ldots n). \tag{2}$$

Denn, wenn $\mathfrak{p}_1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_2)$ wäre, so würde $\mathfrak{p}_1$ idempotent, und daraus folgte $\mathfrak{q}_1 \equiv 0\ (\mathfrak{q}_2)$, was der Tatsache widerspricht, dass die Darstellung (1) eine kürzeste ist. Da

$$\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_i^{\lambda_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

sind, so folgt aus (1) und (2)

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1^{\lambda_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_s^{\lambda_s}\bar{\mathfrak{p}}_1\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_t,$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_t$ die idempotenten Primideale bedeuten.(17) Es sei

$$\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_1'^{\rho_1}\ldots\mathfrak{p}_l'^{\rho_l}\cdot\mathfrak{p}_{l+1}'^{\rho_{l+1}}\ldots\ \mathfrak{p}'^{\rho_m}_m\bar{\mathfrak{p}}_1'\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}_n'$$

ein Teiler von $\mathfrak{a}$. Dabei sind $\bar{\mathfrak{p}}_1', \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_n'$ auch die idempotenten Primideale, und $\mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_l'$ die maximalen Primideale, die auch zu $\mathfrak{a}$ gehören, und $\mathfrak{p}'_{l+1}, \ldots, \mathfrak{p}_m'$ die maximalen Primideale, die nicht zu $\mathfrak{a}$ gehören. Da $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist, so gehört jedes zu $\mathfrak{b}$ gehörige idempotente Primideal $\mathfrak{p}'$ auch zu $\mathfrak{a}$; also ist $n \leqq t$. Ist $\bar{\mathfrak{p}}_i'$ ein zu $\mathfrak{b}$ gehöriges nichtidempotentes Primideal, so gehört $\mathfrak{p}_i'$ auch zu $\mathfrak{a}$, oder ein Teiler eines zu $\mathfrak{a}$ gehörigen idempotenten Primideals $\bar{\mathfrak{p}}_j$, das nicht zu $\mathfrak{b}$ gehört. Im ersten Fall sei es $\mathfrak{p}_i'=\mathfrak{p}_i\ (i=1, 2, \ldots, l)$. Dann wird $\lambda_i \geqq \rho_i$. Denn, wäre $\rho_i > \lambda_i$, so würde

(17) Vgl. M. Sono, On congruences, 2, S. 117. E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, *Math. Ann.* **83** S. 51.

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_i^{\lambda_i}P\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i'^{\rho_i}),\ \ \mathfrak{p}_i^{\lambda_i}\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i'^{\rho_i}),\ \ P\not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_i'),$$

wo P ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedentet. Das widerspricht der Tatsache, dass $\mathfrak{p}_i'^{\rho_i}$ ein Primärideal ist. Im letzten Fall ist offenbar $\bar{\mathfrak{p}}_j\mathfrak{p}_i'^{\rho_i}=\bar{\mathfrak{p}}_j$. Mit den Ergebnissen können wir $\mathfrak{a}$ in der folgenden Form darstellen:

$$\mathfrak{a}=(\mathfrak{p}_1'^{\rho_1}\ldots.\mathfrak{p}_l'^{\rho_l}\mathfrak{p}_{l+1}'^{\rho_l+1}\ldots.\mathfrak{p}_m'^{\rho_m}\bar{\mathfrak{p}}_1'\ldots.\bar{\mathfrak{p}}_n')(\mathfrak{p}_1'^{\lambda_1-\rho_1}\ldots.\mathfrak{p}_l'^{\lambda_l-\rho_l}\bar{\mathfrak{p}}_{n+1}\ldots.\bar{\mathfrak{p}}_{t-n}).$$

Also wird $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$. Da $\mathfrak{R}$ das Einheitselement besitzt, so ist auch $\mathfrak{o}=\mathfrak{o}^2$. Hiermit ist $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring im Sinne von Krull.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring im Sinne von Krull. Dann ist die Gültikeit der Axiome 1 und 3 leicht ersichtlich.(18) Es sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal und es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von der Art, dass

$$\mathfrak{p}^n\supset\mathfrak{a}\supset\mathfrak{p}^{n+1} \tag{3}$$

ist. Dann soll $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^n\mathfrak{a}'$ sein, da $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring ist. Da $\mathfrak{R}$ das Einheitselement besitzt, so soll $\mathfrak{a}'\neq\mathfrak{o}$ sein. Damit ist $\mathfrak{a}'$ durch ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}'$ teilbar; also wird $\mathfrak{a}'=\mathfrak{p}'\mathfrak{a}''$. Daher folgt

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^n\mathfrak{p}'\mathfrak{a}''. \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}'$ ist, sonst würde $\mathfrak{a}\equiv 0\,(\mathfrak{p}^{n+1})$ gegen die Voraussetzung (3). Aus (3) und (4) folgt aber

$$\mathfrak{p}^{n+1}=0\,(\mathfrak{p}').$$

Also ist $\mathfrak{p}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{p}$ und von $\mathfrak{o}$ verschieden. Das ist unmöglich, da $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal ist. Hiermit gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$, wenn $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal ist. Nach Satz 5 ergibt sich damit, dass in $\mathfrak{R}$ Axiom 2 gilt. Also ist unser Satz vollständig bewiesen.

Mit Hilfe von Satz 3 und Satz 7 erhalten wir leicht

Satz 8. *Jeder Multiplikationsring im Sinne von Krull ist direkt zerlegbar in die direkte Summe von endlich vielen direkt-unzerlegbaren Idealen, in denen jedes von (o) verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ stets ein maximales Ideal ist, und es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt. Ferner besitzt der Ring das Einheitselement.*

Struktur des Multiplikationsringes im Sinne von Akizuki.

Satz 9. *Ein allgemeiner kommutativer Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann ein Multiplikationsring im Sinne von Akizuki, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden voneinander unabhängigen Axiome gelten:*

(18) Y. Akizuki, Bemerkungen über den Aufbau des Nullideals, S. 253.

1. *Teilerkettensatz.*

2. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ (*einschl.* $\mathfrak{o}$) *gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$.

3. *Jede Potenz vom Primideal ist stets ein Primärideal.*(19)

Es sei zunächst $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring im Sinne von Akizuki. Da im Multiplikationsring der Teilerkettensatz vorausgesetzt wird, so gilt in $\mathfrak{R}$ Axiom 1.

Gibt es in $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so können wir in gleicher Weise wie im Beweis von Satz 7 beweisen, dass es für jedes maximale Primideal $\mathfrak{p}$ kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$ gibt. Nach Satz 5 gilt in $\mathfrak{R}$ Axiom 2. Hiermit ist nach Satz 3 jedes Primideal idempotent oder ein maximales Ideal. Da jede Potenz vom maximalen Primideal aus Ring mit Einheitselement immer Primärideal ist,(20) und da die Potenz jedes idempotenten Primideals offenbar auch ein Primärideal ist, so gilt in $\mathfrak{R}$ auch Axiom 3.

Wir nehmen nun an, dass $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzt. Dann ist $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}^2$. Ist

$$\mathfrak{o} \supset \mathfrak{a} \supset \mathfrak{o}^2,$$

so wird nach der Eigenschaft vom Multiplikationsring

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{o}\mathfrak{a}',$$

wo $\mathfrak{a}'$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Daher folgt $\mathfrak{a} \equiv 0 \ (\mathfrak{o}^2)$ gegen unsere Voraussetzung; also gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{o}^2$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal und vom Nullideal verschieden. Dabei ist $\mathfrak{p}$ nicht idempotentent; sonst würde $\mathfrak{o} = \mathfrak{p} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Folglich gäbe es kein Ideal $\mathfrak{a}$ derart, dass $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mathfrak{a}$ ist, gegen die Eigenschaft des Multiplikationsringes. In $\mathfrak{R}$ gibt es ein Ideal $\mathfrak{a}'$ derart, dass

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\mathfrak{a}'$$

ist. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}')$ ist, so soll $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}'$ sein. Also ist

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\mathfrak{p}.$$

Hiermit gibt es in $\mathfrak{R}$ ein Elment r derart, dass für jedes Element p aus $\mathfrak{p}$ stets $rp = p$ ist.(21) Für jedes m ist damit

(19) Aus dem im ersten Paragraphen gezeigten Beispiel folgt unmittelbar, dass Axiom 1 keine Folge von den Axiomen 2 und 3 ist. Im Sonoschen Ring mit Einheitselement gelten die Axiome 1 und 3, aber Axiom 2 gilt nicht im allgemeinen. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1$, wo $\mathfrak{m}_1$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ nilpotent ist, und ist jedes Ideal aus $\mathfrak{m}$ stets eine Potenz von $\mathfrak{m}$, so gelten in $\mathfrak{R}$ die Axiome 1 und 2. Dabei ist $\mathfrak{m}$ ein Primideal, aber $\mathfrak{m}^2$ ist kein Primärideal. Hiermit sind die Axiome 1, 2 und 3 voneinander unabhängig.

(20) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, S. 10.

(21) S. Mori, Ueber Produktzerlegung der Ideale, S. 1.

$$\mathfrak{p} \equiv 0\ (\mathfrak{o}^m),$$

was aber unmöglich ist, da $\mathfrak{p}$ nicht idempotent ist, und $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzt.(22) Damit gibt es in $\mathfrak{R}$ kein Primideal ausser $\mathfrak{o}$ und (o); also gelten in $\mathfrak{R}$ die beiden Eigenschaften 2 und 3.

Wir setzen die Gültigkeit der Axiome 1, 2, und 3 voraus. Besitzt $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so ist $\mathfrak{R}$ nach Satz 7 offenbar ein Multiplikationsring. Im anderen Fall ist $\mathfrak{R}$ nach Satz 3 in der Form

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1 + \ldots . + \mathfrak{m}_n, \quad \mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$$

darstellbar, wo $\mathfrak{m}_i$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein nilpotenter Ring oder ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring ist. Ist aber $\mathfrak{R}$ direkt zerlegbar, so gilt in $\mathfrak{R}$ nicht Axiom 3. Hiermit ist $\mathfrak{R}$ direkt unzerlegbar, und $\mathfrak{R}$ besitzt kein von (0) verschiedenes Primideal ausser $\mathfrak{o}$. Nach Satz 2 ist damit jedes vom Nullideal verschiedene Ideal aus $\mathfrak{R}$ stets identisch mit einer Potenz von $\mathfrak{o}$; also ist der Ring ein Multiplikationsring im Sinne von Akizuki.

Wir können Satz 9 auch in folgender Weise aussprechen:

Satz 10. *Ein kommutativer Ring mit Teilerkettensatz ist dann und nur dann ein Multiplikationsring im Sinne von Akizuki, wenn jedes Primärideal des Ringes stets identisch mit einer Potenz vom Primideal ist, und umgekehrt.*

Aus diesem Satz folgt auch der

Satz 11. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Multiplikationsring im Sinne von Akizuki, so lässt jedes Ideal von $\mathfrak{R}$ sich als ein Produkt der Potenzen von Primidealen darstellen.*(23)

Nach Satz 10 ist jedes Primärideal aus $\mathfrak{R}$ eine Potenz vom Primideal. Existiert in $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so sind je zwei Primärideale, die gegenseitig relativprim sind, auch teilerfremd, und folglich gilt die Behauptung. Enthält $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so gilt nach Satz 9 auch die Behauptung.

Ringe, deren Ideale sich als Potenzprodukte von Primidealen darstellen lassen.

Satz. 12. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem der Teilerkettensatz gilt. Dann ist es notwendig und hinreichend dafür, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich als Produkt der Potenzen von Primidealen darstellen lässt, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden voneinander unabhängigen Bedingungen erfüllt sind:*

(22) Vgl. den Satz, der beim Beweis des Satzes 2 gebraucht worden ist.

(23) Die Umkehrung gilt dagegen nicht.

1. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ (*einschl.* $\mathfrak{o}$) *gibt es kein Ideal zwischen* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}^2$.

2. *Für jede von* $\mathfrak{o}$ *verschiedenen Primideale* $\mathfrak{p}_1$ *und* $\mathfrak{p}_2$, *die voneinander verschieden sind, ist immer* $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2]$.

Zunächst nehmen wir an, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich als Potenzprodukt der Primideale darstellen lässt. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$. Denn, da nach Voraussetzung jedes Primärideal als eine Potenz vom Primideal darstellbar ist, so folgt aus Satz 6 die Behauptung. Damit ist nach Satz 3 jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal oder idempotent. Es sei nun $\mathfrak{d} = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2]$, so wird $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{d})$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1'^{\lambda_1} \dots \mathfrak{p}_n'^{\lambda_n}$ ist, so soll

$$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \equiv 0\,(\mathfrak{p}_i'^{\lambda_i}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\mathfrak{p}_1'^{\lambda_1} \dots \mathfrak{p}_n'^{\lambda_n} \equiv 0 (\mathfrak{p}_1), (\mathfrak{p}_2)$$

sein, und folglich wird

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_1', \quad \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_2',$$

falls $\mathfrak{p}_1 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_2)$, $\mathfrak{p}_2 \not\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$ ist. Also wird

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = [\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2].$$

Wenn $\mathfrak{p}_1 \equiv 0\,(\mathfrak{p}_2)$ ist, so wird offenbar $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{d}$. Andererseits ist nach Satz 3 aber $\mathfrak{p}_1$ idempotent. Daher folgt auch $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$. Hiermit ist Bedingung 2 auch notwendig.

Wir setzen nun die Gültigkeit der Bedingungen I und 2 voraus. Besitzt $\mathfrak{R}$ das Einheitselement, so folgt aus Satz 3, dass erstens jedes Primärideal immer eine Potenz vom Primideal ist, und jede gegenseitig relativprimen Primideale teilerfremd sind, zweitens dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent ist, wenn $\mathfrak{p}$ durch ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Primideal echt teilbar ist. Daraus folgt, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich als ein Produkt der Potenzen von Primidealen darstellen lässt. Enthält $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement, so wird nach Satz 3 und Bedingung 2

$$\mathfrak{o} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}_1, \text{ oder } \mathfrak{o} = \mathfrak{m},$$

wo $\mathfrak{m}_1$ ein Körper und $\mathfrak{m}$ ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring oder nilpotent ist. In $\mathfrak{m}$ ist ferner jedes Ideal eine Potenz von $\mathfrak{m}$. Damit lässt auch jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich als ein Produkt der Potenzen von Primidealen darstellen.

Satz 13. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring, in dem der Teilerkettensatz erfüllt ist. Dann ist notwendig und hinreichend dafür, dass* *jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich eindeutig als ein Potenzprodukt von Primidealen*[24] *darstellen lässt, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden voneinander unabhängigen Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Fur jedes Primideal $\mathfrak{p}$ (einschl. $\mathfrak{R}$) gibt es kein Ideal zwischen $\mathfrak{p}$ nnd $\mathfrak{p}^2$.*

2. *Ohne Nullteiler.*

Zunächst nehmen wir an, dass jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ sich eindeutig als Potenzprodukt von Primidealen darstellen lässt. Dann gilt nach Satz 12 in $\mathfrak{R}$ Bedingung 1. Für jedes von (o) und $\mathfrak{o}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ muss immer

$$\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$$

sein, da die Produktzerlegung jedes Ideals eindeutig ist. Hiermit folgt aus Satz 3, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einheitselement, ohne Nullteiler, ist, in dem Bedingung I gilt, oder dass $\mathfrak{R}$ ein $\mathfrak{R}$-adischer Ring ist, in dem jedes Ideal eine Potenz von $\mathfrak{o}$ ist. Daher folgt die Gültigkeit der Bedingung 2.

Werden in $\mathfrak{R}$ Bedingungen 1 und 2 vorausgesetzt, so ist nach Satz 3 jedes Ideal als Potenzprodukt der Primideale darstellbar, und jede Potenz vom Primideal ist stets ein Primärideal. Daraus folgt nach Bedingung 2 die Eindeutigkeit von der Zerlegung jedes Ideals.

---

(24) Hier ist eine Bemerkung wesentlich, dass wir die Zerlegungen $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{o}\mathfrak{p}^n$ als gleiche ansehen werden.