Bemerkungen zur Zerlegung der Hauptideale.

Von

Shinziro Mori und Takeo Dodo.

(Eingegangen am 10. 12. 1936.)

W. Krull hat in seiner Arbeit[1] mit Hilfe der Begriffsbildungen der Bewertungstheorie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, dass in allgemeinen Ringen jedes Hauptideal sich *eindeutig* als Durchschnitt von endlich vielen symbolischen Potenzen höchster Primideale darstellen lasse.

Im folgenden wird mit Hilfe der von den Verfassern[2] entwickelten Methode, die völlig unabhängig von der Bewertungstheorie ist, ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür abgeleitet, dass im *allgemeinen Integritätsbereiche*[3] $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Durchschnitt von endlich vielen symbolischen Potenzen höchster Primideale darstellbar ist.[4]

Da in $\mathfrak{J}$ kein echter Nullteiler existiert, ergibt sich, dass in $\mathfrak{J}$ alle symbolischen Potenzen höchster Primideale von einander verschieden sind.[5] Somit ist die Durchschnittszerlegung eines Hauptideals in symbolische Potenzen höchster Primideale, wenn überhaupt vorhanden, stets eindeutig, und im oben ausgesprochenen Krullschen satz für das notwendige und hinreichende Kriterium ist das Wort „*eindeutig*" überflüssig.

Über symbolische Potenzen der Primideale in $\mathfrak{J}$.

In diesem Paragraphen stellen wir die wichtigsten Sätze zusammen, die wir später brauchen wedren.

---

(1) W. Krull, Über die Zerlegung der Hauptideale in allgemeinen Ringen, Math. Annalen **105** (1931), 1. Dort wird S. 3 die Existenz des Quotientenkörpers vorausgesetzt.

(2) S. Mori und T. Dodo, Bedingungen für ganze Abgeschlossenheit in Integritätsbereichen, dieses Journal **7** (1937), 15.

(3) Unter dem *allgemeinen Integritätsbereiche* $\mathfrak{J}$ verstehen wir stets einen allgemeinen kommutativen Ring ohne Nullteiler mit Einheitselement.

(4) Zu den benutzten Definitionen der *symbolischen Potenzen* und *höchsten Primideale* vgl. W. Krull, loc. cit., 3.

(5) Vgl. den Satz 7.

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)}$ *für ein beliebiges Primideal aus* $\mathfrak{J}$, *so ist auch* $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)} = \mathfrak{p}^{(m+2)} \ldots .$

In der Tat, ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}$ oder (0), so können wir leicht die Richtigkeit der Behauptung einsehen. Im anderen Falle sei p_{m+1} ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}^{(m+1)}$, dann gibt es ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r derart, dass $rp_{m+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{m+1})$ ist; also ergibt sich[1]

$$(1) \qquad rp_{m+1} = p_1p_{m1} + p_2p_{m2} + \ldots . + p_np_{mn} ,$$

wo p_i die Elemente aus $\mathfrak{p}$ und p_{mi} die Elemente aus $\mathfrak{p}^m$ bedeuten. Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r_i ist

$$r_ip_{mi} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{m+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots . , n) ,$$

da $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)}$ ist. Aus (1) erhalten wir danach $r'p_{m+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{m+2})$ für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r'; es ist nämlich $p_{m+1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(m+2)})$, und folglich $\mathfrak{p}^{(m+1)} = \mathfrak{p}^{(m+2)}$. Auf solche Weise sind alle symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(m)}, \mathfrak{p}^{(m+1)}, \ldots .$ einander gleich.

Satz 2. *Wenn kein Primärideal zwischen die symbolischen Potenzen* $\mathfrak{p}^{(1)}$ *und* $\mathfrak{p}^{(2)}$ *eines Primideals* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{J}$ *eingeschaltet werden kann, so ist* $\mathfrak{p}^{(2)}$ *irreduzibel und umgekehrt.*[2]

Zunächst nehmen wir an, dass zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ kein Primärideal eingeschaltet werden kann. Wäre $\mathfrak{p}^{(2)} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2]$ und wären $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ beide ein echter Teiler von $\mathfrak{p}^{(2)}$, so müssten sie beide durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein. Wir könnten somit in $\mathfrak{p}$ zwei Elemente p_1 und p_2 von der Art finden, dass

$$p_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1) , \qquad p_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)}) ;$$

$$p_2 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_2) , \qquad p_2 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)})$$

wäre, und daraus ergäbe sich $rp_1 \equiv 0 \ (p_2, \mathfrak{p}^{(2)})$ nach der obigen Voraussetzung, und dabei wäre r ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element. Daraus folgte

$$rp_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1) , \qquad rp_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_2) , \qquad rp_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)}) .$$

Da sich aus $p_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)})$ aber $rp_1 \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(2)})$ ergäbe, hätten wir einen Widerspruch mit der Annahme $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = \mathfrak{p}^{(2)}$, also muss $\mathfrak{p}^{(2)}$ irreduzibel sein.

---

(1) Unter dem *Produkt* $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^m$ zweier Ideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^m$ versteht man die Menge aller endlichen Summen $p_1p_{m1} + \ldots . + p_np_{mn}$ $(p_1, \ldots . , p_n < \mathfrak{p} ; \ p_{m1}, \ldots . , p_{mn} < \mathfrak{p}^m)$. W. Krull, *Idealtheorie,* (1935), 4.

(2) Unter der Voraussetzung des Teilerkettensatzes ist dieser Satz schon bewiesen. Vgl. S. Mori und T. Dodo, loc. cit., 23.

Es gebe zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ ein Primärideal $\mathfrak{q}$. Dann können wir in $\mathfrak{p}$ ein durch $\mathfrak{q}$ unteilbares Element p finden, und mit diesem Element bilden wir das Ideal $\mathfrak{a} = (p, \mathfrak{p}^{(2)})$. Ist g ein gemeinsames Element von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$, so ist $g \equiv bp \equiv 0$ $(\mathfrak{q})$, wobei b ein Element aus $\mathfrak{J}$ ist. Da $\mathfrak{q}$ aber primär ist, muss $b \equiv 0$ $(\mathfrak{p})$ sein, also ist $g \equiv 0$ $(\mathfrak{p}^{(2)})$. Daraus folgt, dass $\mathfrak{p}^{(2)} = [\mathfrak{q}, \mathfrak{a}]$ ist, und dabei sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}$ echte Teiler von $\mathfrak{p}^{(2)}$. Wenn $\mathfrak{p}^{(2)}$ irreduzibel ist, so kann kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eingeschaltet werden.

Da in $\mathfrak{J}$ der Teilerkettensatz nicht vorausgesetzt wird, braucht auch ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ nicht zu enthalten. Ist eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar, so heisst $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal *von endlichem Exponent*, oder ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges *starkes* Primärideal.[1]

Satz 3. *Wenn kein Primärideal zwischen die symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ eines Primideals $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}$ eingeschaltet werden kann, so gibt es auch kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(m)}$ und $\mathfrak{p}^{(m+1)}$ und jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige starke Primärideal ist eine symbolische Potenz von $\mathfrak{p}$,*

Ist $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p}^{(2)}$, so folgt nach Satz 1 $\mathfrak{p}^{(1)} = \mathfrak{p}^{(2)} = p^{(3)} = \ldots.$ und die Behauptung ist einleuchtend. Im anderen Falle sei p_1 ein durch $\mathfrak{p}^{(2)}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}^{(1)}$. Da zwischen $\mathfrak{p}^{(1)}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$ kein Primärideal eingeschaltet werden kann, existiert für jedes Element p aus $\mathfrak{p}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r derart, dass $rp \equiv 0$ $(p_1, \mathfrak{p}^2)$ ist. Ist p_2 ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}^2$, so ist es als endliche Summe der Produkte von der Form pp' darstellbar, wo p und p' die Elemente aus $\mathfrak{p}$ bedeuten. Für ein passend gewähltes durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r'' gilt daher $r''p_2 \equiv 0$ $(p_1^2, \mathfrak{p}^3)$. Auf solche Weise erhalten wir im allgemeinen

$$(1) \qquad rp_n \equiv 0 \ (p_1^n, \mathfrak{p}^{n+1})$$

für jedes Element p_n aus $\mathfrak{p}^n$, wo r ein passend gewähltes durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element bedeutet. Wäre nun $\mathfrak{q}$ ein Primärideal von der Art, dass $\mathfrak{p}^{(m)} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(m+1)}$ wäre, so müsste nach (1) $p_1^m \not\equiv 0$ $(\mathfrak{q})$, $p_1^{m+1} \equiv 0$ $(\mathfrak{q})$ sein. Für ein durch $\mathfrak{p}^{(m+1)}$ unteilbares Element q aus $\mathfrak{q}$ hätten wir aber nach (1) $rq \equiv 0$ $(p_1^m, \mathfrak{p}^{m+1})$, und folglich wäre $r_1p_1^m \equiv 0$ $(\mathfrak{q})$, wo r_1 ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element wäre. Also nach (1) wäre für jedes Element p_m aus $\mathfrak{p}^{(m)}$

(1) Nach E. Noether wird ein Primärideal $\mathfrak{q}$ „*stark*“ oder „*schwach*“ genannt, je nachdem $\mathfrak{q}$ eine Potenz seines zugehörigen Primideals enthält oder nicht.

$$\bar{r}p_m \equiv 0 \ (\mathfrak{q}),$$

wo $\bar{r}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares passend gewähltes Element wäre. Da $\mathfrak{q}$ aber primär wäre, müsste $\mathfrak{p}^{(m)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ sein, und wir haben einen Widerspruch mit der Annahme $\mathfrak{p}^{(m)} \supset \mathfrak{q}$. Danach ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Nun sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges starkes Primärideal. Dann ist

$$(2) \qquad \mathfrak{p}^{(\lambda)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q}), \qquad \mathfrak{p}^{(\lambda-1)} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{q})$$

für eine ganze Zahl λ. Ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{(\lambda)}$, so ist unsere Behauptung richtig. Im folgenden nehmen wir $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}^{(\lambda)}$ an und wir werden zeigen, dass wir zu einem Widerspruch gelangen. Da $\mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist, können wir eine ganze Zahl μ finden, so dass

$$(3) \qquad \mathfrak{q} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\mu)}), \qquad \mathfrak{q} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{(\mu+1)})$$

ist, wobei natürlich $\mu < \lambda$ ist. Sonst folgte $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{(\lambda)}$ aus (2) und (3). In $\mathfrak{q}$ können wir ein durch $\mathfrak{p}^{(\mu+1)}$ unteilbares Element q finden, und dann gilt für jedes Element p_μ aus $\mathfrak{p}^{(\mu)}$

$$(4) \qquad rp_\mu \equiv 0 \ (q, \mathfrak{p}^{\mu+1}),$$

wo r ein passend gewähltes durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element ist, da es nach dem soeben gewonnenen Resultate kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}^{(\mu)}$ und $\mathfrak{p}^{(\mu+1)}$ gibt. Es sei $p_{\lambda-1}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}^{(\lambda-1)}$, dann ist auch $r_1 p_{\lambda-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}^{\lambda-1})$ für ein geeignetes durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r_1. Also ist $r_1 p_{\lambda-1}$ also endliche Summe der Produkte der Elemente aus $\mathfrak{p}^{\lambda-\mu-1}$ und der Elemente aus $\mathfrak{p}^{\mu}$ darstellbar. Aus (1) und (4) erhalten wir danach $r' p_{\lambda-1} \equiv 0 \ (q p_1^{\lambda-\mu-1}, \mathfrak{p}^{\lambda})$ für jedes Element $p_{\lambda-1}$ aus $\mathfrak{p}^{(\lambda-1)}$, wobei r' ein passend gewähltes durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element ist. Aus (2) folgt daher $r' p_{\lambda-1} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ für jedes Element $p_{\lambda-1}$ aus $\mathfrak{p}^{(\lambda-1)}$. Da $\mathfrak{q}$ aber primär ist, erhalten wir leicht $\mathfrak{p}^{(\lambda-1)} \equiv 0 \ (\mathfrak{q})$ und folglich einen Widerspruch mit (2). Also ist der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit jedes Hauptideals als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale.

Wenn ein Primideal $\mathfrak{p}$ vom allgemeinen Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ kein echtes Primideal-vielfaches besitzt, so heisst $\mathfrak{p}$ ein *höchstes Primideal von* $\mathfrak{J}$.

Satz 4. *Es sei in $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale darstellbar. Dann ist die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(2)}$ jedes höchsten Primideals $\mathfrak{p}$ irreduzibel, und es gibt nur endlich viele verschiedene Idealquotienten $(p):\mathfrak{a}$ für irgendein festes Hauptideal (p), wenn $\mathfrak{a}$ alle Ideale aus $\mathfrak{J}$ durchlaüft, und zwar sind diese Idealquotienten immer durch ein höchstes Primideal teilbar oder gleich $\mathfrak{J}$.*

Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$ die höchsten Primideale, die zu (p) gehören, dann ist (p) als ein kürzester Durchschnitt von symbolischen Potenzen $\mathfrak{p}_i^{(a_i)}$ darstellbar, nämlich es ist

$$(1) \qquad (p) = [\mathfrak{p}_1^{(a_1)}, \mathfrak{p}_2^{(a_2)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n^{(a_n)}].$$

Zunächst nehmen wir an, dass für ein zu einem höchsten Primideal $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^{(2)}$ gelte. Dann wäre für ein durch $\mathfrak{p}^{(2)}$ unteilbares Element q aus $\mathfrak{q}$ die im Satze ausgesprochene Zerlegung des Hauptideals (q) wie bei (1) unmöglich. Demnach gibt es kein Primärideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^{(2)}$, und folglich muss $\mathfrak{p}^{(2)}$ nach Satz 2 irreduzibel sein.

Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges durch (p) teilbares Ideal, so ist offenbar $\mathfrak{J} = (p):\mathfrak{a}$. Im folgenden nehmen wir an, dass $\mathfrak{a}$ durch (p) unteilbar ist. Dann muss $\mathfrak{J} \neq (p):\mathfrak{a}$ sein, da $\mathfrak{J}$ das Einheitselement enthält. Setzen wir

$$(2) \qquad \mathfrak{a}_1 = (p):\mathfrak{a},$$

so ist $\mathfrak{a}_1$ gleich (p), oder ein von $\mathfrak{J}$ verschiedener echter Teiler von (p). Aus $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a} \equiv 0 \ (p)$, $\mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (p)$ folgt nach (1) $\mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_k^{(a_k)})$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a} \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_k^{(a_k)})$ für ein Primärideal aus $\mathfrak{p}_1^{(a_1)}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n^{(a_n)}$, etwa $\mathfrak{p}_k^{(a_k)}$. Da $\mathfrak{p}_k^{(a_k)}$ aber primär ist, muss $\mathfrak{a}_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_k)$ sein. Also ist die im Satz ausgesprochene letzte Behauptung richtig.

Nun seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m$ $(m \leqq n)$ alle Teiler von $\mathfrak{a}_1$ aus $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_n$, und es seien $\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m$ die zu $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m$ gehörigen isolierten Primärkomponenten(1) von $\mathfrak{a}_1$. Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{q}_m]$ ein Teiler von $\mathfrak{a}_1$ und ferner ist eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}_i$ durch $\mathfrak{q}_i$ teilbar, da ein Element q_i aus $\mathfrak{q}_i$ als Durchschnitt von symbolischen

(1) Die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}_i$ von $\mathfrak{a}_1$ ist das Ideal, das alle und nur die Elemente enthält, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Element aus $S_{\mathfrak{p}_i}$ in $\mathfrak{a}_1$ auftritt. Vgl. W. Krull, Idealtheorie, in Ringen ohne Endlichkeitsbedingung, Math. Annalen **101** (1929), 737.

Potenzen endlich vieler höchster Primideale wie bei (1) darstellbar ist. Ist d ein beliebiges Element aus $\mathfrak{d}$, so gibt es Elemente r_i von der Art, dass

$$dr_i \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1), \quad r_i \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \quad r_i \equiv 0 \ ([\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_n])$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Setzen wir nun $r = r_1 + \ldots + r_m$, so erhalten wir daraus

$$(3) \qquad dr \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1), \quad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i), \quad r \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j)$$
$$(i = 1, \ldots, m;\ j = m+1, \ldots, n).$$

Aus (2) und (3) folgt $(dr)\,\mathfrak{a} \equiv 0 \ (p)$. Ist $(d)\,\mathfrak{a} \equiv 0 \ (p)$ für alle Elemente d aus $\mathfrak{d}$, so ist nach (2) $\mathfrak{d} \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)$ und folglich ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1$. Ist $(d)\,\mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (p)$ für ein Element d aus $\mathfrak{d}$, so sind $\mathfrak{a}_1$ und (r) beide durch $\mathfrak{a}_1' = (p):(d\mathfrak{a})$ teilbar, und folglich ist $(r, \mathfrak{a}_1) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1')$. Nach (3) ist $\mathfrak{a}_1'$ damit durch keines aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ teilbar. Anderseits folgt aus $(d\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}_1' \equiv 0 \ (p)$, $(d)\,\mathfrak{a} \not\equiv 0 \ (p)$, dass $\mathfrak{a}_1'$ durch ein Primideal aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ teilbar ist, also erhalten wir einen Widerspruch mit dem oben gewonnenen Resultate. Hiermit muss $(d)\,\mathfrak{a} \equiv 0 \ (p)$ für alle Elemente d aus $\mathfrak{d}$ sein, es ist also

$$(4) \qquad \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{d} = [\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m].$$

Da dieses Primärideal $\mathfrak{q}_i$ aber einen endlichen Exponent hat, muss nach dem oben bewiesenen Resultate und Satz 3

$$(5) \qquad \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{p}_1^{(b_1)}, \ldots, \mathfrak{q}_m = \mathfrak{p}_m^{(b_m)},$$

wo $\mathfrak{p}_i^{(b_i)}$ die symbolische kleinste Potenz von $\mathfrak{p}_i$, welche gleich $\mathfrak{q}_i$ ist, bedeutet. Da $(p) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_1)$ ist, folgt aus (1)

$$(6) \qquad b_1 \leqq a_1, \ldots, b_m \leqq a_m.$$

Aus diesen Resultaten (4), (5) und (6) können wir leicht die Tatsache erhalten, dass die Anzahl der verschiedenen Idealquotienten $(p):\mathfrak{a}$ endlich ist, wenn $\mathfrak{a}$ alle Ideale aus $\mathfrak{J}$ durchlaüft. Unser Satz ist somit in allen Teilen vollständig bewiesen.

Satz 5. *Im allgemeinen Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ werden die folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *Ist (p) irgendein festes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$, so gibt es nur end-*

lich viele verschiedene Idealquotienten $(p):\mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *alle Ideale aus* $\mathfrak{J}$ *durchlaüft, und diese Idealquotienten sind stets durch ein höchstes Primideal teilbar oder gleich* $\mathfrak{J}$.

2. *Die symbolische Potenz* $\mathfrak{p}^{(2)}$ *jedes höchsten Primideals* $\mathfrak{p}$ *aus* $\mathfrak{J}$ *ist immer irreduzibel.*

Dann ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{J}$ *als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale darstellbar.*

Ist jedes Hauptideal (p) stets prim, so ist der Satz schon einleuchtend. Wir nehmen nun an, dass ein Hauptideal (p) nicht prim ist. Es sei also p_1 zu (p) nicht prim(1) und zwar durch (p) unteilbar, dann ist $\mathfrak{a}_1 = (p):(p_1)$ ein echter Teiler von (p) und von $\mathfrak{J}$ verschieden. Ist $\mathfrak{a}_1$ nicht prim, so können wir ausserhalb von $\mathfrak{a}_1$ ein Element p_2 finden, das nicht prim zu $\mathfrak{a}_1$ ist, und der Idealquotient $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1:(p_2) = (p):(p_1p_2)$ ist ein echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$ und von $\mathfrak{J}$ verschieden. Da es aber nur endlich viele verschiedene Idealquotienten von der Form $(p):\mathfrak{a}$ gibt, müssen wir nach endlichmaliger Wiederholung dieses Verfahrens zu einem von $\mathfrak{J}$ verschiedenen Primideal $\mathfrak{p} = (p):(p_1 \dots . p_m)$ gelangen. Nach unserer Voraussetzung 1 ist die Anzahl der von $\mathfrak{J}$ verschiedenen Primideale, die auf obige Weise gewonnen sind, endlich und ferner ist jedes dieser Primideale ein höchstes Primideal. Es seien nun $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ alle soeben bezeichnete Primideale. Dann muss jedes Element, das durch jedes aus $\mathfrak{p}_i$ unteilbar ist, zu (p) prim sein, sonst hätten wir auch ein von $\mathfrak{J}$ verschiedenes höchstes Primideal von der Form $(p):(p')$, das von jedem aus $\mathfrak{p}_i$ verschieden wäre. Anderseits sei $\mathfrak{q}_i$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von (p), und es sei d ein beliebiges Element vom Durchschnitt $[\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n]$. Dann können wir wie beim Beweise von Satz 4 ein Element r finden, so dass

$$dr \equiv 0 \ (p), \qquad r \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ist. Nach dem soeben ausgesprochenen Tatsache ist r zu (p) prim, also muss $d \equiv 0 \ (p)$ sein, und folglich erhalten wir die Darstellung

$$(p) = [\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n].$$

Um nun zum Hauptideal (p) die im Satz ausgesprochene Zerlegung zu finden, müssen wir noch ausserdem zeigen, dass die Primärkomponente $\mathfrak{q}_i$ von einem endlichen Exponent ist. Es sei p_1 ein beliebiges Element aus

(1) Ein Element p_1 heisst zu (p) „*nicht prim*", wenn ein durch (p) unteilbares Element r existiert, derart, dass $p_1 r$ in (p) auftritt.

$\mathfrak{p}_i$, das durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbar ist. Setzen wir $\mathfrak{a}_1 = (p):(p_1)$, so ist $\mathfrak{a}_1$ ein echter Teiler von (p), da eine endliche Potenz von p_1 durch $\mathfrak{q}_i$ teilbar ist. Nehmen wir wieder ein beliebiges durch $\mathfrak{q}_i$ unteilbares Element p_2 von $\mathfrak{p}_i$ aus, und setzen wir $\mathfrak{a}_2 = (p):(p_1p_2)$, so ist $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1:(p_2)$ und wir können zwei verschiedene Fälle $p_1p_2 \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$, und $p_1p_2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ betrachten. Im zweiten Fall ist $\mathfrak{a}_2$ ein von $\mathfrak{J}$ verschiedener echter Teiler von $\mathfrak{a}_1$. Denn wir können eine ganze Zahl $m\,(\geqq 2)$ finden, sodass $p_1p_2^{m-1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ $p_1p_2^m \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)$ ist, und daher folgt $rp_1p_2^m \equiv 0\ (p)$, $rp_1p_2^{m-1} \not\equiv 0\ (p)$ für ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element r. Nämlich ist es $rp_2^{m-1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{a}_1)$, $rp_2^{m-1} \equiv 0\ (\mathfrak{a}_2)$. Auf dieselbe Weise erhalten wir eine Kette von Idealquotienten

$$(p) \subset (p):(p_1) \subset (p):(p_1p_2) \subset \ldots.$$

Nach der im Satz gemachten Voraussetzung 1 muss die Reihe im Endlichen abbrechen, d. h. für ein gewisses k ist

$$p_1p_2\ldots.p_k \equiv 0\ (\mathfrak{q}_i)\,.$$

Diese Zahl k hängt von den gewählten Elementen ab, aber ist beschränkt nach unserer Voraussetzung 1. Damit folgt unmitterbar, dass $\mathfrak{q}_i$ von einem endlichen Exponent ist. Aus Sätzen 2, 3 und der Voraussetzung 2 erhalten wir danach die behauptete Darstellung von (p) durch endlich viele symbolische Potenzen höchster Primideale

$$(p) = [\mathfrak{p}_1^{(a_1)}, \ldots., \mathfrak{p}_n^{(a_n)}]\,.$$

Unser Satz ist damit voll bewiesen.

Es gilt also, wenn wir die vorhergehenden Schlüsse zusammenfassen, der

Hauptsatz. *Im Integritätsbereiche $\mathfrak{J}$ ist jedes Hauptideal dann und nur dann als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale darstellbar, wenn in $\mathfrak{J}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für irgendein festes Element p aus $\mathfrak{J}$ gibt es nur endlich viele verschiedene Idealquotienten von der Form $(p):\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a}$ alle Ideale aus $\mathfrak{J}$ durchlaüft, und jeder der Idealquotienten ist stets durch ein höchstes Primideal teilbar oder gleich $\mathfrak{J}$.*

2. *Die symbolische Potenz $\mathfrak{p}^{(2)}$ jedes höchsten Primideals $\mathfrak{p}$ ist immer irreduzibel.*

Über die Eindeutigkeit der Zerlegung der Hauptideale.

Zum Schlusse beachten wir noch die Eindeutigkeit der symbolischen Potenzen, welche in der bisher besprochenen Darstellung der Hauptideale auftreten. Aus der Eigenschaft der symbolischen Potenz eines höchsten Primideals folgt unmittelbar:

Sind $(p) = [\mathfrak{p}_1^{(a_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(a_n)}]$ *und* $(p) = [\mathfrak{p}_1'^{(b_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_m'^{(b_m)}]$ *zwei Darstellungen von* (p) *als kürzeste Durchschnitte von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale, so muss* $m = n$, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\mathfrak{p}_1^{(a_1)} = \mathfrak{p}_1'^{(b_1)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(a_n)} = \mathfrak{p}_n'^{(b_n)}$ *sein.*

Zu unserem Zwecke müssen wir damit den folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Es sei jedes Hauptideal aus* $\mathfrak{J}$ *als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale darstellbar. Dann sind die symbolischen Potenzen eines höchsten Primideals* $\mathfrak{p}$ *von einander verschieden.*

Zum Beweise nehmen wir $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)}$ an. Dann ist nach Satz 1 $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)} = \mathfrak{p}^{(m+2)} = \ldots$. Ist p ein von Null verschiedenes beliebiges Element aus $\mathfrak{p}^{(m)}$, so gibt es eine kürzeste Darstellung von (p) als Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale, nämlich $(p) = [\mathfrak{p}^{(m)}, \mathfrak{p}_2^{(m_2)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(m_n)}]$. Ist $(p) = \mathfrak{p}^{(m)}$, so ist auch $(p^2) = \mathfrak{p}^{(m)}$ und daraus folgt $p = ap^2$, wo a ein Element aus $\mathfrak{J}$ bedeutet. Das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{J}$ keinen Nullteiler besitzt, und $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{J}$ verschieden ist.(1) Im anderen Falle können wir ein Element p' in $\mathfrak{p}^{(m)}$ finden, so dass p' durch jedes Primideal aus $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ unteilbar ist. Da das Element pp' aber durch die höchsten Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ teilbar ist, erhalten wir nach der Annahme $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)} = \ldots$

$$(pp') = [\mathfrak{p}^{(m)}, \mathfrak{p}_2^{(m'_2)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(m'_n)}, \mathfrak{p}_{n+1}^{(m'_{n+1})}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{(m'_s)}].$$

Aus der Eigenschaft von p', dass p' durch jedes Primideal aus $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ unteilbar ist, folgt $\mathfrak{p}_2^{(m'_2)} = \mathfrak{p}_2^{(m_2)}, \ldots, \mathfrak{p}_n^{(m'_n)} = \mathfrak{p}_n^{(m_n)}$, $(pp') = [(p), \mathfrak{p}_{n+1}^{(m'_{n+1})}, \ldots, \mathfrak{p}_s^{(m'_s)}]$. Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r_1 erhalten wir danach $r_1 p = cpp'$ oder $(r_1 - cp')p = 0$, wo c ein Element aus $\mathfrak{J}$ bedeutet. Da $\mathfrak{J}$ keinen Nullteiler besitzt, ergibt sich daraus der Widerspruch $r_1 \equiv 0 \ (\mathfrak{p})$. Also ist unsere Annahme $\mathfrak{p}^{(m)} = \mathfrak{p}^{(m+1)}$ falsch, und unser Satz ist bewiesen.

---

(1) Ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{J}$, so ist jedes Hauptideal gleich $\mathfrak{J}$, also ist $\mathfrak{J}$ ein Körper.

Aus Satz 6 ergibt sich leicht:

Satz 7. *Ist jedes Hauptideal aus* $\mathfrak{J}$ *als kürzester Durchschnitt von symbolischen Potenzen endlich vieler höchster Primideale darstellbar, so ist eine solche Darstellung jedes Hauptideals eindeutig bestimmt.*