Zerlegung der Hauptideale aus Polynomringen in minimale Primideale.

Von

Shinjiro MORI und Takeo DODO.

(Eingegangen am 17. 5. 1938.)

Es sei $\mathfrak{J}$ ein Integritätsbereich mit Einselement und $\mathfrak{J}[x]$ seine transzendente Erweiterung, d. h. die Gesamtheit aller ganzen Funktionen einer Veränderlichen x mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$. Nehmen wir an, dass in $\mathfrak{J}$ eindeutige Zerlegung in Primelemente besteht, so gilt bekanntlich das Gleiche auch für den Erweiterungsbereich $\mathfrak{J}[x]$.(1) Auf Grund dieser eindeutigen Zerlegung ist die Gesamtheit aller durch ein Primelement teilbaren Elemente von $\mathfrak{J}$ ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$. In den folgenden Zeilen wollen wir untersuchen, ob dieser elementare Satz in geeigneter idealtheoretischer Einkleidung auch dann noch gültig bleibt, wenn wir ein Primelement durch ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ ersetzen, und wenn wir die folgende Eigenschaft von $\mathfrak{J}$ zulassen:(2)

Sind zwei beliebige verschiedene minimale Primideale in $\mathfrak{J}$ beide kein Hauptideal, so sind sie immer teilerfremd.

Dazu nehmen wir im folgenden an, dass im Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal immer als Potenzprodukt der minimalen Primidealen darstellbar ist.

Es sei $\mathfrak{J}[x]$ eine transzendente Erweiterung von $\mathfrak{J}$ durch eine Variable x, $\mathfrak{a}[x]$ bedeute die Gesamtheit aller Polynome in x mit Koeffizienten aus einem Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{J}$. Dann ist $\mathfrak{a}[x]$ auch ein Ideal in $\mathfrak{J}[x]$ und $\mathfrak{p}[x]$ ist prim, wenn $\mathfrak{p}$ prim in $\mathfrak{J}$ ist.

Es sei ein Element $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m\ (m\geqq 1)$ aus $\mathfrak{J}[x]$ *primitiv*, d. h. die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_m$ haben keinen gemeinsamen Teiler in $\mathfrak{J}$. Ferner sei es das Produkt des Elements $f(x)$ mit irgend-

(1) K. Hensel, Über eindeutige Zerlegung in Primelemente, Journ. f. Math. **158** (1927), 195. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* I, 73.

(2) Den Zerlegungssatz der Quasihauptideale im Multiplikationsring hat W. Krull gefunden, der eine Verallgemeinerung des elementaren Zerlegungssatz von Polynom darstellt. W. Krull, Hauptidealzerlegung in Polynomringen, Math. Zeitschr. **41** (1936), 213.

welchem Element aus $\mathfrak{J}$ stets irreduzibel in $\mathfrak{J}[x]$ bis auf konstante Faktoren. Dann heisst $f(x)$ „*Primelement in* $\mathfrak{J}[x]$".[1]

Die Gesamtheit $\bar{\mathfrak{p}}$ aller Elemente aus $\mathfrak{J}[x]$, deren Produkt mit irgendeinem Element von $\mathfrak{J}$ durch das Primelement $f(x)$ teilbar sind, bildet ein Primideal.[2] Dieses Primideal nennen wir das „*durch Primelement* $f(x)$ *erzeugte Primideal*". Das durch Primelement erzeugte Primideal enthält kein Element von $\mathfrak{J}$, während das zu $\mathfrak{p}$ entsprechende Primideal $\mathfrak{p}[x]$ von $\mathfrak{J}[x]$ aber ein Element aus $\mathfrak{J}$ enthält. Im ersten Falle heissen wir das Primideal „*zweite Art*" und im zweiten Falle nennen wir das Primideal „*erste Art*".

Die Eigenschaften von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}[x]$.

Hilfssatz 1. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein minimales Primideal in* $\mathfrak{J}$, *und es seien* $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdot+a_m$, $g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdot+b_n$ *zwei Elemente in* $\mathfrak{J}[x]$. *Ist im Produkt*

(1) $c_0x^{m+n}+c_1x^{m+n-1}+\cdots\cdot+c_{m+n}=f(x)g(x)$

(2) $(b_0, b_1, \ldots., b_n)\equiv 0\ (\mathfrak{p}^k)$, $\qquad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{k+1})$

(3) $(c_0, c_1, \ldots., c_{m+n})\equiv 0\ (\mathfrak{p}^l)$, $\qquad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+1})\ (l\geqq k)$,

so wird

$$(a_0, a_1, \ldots., a_m)\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-k}), \qquad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-k+1}).$$

Wäre $(a_0, a_1, \ldots., a_m)\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-k+1})$, so müsste nach (1) $(c_0, c_1, \ldots.\ c_{m+n})\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l+1})$ im Widerspruch zur Annahme (3) sein.

Ist $(a_0, a_1, \ldots., a_m)\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-k-s})$, $\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-k-s+1})$ $(l-k\geqq s\geqq 0)$, so findet sich unter den Elementen $a_0, a_1, \ldots., a_m$ ein erstes, a_i, das nicht durch $\mathfrak{p}^{l-k-s+1}$ teilbar ist, und ebenso unter den $b_0, b_1, \ldots., b_n$ ein erstes, b_j, das nicht durch $\mathfrak{p}^{k+1}$ teilbar ist. Wir ordnen nun die Gleichung (1) so an:

$$\begin{aligned} c_{i+j}=a_ib_j+a_{i-1}b_{j+1}+\cdots\cdot \\ +a_{i+1}b_{j-1}+\cdots\cdot. \end{aligned}$$

---

(1) Ist $\mathfrak{J}$ der Integritätsbereich aller ganzen rationalen Zahlen, so ist in $\mathfrak{J}[\sqrt{-5}]$ $2x^2+2x+3$ irreduzibel, aber $2(2x^2+2x+3)=(2x+1+\sqrt{-5})(2x+1-\sqrt{-5})$ reduzibel.

(2) Gehören zwei Elemente $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ nicht zu $\bar{\mathfrak{p}}$, so sind $a_0^k\varphi$, $a_0^l\psi$ für jede der ganzen Zahlen k, l durch das Primelement $f(x)=a_0x^m+\cdots+a_m$ unteilbar und folglich ist das Produkt $\varphi\psi$ mit jedem Element von $\mathfrak{J}$ auch durch $f(x)$ unteilbar. Zum Beweis wendet man vollständig Induktion an.

Dann ist $a_i b_j \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}^{l-s+1})$, während alle übrigen Glieder der rechten Seite durch $\mathfrak{p}^{l-s+1}$ teilbar sind, da jede Potenz von $\mathfrak{p}$ primär ist.[1] Wenn $s \geqq 1$ ist, so ist demnach c_{i+j} nicht durch $\mathfrak{p}^l$ teilbar im Widerspruch zur Annahme (3) und folglich muss $s=0$ sein. Der aufgestellte Hilfssatz ist also richtig.

Hilfssatz 2. *Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Primideal von zweiter Art in $\mathfrak{J}[x]$, so muss $\bar{\mathfrak{p}}$ minimal in $\mathfrak{J}[x]$ sein.*

Es sei $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots\cdot + a_m$ ein primitives Element von niedersten Grad in $\bar{\mathfrak{p}}$. Dann ist das Produkt vom Element $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots\cdot + a_m$ mit einem beliebigen Element aus $\mathfrak{J}$ stets unzerlegbar in $\mathfrak{J}$. Ist $\bar{\mathfrak{p}}_1$ das durch $a_0x^m + \cdots\cdot + a_m$ erzeugte Primideal in $\mathfrak{J}[x]$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}_1 \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}})$. Ist $c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots\cdot + c_n$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{p}}$, so muss $a_0^{n'}(c_0x^n + \cdots\cdot + c_n) = (a_0x^m + \cdots\cdot + a_m)\,(b_0x^{n-m} + \cdots\cdot + b_{n-m})$ sein, da $a_0x^m + \cdots\cdot + a_m$ ein Element vom niedersten Grad in $\bar{\mathfrak{p}}$ ist. Daraus folgt, dass $c_0x^n + \cdots\cdot + c_n \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_1)$ und $\bar{\mathfrak{p}}_1 = \bar{\mathfrak{p}}$ ist. Aus dieser Tatsache schliessen wir, dass $\bar{\mathfrak{p}}$ minimal in $\mathfrak{J}[x]$ ist.

Satz 1. *Der Polynomring $\mathfrak{J}[x]$ ist ganz abgeschlossen.*

Wir setzen

$$(1)\quad f^n(x) + g_1(x)f^{n-1}(x)\varphi(x) + g_2(x)f^{n-2}(x)\varphi^2(x) + \cdots\cdot + g_n(x)\varphi^n(x) = 0$$

für zwei Elemente $f(x)$ und $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{J}[x]$. Da für die passend ausgewählten Elemente a und b aus $\mathfrak{J}$

$$(2)\qquad \begin{aligned} af(x) &= a'f_1^{k_1}(x)f_2^{k_2}(x)\ldots.f_s^{k_s}(x)\,, \\ b\varphi(x) &= b'\varphi_1^{l_1}(x)\varphi_1^{l_2}(x)\ldots.\ \varphi_t^{l_t}(x) \end{aligned}$$

gelten, wo $f_i(x)$ und $\varphi_j(x)$ Primelemente in $\mathfrak{J}[x]$ sind und verschiedene minimale Primideale zweiter Art in $\mathfrak{J}[x]$ erzeugen, so folgt aus (1)

$$\{a''f_1^{k_1}(x)\ldots.f_s^{k_s}(x)\}^n = b''\varphi_1^{l_1}(x)\ldots.\varphi_t^{l_t}(x)\Phi(x)\,, \qquad s \geqq t\,.$$

Hieraus können wir ein Element b_1 in $\mathfrak{J}$ finden, so dass

$$(3)\qquad b_1\varphi(x) = b_1'f_1^{l_1}(x)\ldots.f_t^{l_t}(x)$$

ist. Wäre nun $k_1 < l_1$, so folgte aus (1), (2) und (3)

---

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale, dieses Jour. **8** (1938), 10, 12. Wenn jedes Hauptideal in $\mathfrak{J}$ als Potenzprodukt von minimalen Primidealen in $\mathfrak{J}$ darstellbar ist, so ist jede Potenz eines minimalen Primideales $\mathfrak{p}$ primär, und $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ für jede ganze zahl n.

$$a_1 f_1^{nk_1}(x) \equiv 0\ (\bar{\mathfrak{p}}_1^{(n-1)k_1+l_1}), \qquad nk_1 < (n-1)\,k_1 + l_1,$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}_1$ das durch $f_1(x)$ erzeugte Primideal in $\mathfrak{J}[x]$ bedeutet. Hier liegt ein Widerspruch vor; also muss

$$k_1 \geqq l_1, \qquad k_2 \geqq l_2, \ldots\ldots, k_t \geqq l_t$$

sein. Aus (2) und (3) erhalten wir damit für ein Element a_2 aus $\mathfrak{J}$

$$(4) \qquad a_2 f(x) = \varphi(x)\psi(x), \qquad \psi(x) = c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots\cdots + c_r$$

und aus (1) ergibt sich

$$(5) \qquad \psi^n(x) + a_2 g_1(x)\psi^{n-1}(x) + a_2^2 g_2(x)\psi^{n-2}(x) + \cdots\cdots + a_2^n g_n(x) = 0.$$

Nun gilt aber nach unserer Annahme für $\mathfrak{J}$ $(a_2) = \mathfrak{p}_1^{p_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_v^{p_v}$ in $\mathfrak{J}$. Nach Hilfssatz 1 ist es demnach $(c_0, c_1, \ldots\ldots c_r) \equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{q_i})$, $\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i^{q_i+1})$, $(i=1, 2, \ldots\ldots, v)$. Wäre $q_i < p_i$, so wären nach (5) die Koeffizienten von $\psi^n(x)$ durch $\mathfrak{p}^{(n-1)q_i+p_i}$, $(nq_i < (n-1)q_i + p_i)$ teilbar. Nach Hilfssatz 1 ergibt sich hier ein Widerspruch; also ist $q_i \geqq p_i$. Unserer Voraussetzung zufolge ist somit c_i durch a_2 teilbar und nach (4) ist $f(x)$ durch $\varphi(x)$ teilbar, womit unsere Behauptung eingelöst ist.

Hilfssatz 3. *Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1}, \ldots\ldots \mathfrak{p}_n$ die verschiedenen minimalen Primideale in $\mathfrak{J}$. Für beliebig gegebene ganze Zahlen $k_1, \ldots\ldots, k_m$ können wir dann in $\mathfrak{J}$ ein Element a finden, so dass $(a) = \mathfrak{p}_1^{k_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{k_m} \mathfrak{p}_1'^{l_1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_t'^{l_t}$, $(a) \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)$ $(i = m+1, \ldots\ldots, n)$ ist.*

Für jede ganze Zahl n ist stets $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$, und $\mathfrak{p}^n$ ist primär,[1] wenn $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ ist. Wir können damit solche Elemente $a_1, \ldots\ldots, a_m$ auswählen, dass

$$a_1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{k_1}), \quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{k_1+1}), \quad a_1 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^{k_2+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{k_m+1} \mathfrak{p}_{m+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_n)$$

$$a_2 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^{k_2}), \quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_2^{k_2+1}), \quad a_2 \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{k_1+1} \mathfrak{p}_3^{k_3+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_m^{k_m+1} \mathfrak{p}_{m+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_m \equiv 0\ (\mathfrak{p}_m^{k_m}), \quad \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_m^{k_m+1}), \quad a_m \equiv 0\ (\mathfrak{p}_1^{k_1+1}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{m-1}^{k_{m-1}+1} \cdot \mathfrak{p}_{m+1} \ldots\ldots \mathfrak{p}_n)$$

$$a_{m+1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{m+1}), \quad a_{m+1} \equiv 0\ (\mathfrak{p}_m^{k_1+1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_m^{k_m+1} \cdot \mathfrak{p}_{m+2} \ldots\ldots \mathfrak{p}_n)$$

---

(1) S. Mori, loc. cit., 10, 12.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_n), \quad a_n \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_1^{k_1+1} \ldots \mathfrak{p}_m^{k_m+1} \cdot \mathfrak{p}_{m+1} \ldots \mathfrak{p}_{n-1})$$

ist. Setzen wir nun $a = a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$, so wird

$$a \equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i^{k_i}), \ \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_i^{k_i+1}) \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

$$a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j) \qquad (j = m+1, \ldots, n).$$

Es gilt also

$$(a) = \mathfrak{p}_1^{k_1} \ldots \mathfrak{p}_m^{k_m} \cdot \mathfrak{p}_1'^{l_1} \ldots \mathfrak{p}_t'^{l_t}, \qquad (a) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_j) \ (j = m+1, \ldots, n),$$

wobei alle $\mathfrak{p}_i'$ von allen $\mathfrak{p}_i$ verschieden sind.

Hilfssatz 4. *Es sei* $f(x) = a_0 d_0 x^m + a_1 d_1 x^{m-1} + \cdots + a_m d_m$ *ein Primelement aus* $\mathfrak{J}[x]$, *wo* a_i *durch kein Primhauptideal und* d_i *nur durch Primhauptideal teilbar ist, und es sei* $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ *durch ein minimales Primideal* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{J}$ *teilbar. Dann können wir ein Primelement* $\varphi(x) = b_0 d_0 x^m + \cdots + b_m d_m$ *finden, so dass* $af(x) = b\varphi(x)$, *alle* a, b_i *durch kein Primhauptideal teilbar sind, und* (a, a_0) *und* $(a_0, b_0, \ldots, b_m)$ *beide durch kein minimales Primideal teilbar sind.*

Wegen der Definition des Primelementes in $\mathfrak{J}[x]$ ist $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal. Setzen wir nun

$$(1) \quad \begin{cases} (a_0) = \mathfrak{p}^{\alpha_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{\alpha_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{\alpha_s} \cdot \mathfrak{p}_{01}^{\alpha_1'} \ldots \mathfrak{p}_{0t}^{\alpha_t'} \\ (a_1) = \mathfrak{p}^{\beta_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{\beta_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{\beta_s} \cdot \mathfrak{p}_{11}^{\beta_1'} \ldots \mathfrak{p}_{1u}^{\beta_u'} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_m) = \mathfrak{p}^{\delta_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{\delta_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{\delta_s} \cdot \mathfrak{p}_{m1}^{\delta_1'} \ldots \mathfrak{p}_{mw}^{\delta_w'}, \end{cases}$$

so sind die Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s, \ldots$ alle kein Hauptideal. Mit $k_0, k_1, \ldots, k_s$ bezeichnen wir die kleinste Zahl aus $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \delta_0$; $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \delta_1$; $\ldots$; $\alpha_s, \beta_s, \ldots, \delta_s$ und nach Hilfssatz 3 finden wir ein Element b, so dass

$$(2) \quad (b) = \mathfrak{p}^{k_0} \cdot \mathfrak{p}_1^{k_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{k_s} \cdot \mathfrak{p}_{s+1}^{k_{s+1}} \ldots \mathfrak{p}_v^{k_v}, \quad (b) \not\equiv 0 (\mathfrak{p}_{0i}) \ (i = 1, 2, \ldots, t)$$

ist. Dabei muss $v > s$ sein, da $a_0, \ldots, a_m$ kein gemeinsamen Teiler haben. Wir bestimmen wieder ein Element a, so dass

$$(3)\qquad \begin{cases} (a)=\mathfrak{p}_{s+1}^{k_{s+1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_v^{k_v}\mathfrak{p}_{v+1}^{k_{v+1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_z^{k_z}, \\ (a)\not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_i)\ (i=0,\ldots\ldots,s),\ \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}_{0j})\ (j=1,\ldots\ldots,t) \end{cases}$$

ist, und alle Primideale kein Hauptideal sind. Daher ist (a, a_0) durch kein minimales Primideal teilbar. Nach (1), (2) und (3) erhalten wir

$$a_0a=bb_0,\ a_1a=bb_1,\ \ldots\ldots,\ a_ma=bb_m,$$

und $(a_0, b_0, \ldots\ldots, b_m)$ ist nicht durch ein minimales Primideal teilbar. Setzen wir nun $\varphi(x)=b_0d_0x^m+\cdots\cdots+b_md_m$, so wird $af(x)=b\varphi(x)$ und $\varphi(x)$ ist ein Primelement in $\mathfrak{J}[x]$, weil in (3) wir annehmen können, dass es für ein Element a' $(a')=\mathfrak{p}_{v+1}^{k'_{v+1}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_z^{k'_z}$ $(k'_{v+1}\leqq k_{v+1},\ldots\ldots,k'_z\leqq k_z)$ unmöglich ist.

Satz 2. *Es sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal von zweiter Art, welches durch ein Primelement $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m$ erzeugt wird. $\bar{\mathfrak{p}}$ ist dann und nur dann ein Hauptideal, wenn $(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_m)$ nicht durch ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ teilbar ist.*

Zunächst nehmen wir an, dass $(a_0, \ldots\ldots, a_m)$ durch kein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ teilbar ist. Ist $\varphi(x)=b_0x^n+\cdots\cdots+b_n$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{p}}$, so wird $a_0^r(b_0x^n+\cdots\cdots b_n)=(a_0x^m+\cdots\cdots+a_m)\ (c_0x^{n-m}+\cdots\cdots+c_{n-m})$. Da $(a_0, \ldots\ldots, a_m)$ durch kein minimales Primideal teilbar ist, muss nach Hilfssatz 1 $c_i=a_0^rc'_i$ $(i=0,\ldots\ldots,n-m)$ sein, womit $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal sein muss.

Zweitens sei $(a_0, \ldots\ldots, a_m)$ durch ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ teilbar. Der Definition des Primelementes zufolge darf aber $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal sein. Setzen wir $a_0=a'_0d_0,\ldots\ldots,a_m=a'_md_m$, wobei d_i nur durch Primhauptideal und d'_i durch kein Primhauptideal teilbar ist, so können wir nach Hilfssatz 4 zwei Elemente a und b finden, so dass $af(x)=b\varphi(x)$, $\varphi(x)=b'_0d_0x^m+\cdots\cdots+b'_md_m$ ist und $(a'_0, b'_0, \ldots\ldots, b'_m)$ durch kein minimales Primideal teilbar ist. Wäre $a\equiv 0\,(b)$, so würde $a''f(x)=\varphi(x)$ und $(a'_0, b'_0, \ldots\ldots, b'_m)$ wäre durch $\mathfrak{p}$ teilbar im Widerspruch zum vorigen Resultate. Anderseits ist $\varphi(x)$ ein Element aus $\bar{\mathfrak{p}}$, da $\bar{\mathfrak{p}}$ durch $f(x)$ erzeugt wird. Also ist $\bar{\mathfrak{p}}$ kein Hauptideal und es gilt unser Satz.

Satz 3. *Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$, so ist $\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}[x]$ auch ein minimales Primideal in $\mathfrak{J}[x]$.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal, so ist der Satz selbstverständlich. Im folgenden sei damit $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal.

Ist ein Primideal $\bar{\mathfrak{p}}'$ in $\mathfrak{J}[x]$ durch $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbar, so ist $\bar{\mathfrak{p}}'$ von erster Art oder zweiter Art. Im ersten Falle enthält $\bar{\mathfrak{p}}'$ ein Element p aus

$\mathfrak{J}$ und zufolge unserer Annahme wird $(p)=\mathfrak{p}_1^{n_1}\mathfrak{p}_2^{n_2}\ldots\ldots, \overline{(p)}=\bar{\mathfrak{p}}_1^{n_1}\bar{\mathfrak{p}}_2^{n_2}\ldots\ldots$ und $\overline{(p)}\equiv 0\,(\bar{\mathfrak{p}}')$. Eines, etwa $\bar{\mathfrak{p}}_l$, aus $\bar{\mathfrak{p}}_1,\ldots\ldots$ muss demnach durch $\bar{\mathfrak{p}}'$ teilbar sein. Anderseits ist p aber ein Element von $\bar{\mathfrak{p}}$, und $\mathfrak{p}$ ist minimal in $\mathfrak{J}$. Eines, etwa $\mathfrak{p}_k$, aus $\mathfrak{p}_1,\ldots\ldots$ muss demnach mit $\mathfrak{p}$ identisch sein, und daher folgt $\bar{\mathfrak{p}}_k=\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{p}}'=\bar{\mathfrak{p}}_l$, da $\bar{\mathfrak{p}}$ und $\bar{\mathfrak{p}}_l$ gleich oder durch einander unteilbar sind.

Im zweiten Falle ist nach Hilfssatz 2 $\bar{\mathfrak{p}}'$ minimal in $\mathfrak{J}[x]$ und $\bar{\mathfrak{p}}'$ wird durch ein Primelement $f(x)$ erzeugt. Alle Koeffizienten von $f(x)$ sind durch $\mathfrak{p}$ teilbar, und nach Satz 2 ist $\bar{\mathfrak{p}}'$ kein Hauptideal. Wir können nach Hilfssatz 4 in $\bar{\mathfrak{p}}'$ ein Element $\varphi(x)$ finden, so dass $af(x) =b\varphi(x)$, $\varphi(x)\not\equiv 0\,\big(f(x)\big)$ ist und das durch die Koeffizienten von $\varphi(x)$ erzeugte Ideal durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist. Da die Koeffizienten eines jeden Elementes aus $\bar{\mathfrak{p}}'$ aber durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muss, so ergibt sich demnach ein Widerspruch. Das Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ enthält damit kein Primideal zweiter Art, und es gilt unser Satz.

Zerlegungssatz der Hauptideale in $\mathfrak{J}[x]$.

In diesem Paragraphen fügen wir zu $\mathfrak{J}$ noch die folgende Bedingung hinzu;

Sind zwei beliebige verschiedene minimale Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ in $\mathfrak{J}$ kein Hauptideal, so sind sie immer teilerfremd, d. h. $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')=\mathfrak{J}$.

Satz 4. *Es sei $\bar{\mathfrak{p}}$ ein minimales Primideal zweiter Art in $\mathfrak{J}[x]$, welches durch ein Primelement $f(x)=a_0d_0x^m+a_1d_1x^{m-1}+\cdots\cdot+a_md_m$ erzeugt wird. Dann wird $\bar{\mathfrak{p}}=\bar{\mathfrak{a}}$, wenn $\bar{\mathfrak{a}}$ der grösste gemeinschaftliche Teiler aller zu $f(x)$ proportionalen Elemente*[1] *aus $\mathfrak{J}[x]$ ist.*

Wenn $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal ist, so ist unser Satz einleuchtend. Im anderen Fall muss $(a_0, a_1,\ldots\ldots a_m)$ nach Satz 2 durch ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$, welches kein Hauptideal ist, teilbar sein. Nach Hilfssatz 4 können wir demnach ein Primelement $\varphi(x)=b_0d_0x^m+b_1d_1x^{m-1}+\cdots+ b_md_m$ finden, so dass

$$(1)\qquad af(x)=b\varphi(x)$$

ist und (a_0, a) und $(a_0, b_0,\ldots\ldots, b_m)$ beide durch kein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ teilbar sind. Dabei ist (a) durch kein Primhauptideal teilbar. Der vorigen Bedingung zufolge ist damit für jede ganze Zahl r

(1) Zwei Elemente $f(x)$ und $\varphi(x)$ in $\mathfrak{J}[x]$ werden „*proportional*" genannt, wenn $af(x)=b\varphi(x)$ ist, wobei a, b die Elemente aus $\mathfrak{J}$ bedeuten. Vgl. W. Krull, loc. cit., 214.

(2) $$(a_0^r, a) = \mathfrak{J}\,.$$

Es sei nun $F(x)$ ein beliebiges Element aus $\bar{\mathfrak{p}}$, dann wird $a_0^r d_0^r F(x) = f(x)\psi(x)$, und folglich ist

(3) $$a_0^r F(x) = f(x)\psi'(x)\,,$$

weil $f(x)$ ein Primelement und d_0 nur durch Primhauptidal teilbar ist. Bei Benutzung von (1) folgt daraus.

(4) $$a a_0^r F(x) = b\varphi(x)\psi'(x)\,.$$

Da aber $(a_0, b_0, \ldots., b_m)$ durch kein minimales Primideal in $\mathfrak{J}$ teilbar ist, so folgt aus (4)

(5) $$aF(x) = \psi''(x)\varphi(x)\,.$$

Aus (2), (3) und (5) folgt

$$\big(F(x)\big) = \big(a_0^r F(x), aF(x)\big) = \big(f(x)\psi'(x), \psi''(x)\varphi(x)\big)\,.$$

Da $\varphi(x)$ aber ein zu $f(x)$ proportionales Element ist, so muss demnach $F(x) \equiv 0\,(\bar{\mathfrak{a}})$ sein; und unser Satz ist einleuchtend.

Satz 5. *Wenn ein minimales Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ zweiter Art in $\mathfrak{J}[x]$ durch ein Primelement $f(x) = a_0 d_0 x^m + \cdots\cdot + a_m d_m$ erzeugt wird, so wird $\big(f(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}} \cdot \bar{\mathfrak{p}}_1^{n_1} \ldots . \bar{\mathfrak{p}}_s^{n_s}$, wobei $\bar{\mathfrak{p}}_i$ ein minimales Primideal erster Art in $\mathfrak{J}(x)$, das kein Hauptideal ist, bedeutet.*

Ist $\bar{\mathfrak{p}}$ ein Hauptideal, so wird $\big(f(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}$ und unser Satz ist selbstverständlich. Im folgenden sei damit $\bar{\mathfrak{p}}$ kein Hauptideal. Dann ist nach Satz 2 $(a_0, a_1, \ldots., a_m)$ durch ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{J}$ teilbar. Nach Hilfssatz 4 erhalten wir ein Primelement $\varphi(x) = b_0 d_0 x^m + b_1 d_1 x^{m-1} + \cdots\cdot + b_m d_m$ derart, dass

(1) $$af(x) = b\varphi(x)\,, \qquad aa_0 = bb_0,\, aa_1 = bb_1, \ldots., aa_m = bb_m$$

ist, und (a, a_0) und $(a_0, b_0, \ldots., b_m)$ beide durch kein minimales Primideal teilbar sind. Zufolge der Bedingung für $\mathfrak{J}$ ist aber

(2) $$(a_0, b_0, \ldots., b_m) = \mathfrak{J}\,.$$

Nach dem Beweise vom Satz 4 folgt leicht $\bar{\mathfrak{p}} = \big(f(x), \varphi(x)\big)$. Anderseits ist aber nach (1)

$$a_0\varphi(x)=a_0(b_0d_0x^m+\cdots+b_md_m)=b_0(a_0d_0x^m+\cdots+a_md_m)=b_0f(x),$$
$$a_1\varphi(x)=b_1f(x),\ldots, a_m\varphi(x)=b_mf(x).$$

Es ist somit nach (2)

$$\bar{\mathfrak{p}}(a_0,\ldots,a_m)=\big(f(x)\big)\,(a_0,\ldots,a_m, b_0,\ldots,b_m)=\big(f(x)\big).$$

Da alle $a_0,\ldots,a_m$ durch kein Primhauptideal in $\mathfrak{J}$ teilbar sind, so ist nach unserer Bedingung für $\mathfrak{J}$ $(a_0,\ldots,a_m)=\mathfrak{p}_1^{n_1}\ldots\mathfrak{p}_s^{n_s}$. Es entsteht demnach unser Satz.

Hauptsatz. *Es sei in $\mathfrak{J}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt der minimalen Primideale darstellbar, und es sei stets $(\mathfrak{p},\mathfrak{p}')=\mathfrak{J}$, wenn $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zwei minimale Primideale sind, welche kein Hauptideal sind. Dann ist jedes Hauptideal im Polynomring $\mathfrak{J}[x]$ auch als ein Potenzprodukt der minimalen Primideale in $\mathfrak{J}[x]$ darstellbar.*

Ist r ein Element aus $\mathfrak{J}$, so gilt unser Satz leicht für das Hauptideal $(\bar{r})$ in $\mathfrak{J}[x]$. Es sei nun $F(x)$ ein beliebiges primitives Element aus $\mathfrak{J}[x]$. Dann wird für ein passendes Element k $kF(x)=f_1(x)F_1(x)$, wobei $f_1(x)=a_0d_0x^m+\cdots+a_md_m$ ein Primelement ist. Ist das durch $f_1(x)$ erzeugte Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_1$ ein Hauptideal, so wird nach Satz 2 $F(x)=f_1(x)F_1'(x)$. Im anderen Fall ist

$$a_0^{n'}F(x)=cf_1(x)\Phi(x) \tag{1}$$

und nach Hilfssatz 4 gibt es ein Primelement $\varphi(x)$ derart, dass

$$af_1(x)=b\varphi(x)=b(b_0d_0x^m+\cdots+b_md_m) \tag{2}$$

$$(a_0^{n'}, a)=\mathfrak{J} \tag{3}$$

ist. Aus (1) und (2) folgt $aa_0^{n'}F(x)=\varphi(x)bc\Phi(x)$. Da $(a_0, b_0,\ldots,b_m)$ durch kein minimales Primideal teilbar ist, so folgt daraus

$$aF(x)=c'\varphi(x)\Phi'(x). \tag{4}$$

Nun folgt aus (1), (3) und (4)

$$\big(F(x)\big)=\big(a_0^{n'}F(x), aF(x)\big)=\big(cf_1(x)\Phi(x), c'\varphi(x)\Phi'(x)\big).$$

Anderseits ist nach Satz 5

$$\big(F(x)\big)=\bar{\mathfrak{p}}_1\Big\{\bar{\mathfrak{p}}_1'^{k_1}\ldots\bar{\mathfrak{p}}_s'^{k_s}\big(\Phi(x)\big),\ \bar{\mathfrak{p}}_1''^{l_1}\ldots\bar{\mathfrak{p}}_t''^{l_t}\big(\Phi'(x)\big)\Big\}, \tag{5}$$

da das zu $f_1(x)$ proportionale Primelement auch dasselbe Primideal $\bar{\mathfrak{p}}_1$ erzeugt. Dabei sind $\Phi(x)$ und $\Phi'(x)$ auch proportional und primitiv, und ihrer Grad ist kleiner als der Grad von $F(x)$ und ferner sind $\bar{\mathfrak{p}}'$, $\bar{\mathfrak{p}}''$ die minimalen Primideale erster Art in $\mathfrak{J}[x]$. Genau ebenso können wir beweisen, dass

$$(6)\qquad \begin{cases} \big(\Phi(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}_2\Big\{\big(\Phi_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}'_{11}\ldots\ldots,\ \big(\Phi'_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}'_{12}\ldots\ldots\Big\} \\ \big(\Phi'(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}_2\Big\{\big(\Phi''_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}'_{21}\ldots\ldots,\ \big(\Phi'''_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}'_{22}\ldots\ldots\Big\} \end{cases}$$

ist, wobei $\Phi_1(x)$, $\Phi'_1(x)$, $\Phi''_1(x)$, $\Phi'''_1(x)$ alle proportional und primitiv sind. Ersetzen wir (6) in (5), so erhalten wir

$$\big(F(x)\big) = \bar{\mathfrak{p}}_1\bar{\mathfrak{p}}_2\Big\{\big(\Phi_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}_1'^{k_1}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}'_{11}\ldots\ldots,\ \big(\Phi'''_1(x)\big)\bar{\mathfrak{p}}_1''^{l_1}\ldots\ldots\bar{\mathfrak{p}}'_{22}\ldots\ldots\Big\}.$$

Eine Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt den Beweis unseres Satzes, da alle minimalen Primideale $\bar{\mathfrak{p}}'$, $\bar{\mathfrak{p}}''$, ... kein Hauptideal und von erster Art sind.