Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables.

II—Domaines d'holomorphie.

Par

Kiyosi OKA.

(Reçu Décembre 10, 1936.)

Introduction.—J'ai traité dans le mémoire précédent[1] le sujet de domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles. J'examinerai maintenant la même question concernant les fonctions holomorphes ; et ceci sera fait en appliquant la même idée, c'est-à-dire, en passant aux espaces supérieurs.

Dans l'espace de plusieurs variables complexes, étant donnée une région univalente bornée et convexe par rapport à un nombre fini de fonctions holomorphes, on en construit la multiplicité Σ dans un espace supérieur, d'après le procédé adopté précédemment. C'est pour cette multiplicité Σ que nous observerons précisément le mode de convexité.

Al'aide des théorèmes établis dans le mémoire précédent, nous trouverons comme conséquence que la multiplicité Σ est en quelque sorte convexe par rapport aux polynômes. (Voir le théorème I du No. 4). A notre avis, ceci est un fait fondamental en ce qui concerne les domaines d'holomorphie.

D'où, en vertu d'un théorème bien connu de MM. H. Cartan et P. Thullen,[2] on pourra facilement donner à un des problèmes non résolus[3] de la théorie du titre la solution affirmative ; à savoir que le théorème de M. P. Cousin concernant les pôles donnés reste valable pour les domaines d'holomorphie, univalents et bornés.

---

(1) Ce journal, **6** (1936).

(2) Mémoire cité précédemment.

(3) Voir l'Ouvrage de MM. H. Behnke et P. Thullen, 68, cité précédemment.

1. Généralités.[1]—Considérons l'espace $((x))$ engendré par n variables complexes, $x_1, x_2, \ldots, x_n$; et dans lequel nous allons d'abord donner quelques définitions. *Une région sera dite appartenir à la classe* (P_0), si l'on peut la définir comme l'ensemble de points satisfaisant à

$$|x_i| < r_i, \qquad |P_j((x))| < 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

r_i étant des constantes positives, et $P_j((x))$ des polynômes des x_i.

Nous dirons qu' *un ensemble fermé F appartient à la classe* (P_1), si l'on peut trouver dans la classe (P_0) une suite décroissante de régions ayant F pour limite.

Etant donné un ensemble borné E, considérons la partie commune, $\mathfrak{E}$, de tous les ensembles de la classe (P_1) qui contiennent E; nous l'appellerons *le plus petit ensemble de la classe* (P_1) *contenant* E, puisque $\mathfrak{E}$ *appartient enore à la classe* (P_1).

En effet, $\mathfrak{E}$ est nécessairement un ensemble fermé. Soit (C) un polycylindre comprenant l'ensemble donné E et ses points d'accumulation; soit F un ensemble de la classe (P_1) qui est contenu dans (C) et qui contient E, mais d'ailleurs quelconque; $\mathfrak{E}$ se présente alors comme partie commune de tous les F. Pour tout nombre positif ρ, formons l'ensemble A comprenant les points du polycylindre (C) et ses points frontières, pour lesquels la distance à $\mathfrak{E}$ sera $\geqq \rho$; A est nécessairement un ensemble fermé.

Soit M un point quelconque de A; comme M est un point extérieur pour certain F, on peut trouver un polynôme $P((x))$ de façon que l'on ait:

$$|P((x))| > 1$$

dans un cercle (γ) suffisamment petit de centre M, et que

$$|P((x))| < 1$$

sur $\mathfrak{E}$; alors, à l'aide du lemme de Borel-Lebesque, on peut recouvrir A avec un nombre fini de tels cercles (γ); soit $P_j((x))$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$, les polynômes correspondants; considérons une région D de la forme

$$((x)) \in (C), \qquad |P_j((x))| < 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

---

(1) Dans la suite, un ensemble ouvert sera appelé domaine ou région distinctivement, suivant qu'il est certainement connexe ou non; pour simplifier le langage on sous-entendra que les régions (domaines) sont toujours univalentes et bornées, sauf dans le cas ou la réciproque sera énoncée.

La région D, qui appartient évidemment à la classe (P_0), recouvre $\mathfrak{E}$, sans l'être pour tout point ayant la distance $> \rho$ par rapport à E; et ceci, quelque soit ρ. L'ensemble $\mathfrak{E}$ appartient donc à la classe (P_1).

C. Q. F. D.

Soit E un ensemble borné quelconque dans l'espace $((x))$, et $\mathfrak{E}$ le plus petit ensemble de la classe (P_1) contenant E; soit (σ_t) une famille de surfaces caractéristiques[1] *de la forme,*

$$(\sigma_t) \qquad f((x), t) = 0\,, \qquad ((x)) \in U\,, \qquad 0 \leqq t \leqq 1\,,$$

U étant un domaine de l'espace $((x))$, $f((x), t)$ une fonction uniforme des variables x_i et t définie sur $((x)) \in U$, $0 \leqq t \leqq 1$, holomorphe en tout point de l'ensemble et telle que pour toute valeur t de l'intervalle $f((x), t)$ ne s'annule pas identiquement. *Ils ne peuvent jamais s'associer de telle façon que :*

1° pour toute caractéristique de la famille, sa frontière n'intervienne pas dans un voisinage V de $\mathfrak{E}$;

2° aucune des caractéristiques ne passe par E, ni par ses points d'accumulation;

3° la caractéristique (σ_0) passe par un point de $\mathfrak{E}$, tandis que (σ_1) reste à l'extérieur de V.

En effet, supposons une famille (σ_t) de cette nature. On peut alors trouver un domaine T sur le plan t contenant le segment $(0,1)$ et appartenant à la classe (P_0) du plan, de façon que toutes les circonstances restent invariables, quand on passe du segment $(0,1)$ au domaine T; du moins en rapetissant toujours un peu les régions données U et V. On peut d'ailleurs considérer que la région V appartient à (P_0) de l'espace $((x))$ puisque $\mathfrak{E}$ est un ensemble de (P_1). La région (V, T) ainsi construite appartenant à (P_0) dans l'espace $((x), t)$, on peut y trouver une fonction méromorphe $G((x), t)$ des variables x_i et t admettant $1/f((x), t)$ pour pôles, grcâe au théorème I du mémoire précédent.

Soit (σ_α) la dernière caractéristique qui passe par des points de $\mathfrak{E}$, t traçant le segment de 0 à 1, et M un des points de $\mathfrak{E}$ sur cette caractéristique. Lorsque t tend vers α le long du segment $(\alpha, 1)$, la valeur $G(M, t)$ augmente indéfiniment, puisque la fonction $G((x), t)$ possède nécessairement le point (M, α) comme pôle; d'un autre côté, la

(1) Pour la surface caractéristique (charakteristische Flächenstück), voir l'Ouvrage cité de MM. Behnke et Thullen, 24.

fonction $G((x), t)$ étant régulière en tout point de $[E, (0, 1)]$ ainsi qu'aux points d'accumulation, elle y est bornée; de là, on peut choisir une valeur β près de α sur le segment $(\alpha, 1)$, de telle manière que

$$\max | G(E, \beta) | < | G(M, \beta) | ,$$

le premier membre signifiant la borne supérieure de $| G((x), \beta) |$ sur E.

Or, comme la fonction $G((x), \beta)$ est régulière en tout point de l'ensemble fermé $\mathfrak{E}$ appartenant à la classe (P_1) de l'espace $((x))$, d'après ce que l'on a etudié au mémoire précédent,[1] on peut la développer en série de polynômes dans le voisinage de $\mathfrak{E}$; d'où, découle l'existence d'un polynôme $\Phi((x))$ des x_i, tel que

$$\max | \Phi(E) | < | \Phi(M) | ;$$

ce qui est contradictoire, car E est le minimum. La famille du caractère ne peut donc pas exister. C. Q. F. D.

Remarque.—Dans ce qui précéde, en remplaçant les polynômes par les fonctions rationnelles, on pourra définir les classes (R_0) et (R_1) et le plus petit ensemble de la classe (R_1). On pourra aussi constater, sans modifier le mode de raisonnement, que le dernier jouit de la propriété ci-dessus.

2. Classe (H_0). Fonctions $R_j(x_1)$.—Considérons dans une région $\mathfrak{G}$ (univalente et bornée) à l'espace $((x))$ ν fonctions holomorphes $f_j((x))$ des variables x_i, grâce auxquelles nous formons l'ensemble de points Δ de telle manière que

$$(\Delta) \qquad | x_i | \leqq r_i , \qquad | f_j((x)) | \leqq 1 , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n ; j = 1, 2, \ldots, \nu),$$
$$((x)) \in \mathfrak{G} ,$$

r_i étant des constantes positives; nous convenons d'ailleurs qu' aucun des points d'accumulation de Δ n'est situé sur la frontière de $\mathfrak{G}$, autrement dit que Δ est un ensemble fermé. Cet ensemble fermé Δ, qui correspond à la région Δ du mémoire précédent, sera dit, appartenir à *la classe* (H_0).

Comme dans le cas précédent, en introduisant de nouveau ν variables

(1) Voir No. 4, où nous avons exposé une proposition dans un domaine; mais, comme nous n'avons jamais émis l'hypothèse de la connexion pour la démonstration, la proposition reste valable pour les régions.

complexes y_j, construisons dans l'espace $((x, y))$ l'ensemble fermé Σ de la forme,

$$(\Sigma) \qquad y_j = f_j((x)), \qquad ((x)) \in \Delta, \qquad (j=1,2,\dots,\nu);$$

on retrouvera alors que toute la frontière de la multiplicité Σ se pose sur celle du polycylindre

$$|x_i| < r_i, \qquad |y_j| < 1.$$

Nous considérons dans le nouvel espace $((x, y))$ le plus petit ensemble, $\mathfrak{A}$, de la classe (P_1) contenant Σ, et nous lui appliquerons la proposition générale que nous venons d'établir ; d'abord, il est évident que $\mathfrak{A}$ est contenu dans le polycylindre fermé $|x_i| \leqq r_i$, $|y_j| \leqq 1$.

Soit $\mathfrak{B}$ *l'image de* $\mathfrak{A}$ *projetée sur l'espace* $((x))$,(1) et $\mathfrak{C}$ celle qui est projetée sur le plan x_1 ; $\mathfrak{A}$ étant un ensemble fermé, il en est de même pour $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$. Formons *la section de* $\mathfrak{B}$ *par le plan caractéristique* $x_1 = x_1'$ (*constante*) que nous considérons comme ensemble de points dans l'espace $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ et qui sera désignée par Bx_1',(2) Bx_1' est un ensemble fermé ; soit Gx_1' celle de $\mathfrak{G}$, Gx_1' est un ensemble ouvert ; marquons sur le plan x_1 l'ensemble Ω comprenant les points x_1' pour chacun desquels Bx_1' a au moins un point de l'espace $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ en dehors de Gx_1'. $\mathfrak{B}$ étant un ensemble fermé et $\mathfrak{G}$ un ensemble ouvert, l'ensemble Ω, s'il existe, est nécessairement fermé, soit (ω) la région du plan x_1, ayant les points de Ω et le point à l'infini à son extérieur ou sur sa frontière, mais comprenant tous les autres points.

Dans la région (ω) ainsi acquise, nous définirons les fonctions réelles $R_j(x_1)$ de la variable x_1 $(j=1,2,\dots,\nu)$ comme suit : Si x_1 n'est pas sur $\mathfrak{C}$, nous posons

$$R_j(x_1) = 0.$$

Soit ensuite x_1^0 un point de $\mathfrak{C}$ dans (ω) ; soit $(x_1^0, \xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu)$ un point de $\mathfrak{A}$ pour lequel $x_1 = x_1^0$, mais d'ailleurs quelconque ; x_1^0 étant un point de (ω), $(x_1^0, \xi_2, \dots, \xi_n)$ se situe nécessairement dans $\mathfrak{G}$, d'après la définition même ; par conséquent, les fonctions $f_j((x))$ étant bien définies pour ce point-ci, nous posons

(1) Ce qui vent dire que, à tout point $((x'))$ de $\mathfrak{B}$ correspond au moins un point $((x, y))$ de $\mathfrak{A}$ tel que $((x)) = ((x'))$, et réciproquement.

(2) Cela signifie que, si $(x_2', x_3', \dots, x_n')$ est un point de Bx_1', le point $((x'))$ appartient nécessairement à $\mathfrak{B}$; et dans le cas contraire, il ne lui appartient pas.

$$R_j(x_1^0) = \max |\, \eta_j - f_j(x_1^0, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n) \,|\,,$$

$$(x_1^0, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n;\ \eta_1, \ldots\ldots, \eta_\nu) \in \mathfrak{A}\,.$$

Nous allons montrer que les fonctions $R_j(x_1)$ jouissent de la propriété suivante:

$R_j(x_1)$ sont les fonctions logarithmiquement subharmoniques.[1]

En effet, prenons la fonction $R_1(x_1)$ pour fixer l'idée. Nous commençons par montrer que $\log R_1(x_1)$ est semi-continue supérieurement; pour cela il suffit de le constater pour $R_1(x_1)$ même; et dans ce but il sera suffisant de l'affirmer sur $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}'$ étant la portion de $\mathfrak{C}$ contenue dans la région (ω). Soit donc x_1^0 un point de $\mathfrak{C}'$ quelconque; et soit

$$x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots\ldots, x_1^{(p)}, \ldots\ldots$$

une suite de points de $\mathfrak{C}'$ tendant vers x_1^0 et telle que

$$\lim R_1(x_1^{(p)}) = \alpha$$

dont α est une constante, mais d'ailleurs quelconque; il nous suffira alors de montrer que

$$\alpha \leqq R_1(x_1^0)\,.$$

Or, à tout $x_1^{(p)}$ de la suite, correspondra au moins un point M_p, $((x^{(p)}, y^{(p)}))$ de $\mathfrak{A}$ tel que

$$R_1(x_1^{(p)}) = |\, y_1^{(p)} - f_1((x^{(p)})) \,|\,;$$

et on aura la nouvelle suite de points

$$M_1, M_2, \ldots\ldots, M_p, \ldots\ldots;$$

soit M_0, $((\xi, \eta))$ un de ses points limites; on a alors $\xi_1 = x_1^0$; en outre, $\mathfrak{A}$ étant fermé, M_0 fait partie de $\mathfrak{A}$; de là, en faisant tendre $x_1^{(p)}$ vers x_1^0, il s'ensuit que

(1) C'est-à-dire que $\log R_j(x_1)$ sont les fonctions subharmoniques, les logarithmes étant naturellement réels. On appelle fonction subharmonique de la variable complexe z toute fonction $\varphi(z)$ réelle semi-continue supérieurement bornée supérieurement dans l'intérieur au domaine d'existence et telle que, traçant un cercle à l'intérieur du domaine d'existence, la moyenne arithmétique de $\varphi(z)$ prise au sans de M. Lebesque sur la circonférence, est plus grande que ou égale à la valeur au centre. Parmi les fonctions de cette espèce, nous conviendrons de compter la constante $-\infty$. Pour les fonctions subharmoniques, voir l'Ouvrage de M. G. Julia: Principes géométriques d'analyse, t. II.

$$\alpha = |\,\eta_1 - f_1(x_1^0, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,| \leqq R_1(x_1^0)\,;$$

$R_1(x_1)$ est donc semi-continue supérieurement.

Il s'agit maintenant des majorantes harmoniques de la fonction $\log R_1(x_1)$, le logarithme étant réel. Supposons un cercle (γ),

$$|\,x_1 - x_1^0\,| < \rho\,,$$

à l'intérieur du[1] domaine d'existence, tel que la moyenne arithmétique prise au sens de M. Lebesque sur la circonférence γ soit plus petite que la valeur au centre, pour la fonction $\log R_1(x_1)$; il nous suffira de conduire cette hypothèse à une contradiction. Or, dans cette circonstance, à l'aide de l'intégrale de Poisson, on pourra facilement trouver une fonction holomorphe $\Psi(x_1)$ de la variable x_1 dans le cercle, ayant le module uniforme continu et non nul sur $|\,x_1 - x_1^0\,| \leqq \rho$, et telle que

$$R_1(x_1)\,|\,\Psi(x_1)\,| < 1$$

pour tout x_1 de la circonférence, tandis qu' au centre

$$R_1(x_1^0)\,|\,\Psi(x_1^0)\,| = 1\,.$$

Avec cette fonction $\Psi(x_1)$, formons la famille de caractéristiques

$$(\sigma_t) \qquad [y_1 - f_1((x))]\cdot\Psi(x_1) = e^{i\theta}(1+t)\,,$$

$$|\,x_1 - x_1^0\,| < \rho\,, \qquad ((x)) \in \mathfrak{G}\,, \qquad 0 \leqq t < +\infty\,,$$

θ étant un certain argument que l'on déterminera plus tard, et $i = \sqrt{-1}$; on voit que les deux membres de l'équation sont les fonctions holomorphes des $n+1$ variables x_i et t en chacun des points indiqués ; pour cette famille (σ_t), nous allons examiner successivement les conditions formulées au No. 1 :

1°. Observons les frontières des caractéristiques ; il y en a de deux espèce, l'une est sur la frontière de $\mathfrak{G}$ et l'autre sur $|\,x_1 - x_1^0\,| = \rho$; commençons par la première. Le cercle fermé $|\,x_1 - x_1^0\,| \leqq \rho$ a été tracé dans la région (ω), la partie de $\mathfrak{B}$ dans le cercle fermé est contenue dans $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ étant l'image de $\mathfrak{A}$ projetée sur l'espace $((x))$; par suite, si l'on prend une région V contenant $\mathfrak{A}$ et suffisamment voisine de $\mathfrak{A}$, la frontière de $\mathfrak{G}$ sera située entièrement à l'extérieur de V ; il en est

(1) Nous disons que quelque condition est remplie à l'intérieur d'une certaine région, s'il en est ainsi pour tout ensemble fermé contenu dans la région.

donc de même pour les frontières considérées des (σ_t). Quant à la deuxième, comme pour tout point $((\xi, \eta))$ de $\mathfrak{A}$ sur $|x_1 - x_1^0| = \rho$ on a

$$|\eta_1 - f_1((\xi))|\ |\Psi(\xi_1)| < 1,$$

en choisissant V suffisamment près de $\mathfrak{A}$, on peut faire que toutes les frontières en question restent en dehors de V.

2°. Pour tout t de l'intervalle $0 \leqq t < +\infty$, la caractéristique (σ_t) ne passe jamais par Σ, puisque Σ se pose entièrement sur la caractéristique $y_1 - f_1((x)) = 0$.

3°. Comme $R_1(x_1^0)$ est nécessairement positive d'après l'hypothèse, le centre x_1^0 doit être sur $\mathfrak{C}$; on peut trouver par suite un point $((x^0, y^0))$ de $\mathfrak{A}$ pour lequel on ait

$$|y_1^0 - f_1((x^0))| = R_1(x_1^0),$$

et par conséquent

$$|y_1^0 - f_1((x^0))|\ |\Psi(x_1^0)| = 1;$$

on peut donc choisir l'argument θ tel que la caractéristique (σ_0) passe par le point $((x^0, y^0))$ de $\mathfrak{A}$. D'un autre côté, dans l'équation (σ_t), on peut regarder la fonction $f_1((x))$ comme étant bornée dans la région considérée, puisque ceci est toujours atteint en prenant une région en peut plus petite que $\mathfrak{G}$, si l'on en a besoin; alors, à partir d'une certaine valeur du paramètre, aucune des caractéristique (σ_t) n'interviendra dans V.

On peut ainsi construire une famille de caractéristiques remplissant toutes les conditions formulées; ceci contredit la proposition générale; la fonction $R_1(x_1)$ est donc logarithmiquement subharmonique; et les autres fonctions également. C. Q. F. D.

Partageons la région (ω) en composantes connexes comme

$$(\omega_1), (\omega_2), \ldots\ldots, (\omega_i), \ldots\ldots;$$

dans chacune desquelles les fonctions $R_j(x_1)$ sont logarithmiquement subharmoniques; *supposons qu' un de ces domaines,* (ω_1) *par exemple, contienne un point extérieur de* $\mathfrak{C}$; *toutes les fonctions* $R_j(x_1)$ *s'annulent* alors au voisinage du point d'après la définition même, et par conséquent *identiquement dans* (ω_1), puisque elles sont logarithmiquement subharmoniques.

Remarquons d'ailleurs que, *si pour un point* x_1^0 *de* $\mathfrak{C}$ *contenu dans* (ω), *toutes les* ν *fonctions* R_j *sont nulles, on a nécessairement*

$$Ex_1^0 = Ax_1^0 ,$$

où Ex_1^0 et Ax_1^0 représentent, les sections par $x_1 = x_1^0$ de Σ et $\mathfrak{A}$, respectivement. En effet, sinon, l'ensemble Ax_1^0 possederait à l'extérieur de Ex_1^0 au moins un point $(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_\nu^0)$; or, x_1^0 étant dans (ω), $((x^0))$ appartient à $\mathfrak{G}$; d'un autre côté ce point est en dehors de Δ, car, toutes les R_j s'annulant à x_1^0, si $((x^0))$ était un point de Δ, le point $(x_2^0, \ldots, y_\nu^0)$ appartiendrait à Ex_1^0 ; dans ces conditions, de la définition de Δ il s'ensuit qu' une au moins des fonctions, soit $f_1((x))$ pour fixer l'idée, admet le module plus grand que 1 pour $((x^0))$; de là, comme $R_1((x_1^0)) = 0$, on a $y_1^0 = f_1((x^0))$; et par suite $|y_1^0| > 1$; ceci est absurde ; car, comme nous l'avons remarqué plus haut, $\mathfrak{A}$ est nécessairement contenu dans $|x_i| \leqq r_i$, $|y_j| \leqq 1$; il faut donc que $Ex_1^0 = Ax_1^0$.

3. Proposition préliminaire.—Nous allons observer dans la suite la frontière de la région (ω) ; et pour cela, nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

Soit $\varphi(x)$ une fonction subharmonique de la variable complexe x. Si l'on fait parcourir au point x une courbe simple de Jordan L dans l'intérieur du domaine d'existence aboutissant à un point ξ, on aura toujours pour limite

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) = \varphi(\xi) , \qquad (x \neq \xi) .^{(1)}$$

En effet, décrivons deux cercles concentriques (γ) et (C) de centre ξ, dont (γ) est intérieur, dans l'intérieur au domaine d'existence de $\varphi(x)$. Supposons que, le point x traçant la courbe L à partir de ξ, ce point rencontre la circonférence γ dernièrement au point b, et la circonférence extérieure C premièrement au point B ; soit l l'arc de la courbe de b jusqu'a B ; et D le domaine ayant l et C comme frontière ; ce domaine est simplement connexe ; représentons-le couformément sur $|y| < 1$ de façon que le point ξ corresponde à l'origine du plan y, dont la transformation sera désignée par

$$x = F(y) .$$

(1) Nous avons supposé ici la courbe simple de Jordan ; mais ceci est seulement pour la simplicité ; la proposition restera légitime pour toute courbe continue tendant uniquement vers ξ ; et dont la démonstration sera faite également, à l'aide des théorèmes bien connus dûs à MM. Fatou et Lebesque.

Supposons que (C) est le cercle d'unité pour simplifier l'écriture, et (γ) de rayon ρ. La fonction $\frac{F(y)}{y}$ est alors holomorphe et non nulle dans le cercle d'unité, elle prend la valeur $F'(0)$ à l'origine; de plus, le module de la fonction reste uniforme et continu jusq' à la circonférence, il ne s'y annule pas non plus; par conséquent la moyenne arithmétique de la fonction réelle $\log |F(y)|$ sur $|y|=1$ est égale à $\log |F'(0)|$. D'où, en désignant par $2\pi\alpha$ la longueur de l'arc sur $|y|=1$ correspondant à l'arc l du plan x, on obtient

$$\rho^{\alpha} < |F'(0)|.$$

D'un autre côté, grâce au théorème de M. Koebe, on a

$$\rho \geqq k |F'(0)|,$$

k étant une certaine constante positive; on a par suite

$$\rho^{(1-\alpha)} \geqq k;$$

on trouve donc que, *lorsque* ρ *tend vers* 0, α *tend nécessairement vers* 1.

Comme la fonction $\varphi(x)$ est semi-continue supérieurement sur $|x| \leqq 1$, elle y est bornée supérieurement; soit M la borne supérieure; et soit N celle sur l'arc de la courbe L de B à l'origine, l'origine étant exclue. Considérons la fonction

$$\varphi[F(y)];$$

elle est subharmonique dans $|y| < 1$, et uniforme et semi-continue supérieurement sur $|y| \leqq 1$, si l'on compare la moyenne sur la circonférence et la valeur au centre, on aura

$$\alpha N + (1-\alpha) M \geqq \varphi(0).$$

De là, en faisant tendre γ vers l'origine, on obtient

$$N \geqq \varphi(0);$$

d'où, il s'ensuit que

$$\overline{\lim}\, \varphi(x) \geqq \varphi(0),$$

dont la limite est considérée le long de la courbe L, $(x \neq 0)$. Dans la relation ainsi acquise, c'est l'égalité seule qui se présente effectivement, puisque $\varphi(x)$ est semi-continue supérieurement. C. Q. F. D.

Remarquons d'ailleurs que *toute fonction logarithmiquement sub-*

harmonique est elle-même subharmonique.[1] La proposition ci-dessus est donc applicable aux fonctions des deux espèces.

4. THÉORÈME I.—*Etant donné dans l'espace* $((x))$ *un ensemble* Δ *de la classe* (H_0), *on en construit dans l'espace supérieur* $((x, y))$ *la multiplicité* Σ *d'après la méthode de No. 2, elle appartient alors à la classe* (P_1) *du nouvel espace.*

Autrement dit, nous allons montrer que

$$\Sigma = \mathfrak{A};$$

et ceci sera fait d'après le procédé de récurrence par rapport à λ, λ étant la moitié du nombre de dimensions de l'espace initial $((x))$. Nous commençons par constater que le théorème reste légitime pour $\lambda = n$ $(n \geqq 2)$ en admettant l'hypothèse que ce soit vrai pour tout $\lambda < n$.

D'après ce que nous avons vu au No. 2, il suffit pour cela de montrer que la région (ω) comprend tout point fini du plan x_1; supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi; toutes les composantes connexes (ω_i) de la région posséderont alors leurs propres points frontières à distance finie; parmi elles il en existe au moins une qui contient des points extérieurs de $\mathfrak{C}$; soit (ω_1) un domaine de la nature, et ξ un de ses points frontières finis.

Je dis que E_ξ existe actuellement, (E_ξ étant la section de Σ par $x_1 = \xi$). En effet, ou bien ξ est un point intérieur de $\mathfrak{C}$; alors, ce point sera la limite d'une suite de points faisant partie de $\mathfrak{C}$ et de (ω_1) à la fois; pour tout x_1 de la suite, comme $Ex_1 = Ax_1$ et dont Ax_1 (la section de $\mathfrak{A}$ par $x_1 =$ constante x_1) possède nécessairement un point au moins, Ex_1 existe aussi; par suite E_ξ existe effectivement puisque Σ est un ensemble fermé. Ou bien ξ est un point frontière de $\mathfrak{C}$; dans ce cas, si E_ξ était l'ensemble nul, il en serait, de même pour tout x, dans le voisinage de ξ puisque Σ est fermé; alors, d'après ce que l'on a vu sur les développements, on pourrait former aisément un polynôme par rapport à x_i, y_j contre ce que $\mathfrak{A}$ est le plus petit. E_ξ existe donc toujours.

Le point ξ étant sur Ω, l'ensemble (ξ, A_ξ) admet d'après la définition un point au moins en dehors de la région $[\mathfrak{G}, |y_j| < \infty]$, $(j = 1, 2, \ldots, \nu)$,

(1) Ceci sera vérifié facilement en comparant les fonctions majorantes, dont le point essentiel est celui-ci: si $u(x)$ est harmonique par rapport à x, $e^{u(x)}$ sera subharmonique.

tandis que cette région comprend Σ; on peut donc trouver un point M de A_ξ à l'extérieur de E_ξ. Or, on reconnaîtra sans difficulté que l'ensemble E_ξ dans l'espace $(x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ est de la même nature que Σ en question; par conséquent E_ξ appartient à la classe (P_1) de cet espace, d'après l'hypothèse; on peut donc trouver une région $D\alpha$ de la forme

$$(D\alpha) \qquad |P_i| < \alpha, \qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

P_i étant le polynôme des x_i, y_j, $(i=2,3,\ldots,n; j=1,2,\ldots,\nu)$, et α une constante positive, de façon que D_a contienne E_ξ, sans contenir le point M.

La région $D\alpha$, comprenant tous les points remplissant les inégalités, changera de manière continue avec le paramètre α. Considérons une autre valeur positive β du paramètre tel que

$$\beta < \alpha,$$

et un cercle (γ) de centre ξ sur le plan x_1. En prenant $D\alpha$ et D_β suffisamment voisin de E_ξ, et (γ) suffisamment petit, nous pouvons leur faire remplir les conditions suivantes:

$$[(\gamma), D\alpha] < [\mathfrak{G}, |y_j| < \infty], \qquad (j=1,2,\ldots,\nu),$$
$$[(\gamma), Ex_1] < [(\gamma), D_\beta];$$

dont la première relation vient du fait que son deuxième membre comprend (ξ, E_ξ) qui existe effectivement. Dans cette circonstance, formons la fonction $\varphi(x_1)$ pour le cercle (γ) de manière que

$$\varphi(x_1) = \max[\beta, \max|P_i(Ax_1)|], \qquad (i=1,2,\ldots,m).$$

sur $\mathfrak{C}$; et à l'extérieur de $\mathfrak{C}$

$$\varphi(x_1) = \beta.$$

Nous allons montrer *que $\varphi(x_1)$ est logarithmiquement subharmonique.* En effet, $\varphi(x_1)$ est semi-continue supérieurement; car, dans la définition de la fonction, Ax_1 est la section d'un ensemble fermé et les bornes qui y interviennent sont seulement les bornes supérieures.

Cela étant, supposons que $\varphi(x_1)$ n'est pas logarithmiquement subharmonique; on peut trouver alors dans (γ) un autre cercle fermé

$$|x_1 - x_1^0| \leqq \rho,$$

tel que la moyenne de $\log \varphi(x_1)$ sur la circonférence soit plus petite que $\log \varphi(x_1^0)$; de là on peut construire à l'aide de l'intégrale le Poisson une fonction holomorphe $\Psi(x_1)$ de la variable x_1 dans le cercle $|x_1-x_1^0|<\rho$, ayant le module uniforme continu et non nul jusqu'à la circonférence, de tell manière que la valeur

$$\varphi(x_1)\,|\,\Psi(x_1)\,|$$

soit plus petite que 1 sur la circonférence et égale à 1 au centre x_1^0. $\varphi(x_1)$ étant toujours au moins égale à β, on a

$$|\,\Psi(x_1)\,|<\frac{1}{\beta}$$

sur la circonférence, est par conséquent dans le cercle aussi. Au centre x_1^0, comme il faut d'après l'hypothèse que $\varphi(x_1^0)>\beta$, $\varphi(x_1^0)$ est représentée par une des autres quantités que β ; pour fixer l'idée nous supposerons que

$$\varphi(x_1^0)=\max\,|\,P_1(Ax_1^0)\,|\,.$$

Dans ces conditions, formons la famille de caractéristiques

$$(\sigma_t) \qquad P_1\Psi(x_1)=e^{i\theta}(1+t)\,,$$

pour

$$|\,x_1-x_1^0\,|<\rho\,, \qquad 0\leqq t<+\infty\,,$$

θ étant un argument qui sera déterminé plus tard et $i=\sqrt{-1}$. Pour toute valeur fixée t de l'intervalle, la caractéristique (σ_t) ne possède de point frontière à distance finie que sur l'ensemble de points $|x_1-x_1^0|=\rho$; et auquel, $\varphi(x_1)\,|\,\Psi(x_1)\,|$ étant plus petite que 1, on a particulièrement sur $\mathfrak{A}$,

$$|\,P_1\Psi\,|<1\,;$$

ceci montre qu' aucune caractéristique de la famille n'admet de point frontière dans un voisinage de $\mathfrak{A}$. Toute caractéristique de la famille ne passe pas par Σ, puisque dans le cercle fermé, on a simultanément

$$\max\,|\,P_1(Ex_1)\,|<\beta\,, \qquad |\,\Psi(x_1)\,|<\frac{1}{\beta}\,.$$

D'un autre côté pour $x_1=x_1^0$, comme

$$\max\,|\,P_1(Ax_1^0)\,|\;|\,\Psi(x_1^0)\,|=1\,,$$

la caractéristique (σ_0) rencontrera $\mathfrak{A}$, si l'on choisit l'argument θ convenablement. On trouve d'ailleurs que pour toute valeur du paramètre suffisamment grande, (σ_t) se situe entièrement en dehors d'un certain voisinage de $\mathfrak{A}$. Ce que nous avons vu est en contradiction avec la proposition du No. 1, puisque $\mathfrak{A}$ est le plus petit. $\varphi(x_1)$ est donc logarithmiquement subharmonique dans le cercle (γ).

Considérons maintenant dans le cercle (γ) l'ensemble de points (e) satisfaisant à

$$\varphi(x_1) \geqq \alpha\,;$$

$\varphi(x_1)$ étant semi-continue supérieurement, tout point d'accumulation de (e) contenu dans le cercle appartient encore à (e). Prenant un point a du domaine (ω_1) dans (γ), traçons le faisceau de cercles dont les cercles de Poncelet sont le point a et son image par rapport à la circonférence γ; si l'on fait augmenter la circonférence du faisceau vers γ à partir du point a, on arrivera à la circonférence C qui est la première ayant des points de (e), car le point a est en dehors de (e) puisque $\varphi(a) = \beta$, le point ξ se situe sur (e), et de plus l'ensemble (e) est fermé dans l'intérieur de (γ).

Rappelons la circonstance dans laquelle $\varphi(x_1)$ est définie. Pour tout x_1 du cercle (C) on a par définition

$$\varphi(x_1) < \alpha\,;$$

cela veut dire que Ax_1 est compris dans D_α, et par suite dans $[Gx_1, ((y))$ *quelconque*$]$ dont Gx_1 représente la section de $\mathfrak{G}$ par $x_1 =$ *constante*; c'est-à-dire x_1 appartient à (ω), et par conséquent à (ω_1); on aura alors $Ax_1 = Ex_1$; Ax_1 est donc contenu dans D_β, autrement dit

$$\varphi(x_1) = \beta\,;$$

et ceci, identiquement dans le cercle (C).

Or, alors, $\varphi(x_1)$ étant logarithmiquement subharmonique, grâce au lemme du numéro précédent, l'égalité ci-dessus subsisterait jusqu'à la circonférence C; ceci est une contradiction, et qui provient de l'hypothèse posée au commencement; il faut donc $\Sigma = \mathfrak{A}$.

Il ne nous reste qu'à démontrer le théorème pour $\lambda = 1$. Or, dans ce cas, si l'on définit à nouveau les ν fonctions $R_j(x_1)$ de la même manière qu'au No. 2, (dont nous nous sommes occupés en sous-entendant que $\lambda \geqq 2$), il sera de toute évidence que ces fonctions existent pour tout x_1 fini ; de là, il s'ensuit que toutes les fonctions s'annulent identiquement, et par conséquent que $\Sigma = \mathfrak{A}$. C. Q. F. D.

5. Nous allons appliquer le théorème au problème qui consiste à trouver des fonctions méromorphes admettant les pôles donnés. Reprenons dans l'espace $((x))$ un ensemble fermé de la classe (H_0),

$$|x_i| \leqq r_i, \quad |f_j((x))| \leqq 1, \quad ((x)) \in \mathfrak{G}, \quad (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\nu),$$

auquel correspondra dans l'espace $((x, y))$ la multiplicité Σ,

$$y_j = f_j((x)), \quad ((x)) \in \Delta, \quad (j=1,2,\ldots,\nu),$$

et qui fait partie de la classe (P_1) dans le nouvel espace.

1°. Soit $F((x))$ une fonction holomorphe des n variables x_i dans un voisinage de Δ; si on la regarde comme fonction des $n+\nu$ variables x_i et y_j, elle est holomorphe au voisinage de Σ; par suite, d'après ce que l'on a étudié au No. 4 du mémoire précédent, on peut développer la fonction en série de polynômes au voisinage de Σ; en substituant les ν relations $y_j = f_j((x))$ dans le développement, on trouve donc que dans un voisinage de Δ la fonction $F((x))$ est développable en série uniformément convergente ayant pour terme général un polynôme des x_i et $f_j((x))$.

2°. Etant donné les pôles $(\mathfrak{p})$[1] au voisinage de Δ suivant la manière habituelle, en considérant $(\mathfrak{p})$ comme pôles distribués dans un certain voisinage de Σ, ceci étant toujours possible, on peut y trouver une fonction méromorphe $\Phi((x, y))$ des variables x_i et y_j ayant les pôles $(\mathfrak{p})$, en vertu du théorème I dans le mémoire précédent. Or, pour un pôle (ou point d'indétermination) $((x^0, y^0))$ de la fonction, elle est représentée par la forme

$$\Phi((x, y)) = g((x)) + h((x, y)),$$

dont $g((x))$ est une fonction méromorphe qui ne dépend que des x_i, et $h((x, y))$ une fonction holomorphe ; en posant $y_j = f_j((x))$, $(j=1,2,\ldots,\nu)$, dans la fonction $\Phi((x, y))$, on obtient donc une fonction méromorphe des variables x_i ayant les pôles $(\mathfrak{p})$ au voisinage de Δ.

3°. Soit D un domaine d'holomorphie univalent (borné ou non) dans l'espace fini $((x))$. On sait bien grâce à MM. H. Cartan et P. Thullen que le domaine D est convexe par rapport à la classe $\mathfrak{K}$ de fonctions

(1) Ce mode d'expression n'empêche pas le point d'indétermination d'intervenir à $(\mathfrak{p})$. (Voir le No. 1, dans le mémoire précédent.)

qui comprend toutes les fonctions holomorphes dans D. De là, en répétant le mode de raisonnement exposé dans le mémoire précédent on constatera que, pour tout domaine D' donné à l'intérieur de D, on peut construire dans D un ensemble fermé Δ de la classe (H_0) contenant D', et cela de telle façon que Δ soit défini par des fonctions de la classe $\mathfrak{K}$.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, nous obtiendrons le théorème ci-dessous, que nous nous contentons de formuler immédiatement puisque nous pouvons le démontrer tout comme pour les cas de domaines cylindriques.

THÉORÈME II.—*Pour un domaine univalent d'holomorphie qui ne contient que des points à distance finie, on peut toujours trouver une fonction méromorphe admettant les pôles* (*et points d'indétermination*) *donnés.*