Über Ringe, die den Durchschnittssatz gestatten.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am Juni 30, 1941.)

Bekanntlich gilt in beliebigen 0-Ringen der schöne von E. Noether[1] stammende

Durchschnittssatz: *In einem 0-Ring lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellen,* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{q}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$.

Es war aber nicht bekannt, welche Bedingung für die Gültigkeit dieses Satzes notwendig und hinreichend sein soll. Vor kurzem hat E. Kamei[2] mit dieser Fragestellung sich beschäftigt, und gezeigt, dass in einem einartigen Ringe $\mathfrak{R}$ der Durchschnittssatz dann und nur dann gilt, wenn in $\mathfrak{R}$ der Q. O.-Satz gilt. In dieser Arbeit über den gleichen Gegestand wollen wir zeigen, dass dieser Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn wir den 0-Ring durch einen Ring ersetzen, in dem eine Primideal-Folge $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\cdots$ und eine Idealquotient-Folge $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\subset\cdots$ beide stets nur endlich viele verschiede Glieder besitzen.

Die Bezeichungen schliessen sich möglichst eng an die Arbeit von Krull[3] an.

Vorbereitende Sätze.

Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem folgende zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

Voraussetzung 1. *Ist eine Kette von Primidealen* $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{p}_3\subset\cdots$ *in* $\mathfrak{R}$ *gegeben und ist jedes* $\mathfrak{p}_{i+1}$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{p}_i$, *so bricht die Kette nach endlich vielen Gliedern ab.*

Voraussetzung 2. *Ist eine Kette von Idealquotienten* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\subset\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3\subset\cdots$ *gegeben, so müssen von einem gewissen* n *ab alle Glieder gleich sein.*

Zunächst führen wir den Begriff des zugehörigen Primideals eines Ideals ein, der in dieser Arbeit eine grosse Rolle spielt.

Definition. *Unter einem zum Ideal* $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R})$ *gehörigen Primideal verstenen wir ein Primideal* $\mathfrak{p}$, *zu dem für das gegebene Ideal* $\mathfrak{a}$ *ein solches Element* r *existiert, dass* $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(r)$, $r\not\subset\mathfrak{a}$ *ist.*

---

(1) E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Ann. **83** (1921), 24.

(2) E. Kamei, Zum Durchschnittssatz in einartigen Ringen, Proc. Imp. Acad. Tokyo **XVII** (1941), 95.

(3) W. Krull, *Allgemeine Modul-, Ring- und Idealtheorie,* Enzy. der Math. Wiss. **I**$_1$ (1939).

Für die zugehörigen Primideale eines Ideals gilt zunächst

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen 1 und 2 besitzt ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{a}$ *nur endlich viele minimale Primidealteiler*(1) *vom selben* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. *Ferner sind sie die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale.*

Es sei $\mathfrak{h}$ die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente in bezug auf $\mathfrak{a}$, dann ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal und es gibt kein nilpotentes Element mehr in bezug auf $\mathfrak{h}$. Ist $\mathfrak{h}$ prim und von $\mathfrak{R}$ verschieden, so ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}:(r)$ für jedes durch $\mathfrak{h}$ unteilbare Element r, und folglich ist $\mathfrak{h}$ ein zum selben gehöriges Primideal. Ist $\mathfrak{h}$ nicht prim, so existieren zwei Elemente r_1 und r_1', sodass $r_1 \not\subset \mathfrak{h}$, $r_1' \not\subset \mathfrak{h}$, $r_1 r_1' \subset \mathfrak{h}$ ist. Betrachten wir danach den Idealquotient $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(r_1)$, so ist offenbar $\mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}$. Ist $\mathfrak{h}_1$ noch nicht prim, so können wir wieder zwei Elemente r_2, r_2' finden sodass $r_2 r_2' \subset \mathfrak{h}_1$, $r_2 \not\subset \mathfrak{h}_1$, $r_2' \not\subset \mathfrak{h}_1$ ist. Daraus folgt $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}_1:(r_2) \supset \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}:(r_1 r_2) \supset \mathfrak{h}:(r_1)$ und dabei ist $r_1 r_2 \not\subset \mathfrak{h}$. Sonst würde $r_2 \subset \mathfrak{h}_1$. Da nach der Voraussetzung 2 dieses Verfahren aber nach endlich haüfiger Wiederholung abbrechen muss, erhalten wir endlich ein Primideal $\mathfrak{p}=\mathfrak{h}:(r_1 r_2 \ldots r_n)$. Dabei ist $r_1 r_2 \ldots r_n$ durch $\mathfrak{h}$ unteilbar und folglich ist $\mathfrak{p}$ nach der obigen Definition ein zu $\mathfrak{h}$ gehöriges Primideal.

Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ alle zu $\mathfrak{h}$ gehörigen Primideale, so wird

$$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{h}:(r_i) \qquad r_i \not\subset \mathfrak{h} \qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

und daraus folgt, dass $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots$ durch einander nicht teilbar sind, da kein nilpotentes Element in bezug auf $\mathfrak{h}$ existiert. Aus $\mathfrak{p}_2=\mathfrak{h}:(r_2)$ folgt danach $r_2 \not\subset \mathfrak{h}:\mathfrak{p}_1$. Anderseits ist aber $r_2 \subset \mathfrak{h}:\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ und daher erhalten wir eine Folge $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}:\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{h}:\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \cdots$. Nach der Voraussetzung 2 muss aber diese Folge im Endlichen abbrechen und damit besitzt $\mathfrak{h}$ nur endlich viele verschiedene zum selben gehörige Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$. Da jedes $\mathfrak{p}_i$ ein Teiler von $\mathfrak{h}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Wäre $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$, so würde $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}:(r)$ für ein durch $\mathfrak{h}$ unteilberes Element r aus $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Wenn $\mathfrak{h}'$ nicht prim wäre, so hätten wir ganz genau wie beim vorigen Falle ein zu $\mathfrak{h}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}'=\mathfrak{h}:(rr' \ldots r^{(k)})$ und dabei wäre $rr' \ldots r^{(k)} \not\subset \mathfrak{h}$, $rr' \ldots r^{(k)} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Da $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ alle zu $\mathfrak{h}$ gehörigen Primideale sind, sollte $\mathfrak{p}'$ mit einem, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ identisch sein. Aus $rr' \ldots r^{(k)} \subset \mathfrak{p}_1$ folgte damit $(rr' \ldots r^{(k)})^2 \subset \mathfrak{h}$; was der Eigenschaft von $\mathfrak{h}$ widerspricht. Also muss

$$(1) \qquad \mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \quad \text{und folglich} \quad \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_n \leqq \mathfrak{h}$$

sein. Ist $\mathfrak{p}_0$ ein beliebiger Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so muss $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{p}_0$ sein, da jedes Element aus $\mathfrak{h}$ in bezug auf $\mathfrak{a}$ nilpotent sind. Aus (1) folgt damit, dass $\mathfrak{p}_0$ mindestens eines aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ enthält. Damit *kann kein Primideal zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ *eingeschaltet werden.*

(1) Unter einem *minimalen Primidealteiler eines Ideals* $\mathfrak{a}$ verstehen wir einen Primidealteiler, zwischen den und $\mathfrak{a}$ kein Primideal eingeschaltet werden kann.

Nun können wir zwei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$ existiert oder nicht. Im ersten Falle können wir zwei Elemente p_1, r_1 finden, so dass

$$p_1 r_1 \subset \mathfrak{a}, \quad p_1 \subset \mathfrak{p}_i, \quad p_1 \not\subset \mathfrak{a}, \quad r_1 \not\subset \mathfrak{p}_i$$

ist. Daher folgt $\mathfrak{p}_i \geqq \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a} : (r_1) \supset \mathfrak{a}$. Gibt es noch einen Nullteiler r_2 in bezug auf $\mathfrak{r}_1$ ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$, so wird wieder $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 : (r_2) \subseteqq \mathfrak{p}_i$. Existiert noch ein Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{r}_2$ ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$, so geht das Verfahren weiter, bis wir schliesslich ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$ keinen Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{r}_m = \mathfrak{a} : (r_1 r_2 \ldots . r_m) \subseteqq \mathfrak{p}_i$ erhalten. Ist $\mathfrak{r}_m$ nicht prim, so ist $\mathfrak{r}_m \subset \mathfrak{r}_{m+1} = \mathfrak{a} : (r_1 r_2 \ldots . r_m p_1) \subseteqq \mathfrak{p}_i$ für eine Element p_1 aus $\mathfrak{p}_i$. Wäre $r \not\subset \mathfrak{p}_i$, $r' \not\subset \mathfrak{r}_{m+1}$, $rr' \subset \mathfrak{r}_{m+1}$ für zwei Elemente r und r', so würde $rr'p_1 \subset \mathfrak{r}_m$, $r'p_1 \not\subset \mathfrak{r}_m$, $r \not\subset \mathfrak{p}_i$; was aber nach der soeben gewonnenen Eigenschaft von $\mathfrak{r}_m$ unmöglich ist. Also gibt es keinen Nullteiler in bezug auf $\mathfrak{r}_{m+1}$ ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$. Auf solcher Weise erhalten wir nach der Voraussetzung 2 schliesslich ein solches Primideal $\mathfrak{p}''$, dass $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{a} : (r_1 r_2 \ldots . r_m p_1 \ldots . p_n) \subseteqq \mathfrak{p}_i$ ist. Es muss nämlich $\mathfrak{p}''$ mit $\mathfrak{p}_i$ identisch sein, da kein Primideal zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_i$ eingeschaltet werden kann. Nach unserer Definition ist $\mathfrak{p}_i$ damit ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal.

Im zweiten Fall können wir auch ganz genau wie beim ersten Fall ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}'''$ finden, so dass $\mathfrak{p}''' = \mathfrak{a} : (p_1 p_2 \ldots . p_l) = \mathfrak{p}_i$ ist; also ist Satz 1 in allen Teilen vollständig bewiesen.

Aus diesem Beweise folgt

Zusatz. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, der die Voraussetzungen 1 und 2 gestattet, und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$. Dann enthält $\mathfrak{p}$ mindestens ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal.*

Unter den Voraussetzungen 1 und 2 bekommen wir statt des Basissatzes

Satz 2. *Wenn in $\mathfrak{R}$ die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt werden, und wenn $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist, so können wir endlich viele Elemente $p_1, p_2, \ldots . , p_s$ derart angeben, dass für eine hinreichend grosse ganze Zahl n*

$$\mathfrak{p}^n \subseteqq (p_1, p_2, \ldots . , p_s, \mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{p}$$

gilt.

Nach dem Beweise von Satz 1 erhalten wir $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n$ für das Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{a}$. Ferner gehören alle $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . , \mathfrak{p}_n$ zu $\mathfrak{a}$. Danach muss der Idealquotient $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots . \mathfrak{p}_n$ ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ sein, wenn $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{R}$ ist. Ist $\mathfrak{r}_1$ prim, so enthält $\mathfrak{r}_1$ nach Zusatz von Satz 1 eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots . , \mathfrak{p}_n$, und daher folgt $\mathfrak{p}_1^2 \mathfrak{p}_2 \ldots . \mathfrak{p}_n \subseteqq \mathfrak{a}$. Im anderen Fall ergibt sich ganz genau wie beim Beweise von Satz 1 $\mathfrak{p}_1' = \mathfrak{r}_1 : (r_1')$, $r_1' \not\subset \mathfrak{r}_1$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_1'$. Setzen wir $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 : \mathfrak{p}_1'$, so ist $\mathfrak{r}_2$ ein echter Teiler von $\mathfrak{r}_1$. Wenn $\mathfrak{r}_2$ noch nicht prim ist, so wiederholen wir dasselbe Verfahren und erhalten eine Folge $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots . \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots . \mathfrak{p}_n \mathfrak{p}_1' \subset \cdots .$ Nach Voraussetzung 2 erhalten wir endlich ein Primideal $\mathfrak{p}'_m=\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_n\mathfrak{p}'_1\ldots\mathfrak{p}'_{m-1}$. Daher folgt nach Zusatz von Satz 1 $\mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}\leqq\mathfrak{a}$ für hinreichend grosse ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Da jedes zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_i$ ein Teiler von $\mathfrak{h}$ ist, erhalten wir danach für eine ganze Zahl $k_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$\mathfrak{h}^{k_1}\leqq\mathfrak{a}\,. \tag{1}$$

Nach Zusatz von Satz 1 können wir annehmen, dass

$$\mathfrak{p}\geqq\mathfrak{p}_1 \tag{2}$$

ist. Nehmen wir nun ein solches Element p_{11} heraus, dass $p_{11}<\mathfrak{p}_1$, $p_{11}\not<\mathfrak{p}_i$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ ist,(1) so muss $\mathfrak{p}_1\geqq(p_{11}, \mathfrak{h})$ und nach Satz 1 $\mathfrak{p}_1$ ein zu $(p_{11}, \mathfrak{h})$ gehöriges minimales Primideal sein. Besitzt $(p_{11}, \mathfrak{h})$ ein anderes minimales zum selben gehöriges Primideal $\mathfrak{p}'_2$, so muss $\mathfrak{p}'_2$ ein echter Teiler eines, etwa $\mathfrak{p}_2$, aus $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \ldots, \mathfrak{p}_n$ sein, da $p_{11}\not<\mathfrak{p}_i$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ ist. Es sei p_{12} ein Element aus $\mathfrak{p}_1$, welches durch jedes minimale zu $(p_{11}, \mathfrak{h})$ gehörige Primideal ausser $\mathfrak{p}_1$ unteilbar ist. Dann gehört $\mathfrak{p}_1$ auch zu $(p_{11}, p_{12}, \mathfrak{h})$, und ein anderes minimales zu $(p_{11}, p_{12}, \mathfrak{h})$ gehöriges Primideal ist ein echter Teiler eines zu $(p_{11}, \mathfrak{h})$ gehörigen minimalen Primideals. Da nach der Voraussetzung 1 jede Teilerkette von Primidealen im Endlichen abbrechen muss, so muss das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein Ende nehmen, so dass $\mathfrak{p}_1$ das einzige minimale zugehörige Primideal von $(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n_1}, \mathfrak{h})$ ist. Es ist somit genau wie oben bei (1)

$$\mathfrak{p}_1^{l_1}\leqq(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n_1}, \mathfrak{h})\leqq\mathfrak{p}_1\,. \tag{3}$$

Es sei wieder p_{21} irgendein Element aus $\mathfrak{p}$, das durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbar ist. Dann ist ein zu $(p_{21}, \mathfrak{p}_1)$ gehöriges minimales Primideal $\mathfrak{p}_{21}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar und wir erhalten auch

$$\mathfrak{p}_1<\mathfrak{p}_{21}\leqq\mathfrak{p}\,. \tag{4}$$

Nach dem oben angeschlossenen Resultat ergibt sich

$$\mathfrak{h}_1^{k_2}\leqq(p_{21}, \mathfrak{p}_1)\,,\qquad \mathfrak{p}_{21}^{l_2}\leqq(p_{22}. p_{23}, \ldots, p_{2n_2}, \mathfrak{h}_1)\leqq\mathfrak{p}_{21}\,, \tag{5}$$

wenn $\mathfrak{h}_1$ das zu $(p_{21}, \mathfrak{p}_1)$ gehörige Halbprimideal ist. Da die Kette $\mathfrak{p}_1<\mathfrak{p}_{21}<\cdots<\mathfrak{p}$ aber im Endlichen abbrechen muss, erhalten wir nach endlicher Fortsetzung dieses Verfahrens endlich

---

(1) Da $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ durch einander unteilbar sind, so können wir die Elemente p_2, $p_3, \ldots, p_n$ finden, so dass

$$\begin{array}{l} p_2<\mathfrak{p}_1,\ \ p_2\not<\mathfrak{p}_2,\ \ p_2<\mathfrak{p}_3,\ \ p_2<\mathfrak{p}_4, \ldots, p_2<\mathfrak{p}_n \\ p_3<\mathfrak{p}_1,\ \ p_3<\mathfrak{p}_2,\ \ p_3\not<\mathfrak{p}_3,\ \ p_3<\mathfrak{p}_4, \ldots, p_3<\mathfrak{p}_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n<\mathfrak{p}_1,\ \ p_n<\mathfrak{p}_2,\ \ p_n<\mathfrak{p}_3,\ \ p_n<\mathfrak{p}_4, \ldots, p_n\not<\mathfrak{p}_n\,. \end{array}$$

Setzen wir dann $p_{11}=p_2+p_3+\cdots+p_n$, so besitzt p_{11} die erwähnte Eigenschaft.

(6) $\mathfrak{h}_{t-1}^{k_t} \leqq (p_{t1}, \mathfrak{p}_{t-11})$, $\mathfrak{p}^{l_t} \leqq (p_{t2}, p_{t3}, \ldots, p_{tn_t}\mathfrak{h}_{t-1}) \leqq \mathfrak{p}$,

wobei $\mathfrak{h}_{t-1}$ das Halbprimideal von $(p_{t1}, \mathfrak{p}_{t-11})$ bedeutet. Setzen wir nun $n = k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_t \times l_1 \times l_2 \times \cdots \times l_t$, so folgt aus (1), (3), (5) und (6)

$$\mathfrak{p}^n \leqq (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n_1}, p_{21}, \ldots, p_{2n_2}, \ldots, p_{t1}, p_{t2}, \ldots p_{tn_t}, \mathfrak{a}) \leqq \mathfrak{p}.$$

Wir haben damit Satz 2 gewonnen.

Der Begriff des U-Satzes der zu einem Ideal gehörigen Primideale führt uns zu folgendem Satz, der zum Beweis von Satz 4 benutzt wird:

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen 1 und 2 muss jede Folge der zu einem Ideal* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale*

$$\mathfrak{a} \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_{i+1} \subset \mathfrak{p}_i \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$$

im Endlichen abbrechen.

Da alle Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_i, \ldots$ zu $\mathfrak{a}$ gehören, erhalten wir nach unserer Definition

(1) $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (r_i)$, $r_i \not\subset \mathfrak{a}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Betrachten wir nun die Folge der Idealquotienten $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, \ldots$, so muss

(2) $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \subset \cdots \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1} \subset \cdots$

sein. Denn aus $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_{i+1}$ folgt nach (1) $r_{i+1} \subset \mathfrak{r}_i$ und daraus ergibt sich $(r_{i+1})\, \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{a}$. Da nach (1) aber $\mathfrak{p}_{i+1} = \mathfrak{a} : (r_{i+1})$ ist, erhalten wir einen Widerspruch $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_i \leqq \mathfrak{p}_{i+1}$, da $\mathfrak{p}_{i+1} \subset \mathfrak{p}_i \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_1$ ist. Nach der Voraussetzung 2 muss die Kette (2) im Endlichen abbrechen, also muss die im Satz bezeichnete Kette auch im Endlichen abbrechen.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir

Satz 4. *Wenn in* $\mathfrak{R}$ *die Voraussetzungen 1 und 2 vorausgesetzt werden, so besitzt jedes von* $\mathfrak{R}$ *verschiedene Ideal* $\mathfrak{a}$ *nur endlich viele, ihm zugehörige Primideale.*

Nach Satz 1 besitzt $\mathfrak{a}$ mindestens ein zu ihm gehöriges Primideal. Es seien damit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n, \ldots$ alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale. Dann gehört ein solches Element r_i zu $\mathfrak{p}_i$, dass

(1) $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (r_i)$, $r_i \not\subset \mathfrak{a}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$

ist. Daher folgt zunächst:

Wenn eine Teilmenge $\mathfrak{p}_{i_1}, \mathfrak{p}_{i_2}, \ldots$ von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n, \ldots$ eine Teilerkette $\mathfrak{p}_{i_1} \subset \mathfrak{p}_{i_2} \subset \cdots$ bildet, so soll nach Voraussetztung 1 diese Kette im Endlichen abbrechen.

Zweitens folgt aus Satz 3:

Betrachten wir eine Vielfachenkette $\mathfrak{p}_{j_1} \supset \mathfrak{p}_{j_2} \supset \cdots \supset \mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n, \ldots$, so soll diese Kette auch im Endlichen abbrechen.

Nach Satz 1 gibt es nur endlich viele minimale Primidealteiler $\mathfrak{p}_{11}$, $\mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ von $\mathfrak{a}$, und sie sind alle zu $\mathfrak{a}$ gehörigen minimalen Primideale. Es seien nun nach der oben ausgesprochenen Tatsache $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots, \mathfrak{p}_{2n_2}, \ldots$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, und diese sollen wenigstens eines aus $\mathfrak{p}_{11}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ umfassen und zwischen sich und $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ kein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal enthalten. Dann sind $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots, \mathfrak{p}_{2n_2}, \ldots$ durch einander unteilbar und daraus ergibt sich die Kette der Idealquotienten

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_{21} \subset \cdots \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_{21}\mathfrak{p}_{22} \ldots \mathfrak{p}_{2n_2} \subset \cdots.$$

Nach Voraussetzung 2 soll diese Kette auch im Endlichen abbrechen, es existieren nämlich nur endlich viele zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideale $\mathfrak{p}_{21}, \ldots, \mathfrak{p}_{2n_2}$, welche wenigstens eines aus $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ umfassen und kein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal zwischen sich und $\mathfrak{p}_{11}, \mathfrak{p}_{12}, \ldots, \mathfrak{p}_{1n_1}$ enthalten. Es seien wieder $\mathfrak{p}_{31}, \mathfrak{p}_{32}, \ldots, \mathfrak{p}_{3n_3}$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, welche wenigstens eines aus $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots, \mathfrak{p}_{2n_2}$ umfassen und kein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal zwischen sich und $\mathfrak{p}_{21}, \mathfrak{p}_{22}, \ldots \mathfrak{p}_{2n_2}$ enthalten. Dann können wir ganz genau wie beim obigen Falle die Endlichkeit der Anzahl n_3 beweisen. Nach der oben ausgesprochenen Tatsache soll dieses Verfahren im Endlichen schliessen, womit unser Satz bewiesen ist.

Nachweis des Hauptsatzes.

Es gilt nun folgender Satz, aus dem sich der Beweis unseres Hauptsatzes mühelos ergeben wird:

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt sind. Ist $\mathfrak{p}$ ein zum Ideal $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal und ist m eine hinreichend grosse ganze Zahl, so erfüllt $\mathfrak{p}^m$ die Bedingung, dass es in $\mathfrak{p}^m$ kein Element p gibt, für welches $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (p)$, $p \not\subset \mathfrak{a}$ ist.*

Aus Satz 2 folgt

$$(1) \qquad \mathfrak{p}^n \subseteqq (p_1, p_2, \ldots, p_s, \mathfrak{a}) \subseteqq \mathfrak{p}.$$

Setzen wir $\mathfrak{b} = (p_1, p_2, \ldots, p_s, \mathfrak{a})$, so wird $\mathfrak{p}^n \subseteqq \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$. Anderseits erhalten wir nach Voraussetzung 2

$$(2) \qquad \mathfrak{a} : (p_1) \subset \mathfrak{a} : (p_1^2) \subset \cdots \subset \mathfrak{a} : (p_1^{k_1 - 1}) \subset \mathfrak{a} : (p_1^{k_1}) = \mathfrak{a} : (p_1^{k_1+1}) = \cdots$$

für eine grosse ganze Zahl k_1. Setzen wir $\mathfrak{a}_1 = \left(\mathfrak{a}, (p_1^{k_1})\mathfrak{R}\right)$ und betrachten wir wieder die Kette der Idealquotienten $\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_1 : (p_2) \subseteqq \mathfrak{a}_1 : (p_2^2) \subseteqq \cdots$, so haben wir auch

$$(3) \qquad \mathfrak{a}_1 : (p_2^{k_2 - 1}) \subset \mathfrak{a}_1 : (p_2^{k_2}) = \mathfrak{a}_1 : (p_2^{k_2+1}) = \cdots$$

für eine passend gewählte ganze Zahl k_2. Es sei wieder $\mathfrak{a}_2 = \left(\mathfrak{a}_1, (p_2^{k_2})\mathfrak{R}\right) = \left(\mathfrak{a}, (p_1^{k_1})\mathfrak{R}, (p_2^{k_2})\mathfrak{R}\right)$, und daraus bilden wir die Kette der Idealquotienten $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_2 : (p_3) \subset \mathfrak{a}_2 : (p_3^2) \subset \cdots$. Auf solche Weise erhalten wir endlich

$$(4)\qquad \mathfrak{a}_{s-1}:(p_s^{k_s-1})\subset\mathfrak{a}_{s-1}:(p_s^{k_s})=\mathfrak{a}_{s-1}:(p_s^{k_s+1})=\cdots\cdot,\qquad \mathfrak{a}_s=\left(\mathfrak{a}_{s-1},(p_s^{k_s})\mathfrak{R}\right)$$

für eine hinreichend grosse ganze Zahl k_s, und ferner gilt

$$(5)\qquad \mathfrak{a}\leqq\mathfrak{a}_1\leqq\mathfrak{a}_2\leqq\cdots\cdot\leqq\mathfrak{a}_s,\qquad \mathfrak{a}_i=\left(\mathfrak{a},(p_1^{k_1})\mathfrak{R},(p_2^{k_2})\mathfrak{R},\ldots\ldots,(p_i^{k_i})\mathfrak{R}\right).$$

Nun bezeichnen wir mit k die grösste aus den Zahlen $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_s$ und setzen $l=k(s+1)$. Wenn für ein Element p aus $\mathfrak{b}^l$

$$(6)\qquad \mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(p),\qquad p\not\subset\mathfrak{a}$$

ist, so erhalten wir nach (1)

$$(7)\qquad p\equiv r_1p_1^k+r_2p_2^k+\cdots\cdot+r_sp_s^k\ (\mathfrak{a}),\qquad p\not\subset\mathfrak{a},$$

wobei $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_s$ die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Durch Multiplikation mit p_s erhalten wir aus (6) und (5)

$$r_sp_s^{k+1}\subset\mathfrak{a}_{s-1}\quad\text{oder}\quad r_s\subset\mathfrak{a}_{s-1}:(p_s^{k+1}),\qquad k\geqq k_s.$$

Nach (4) gilt damit $r_sp_s^{k_s}\subset\mathfrak{a}_{s-1}$. Danach können wir die Formel (7) in die folgende Form umschreiben:

$$p\equiv r_1'p_1^k+\cdots\cdot+r_{s-1}'p_{s-1}^k\qquad(\mathfrak{a}),$$

wobei $r_1', \ldots\ldots, r_{s-1}'$ auch die Elemente aus $\mathfrak{R}$ bedeuten. Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir schliesslich

$$p\equiv r_1^{(s-1)}p_1^k\qquad(\mathfrak{a}).$$

Nach (6) folgt wieder daraus $r_1^{(s-1)}p_1^{k+1}\subset\mathfrak{a}$ und wir erhalten nach (2) einen Widerspruch $p\subset\mathfrak{a}$.

Wir gelangen von hieraus zum Resultate, dass $\mathfrak{b}^l$ kein Element enthält, für welches $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(p)$, $p\not\subset\mathfrak{a}$ gilt. Setzen wir damit $m=ln$, so folgt aus (1), dass $\mathfrak{p}^m$ kein Element p enthält, für welches $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}:(p)$, $p\not\subset\mathfrak{a}$ gilt.

Nun sind wir in der Lage, das Ziel dieser Arbeit zu beweisen:

Hauptsatz. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, der die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt.*[1] *Dann gilt in $\mathfrak{R}$ der Durchschnittssatz. Es lässt sich nämlich jedes Ideal aus $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt endlich vieler starker Primärideale darstellen.*

Es sei $\mathfrak{a}$ irgendein Ideal aus $\mathfrak{R}$. Dann gibt es nach Satz 4 nur endlich viele zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_k$ und nach Satz 5 enthält das Ideal $(\mathfrak{p}_i^{m_i}, \mathfrak{a})$ kein Element p_i derart, dass $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{a}:(p_i)$, $p_i\not\subset\mathfrak{a}$ ist, wenn m_i eine hinreichend grosse ganze Zahl ist. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{q}_i$ die

(1) Der kommutative Ring mit 0-Satz ist nur ein spezieller Fall vom Ring, der Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt. Z. B. Es sei $\mathfrak{J}$ der Integritätsbereich aller ganzen rationalen Zahlen und $\mathfrak{R}=\mathfrak{J}[x_1, x_2, \ldots.]$ der Polynomring der unendlich vielen Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots\ldots$ Es sei ferner $\mathfrak{a}=(6, x_1^2, x_2^2, \ldots\ldots, x_1x_2, x_1x_3, \ldots\ldots, x_2x_3, \ldots.)$ ein Ideal aus $\mathfrak{R}$ und $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ der Restklassenring. Dann werden in $\bar{\mathfrak{R}}$ die Voraussetzungen 1 und 2 beide erfüllt. Aber der 0-Satz gilt nicht.

Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{p}_i$, deren Produkt mit irgend einem durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Element zu $(\mathfrak{p}_i^{m_i}, \mathfrak{a})$ gehört, so ist $\mathfrak{q}_i$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges starkes Primärideal und ein Teiler von $(\mathfrak{p}_i^{m_i}, \mathfrak{a})$. Ferner gibt es in $\mathfrak{q}_i$ kein Element q_i von der art, dass $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : q_i$ $q_i \not\subset \mathfrak{a}$ ist. Denn, wäre $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (q_i)$, $q_i \subset \mathfrak{q}_i$, $q_i \not\subset \mathfrak{a}$, so würde nach der Struktur von $\mathfrak{q}_i$

$$rq_i \subset (\mathfrak{p}_i^{m_i}, \mathfrak{a}) , \qquad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (rq_i) , \qquad rq_i \not\subset \mathfrak{a} ,$$

für ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element r, was der soeben ausgesprochenen Eigenschaft von $(\mathfrak{p}_i^{m_i}, \mathfrak{a})$ widerspricht.

Es sei jetzt $\mathfrak{d} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k$, wobei $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_k$ alle soeben gewonnenen Primärideale bedeuten, die zu allen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_k$ gehören. Dann ist offenbar

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{d} . \tag{1}$$

Wäre $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}$, so hätten wir ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element d von $\mathfrak{d}$. Da in diesem Falle d nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$ wäre, so sollte $\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (d) \supset \mathfrak{a}$ sein. Wenn wir nach Voraussetzung 2 die Methode beim Beweise von Satz 1 wiederholen, so ergäbe sich

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{a} : (q) , \qquad q \subset \mathfrak{d} , \qquad q \not\subset \mathfrak{a}$$

für ein Element $q = dd_1 \ldots d_t$, wo $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{a}$ gehöriges Primideal wäre. Also sollte $\mathfrak{p}$ identisch mit einem, etwa $\mathfrak{p}_i$, aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ sein und ferner wäre $q \subset \mathfrak{q}_i$. Das widerspricht der Eigenschaft von $\mathfrak{q}_i$. Daraus folgt nach (1)

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k , \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{q}_i$ ein starkes Primärideal bedeutet, das zu einem zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideal $\mathfrak{p}_i$ gehört. Also ist unser Hauptsatz bewiesen.

Zum Schluss wollen wir noch eine Bemerkung hinzufügen.

Ist $\mathfrak{q}_i \supseteqq \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{i-1} \frown \mathfrak{q}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k$ in (2), so wird

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{i-1} \frown \mathfrak{q}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k .$$

Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ alle durch $\mathfrak{p}_i$ teilbaren Primideale aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}$, $\mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_k$ und $\mathfrak{p}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{p}_k$ alle durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbaren Primideale aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{p}_k$. Dann ist für das Element r_i, welches die Beziehung $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (r_i)$, $r_i \not\subset \mathfrak{a}$ erfüllt,

$$r_i \subset \mathfrak{q}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, l) . \tag{3}$$

Da wir ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{q}_{l+2} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k$ ausnehmen können, erhalten wir nach (3)

$$rr_i \subset \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{i-1} \frown \mathfrak{q}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k$$

Aber wir erhalten $rr_i \not\subset \mathfrak{a}$, denn $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{a} : (r_i)$, $r \not\subset \mathfrak{p}_i$ ist. Daher ergibt sich ein Widerspruch $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_{i-1} \frown \mathfrak{q}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_k$. *Also ist die Darstellung* (2) *unverkürzbar.*