Über die Produktzerlegung der Hauptideale. IV.

Von

Shinziro MORI.

(Eingegangen am 30. Okt., 1940.)

Will man die Struktur der kommutativen Ringe, in denen jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt von endlich vielen Primidealen darstellen lässt, untersuchen, so stösst man auf eine unüberwindliche Schwierigkeit, weil beim Ring ohne Einheitselement jedes im Ring minimale Primideal ein Hauptideal ist, aber beim Ring mit Einheitselement es nicht mehr gilt. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, muss man die zwei Fälle im einzelnen behandeln. Für den zweiten Fall ist dieses Problem schon in den gleichnamigen Arbeiten[1] des Verfassers vollständig gelöst. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir den ersten Fall und die angedeutete Frage kommt endlich zum Abschluss.

Vorbemerkungen.

Fortan bedeutet Ring $\mathfrak{R}$ dauernd einen allgemeinen kommutativen Ring ohne Einheitselement.

Grundlegend für die vorliegende Arbeit sind die folgenden, von mir an anderer Stelle in weiterem Zusammenhang bewiesenen

Lemma I.[2] *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt, und gibt es in $\mathfrak{R}$ einen Nullteiler, so besitzt $\mathfrak{R}$ nur endlich viele, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale $\mathfrak{p}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ und das Nullideal ist als Potenzprodukt dieser Primideale darstellbar.*

Lemma II.[3] *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt, und besitzt $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler, so ist jedes von (0) verschiedene Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler, in $\mathfrak{R}$ minimaler Primideale darstellbar.*

Für die Durchführung unserer Untersuchung ist es auch nützlich, das folgende, bei dem speziellen Fall mit Einheitselement[4] schon bewiesene Lemma vorauszuschicken:

Lemma III. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring, in dem jedes Hauptideal als ein Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist, und besitzt $\mathfrak{R}$ kein Ein-*

(1) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. III. dieses Jour. **10** (1940), 85.
(2) loc. cit., 85.
(3) S. Mori, Allgemeine Z. P. I.-Ringe, dieses Jour. **10** (1940), 118.
(4) S. Mori, Über die Produktzerlegung der Hauptideale. I. dieses Jour. **8** (1938), 7.

heitselement und keinen Nullteiler, so gilt $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ *für jede positive ganze Zahl* n *und ferner ist jede Potenz von* $\mathfrak{p}$ *primär, wenn* $\mathfrak{p}$ *ein beliebiges, in* $\mathfrak{R}$ *minimales Primideal bedeutet.*

Zum Beweise nehmen wir $\mathfrak{p}^n = \mathfrak{p}^{n+1}$ für eine positive ganze Zahl n an. Dann ist ein von 0 verschiedenes Element p aus $\mathfrak{p}$ in der Form

$$(p) = \mathfrak{p}^a \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \dots \mathfrak{p}_k^{a_k}, \qquad 1 \leqq a \leqq n$$

darstellbar. Es sei s eine positive ganze Zahl derart, dass $as \geqq n$ ist, dann folgt daraus

$$(p^s) = \mathfrak{p}^n \mathfrak{p}_1^{sa_1} \mathfrak{p}_2^{sa_2} \dots \mathfrak{p}_k^{sa_k}, \qquad (p^{2s}) = \mathfrak{p}^n \mathfrak{p}_1^{2sa_1} \mathfrak{p}_2^{2sa_2} \dots \mathfrak{p}_k^{2sa_k} = (p^s) \mathfrak{p}_1^{sa_1} \mathfrak{p}_2^{sa_2} \dots \mathfrak{p}_k^{sa_k}.$$

Da $\mathfrak{R}$ aber kein Einheitselement und keinen Nullteiler besitzt, folgt daraus ein Widerspruch. Also muss immer $\mathfrak{p}^n \neq \mathfrak{p}^{n+1}$ für jede positive ganze Zahl n sein.

Setzen wir voraus, dass $\mathfrak{p}^{n+1}$ kein Primärideal ist, so können wir zwei Elemente p und r finden, so dass

$$(1) \qquad pr \subset \mathfrak{p}^{n+1}, \ p \subset \mathfrak{p}, \ p \not\subset \mathfrak{p}^{n+1}, \ r \not\subset \mathfrak{p}, \ (p) = \mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_1^{b_1} \dots \mathfrak{p}_j^{b_j} \ (1 \leqq m \leqq n)$$

ist. Daher folgt $\mathfrak{p}^m(r') \subset \mathfrak{p}^{n+1}$ für ein Element $r'(\not\subset \mathfrak{p})$ und ferner ergibt sich daraus $\mathfrak{p}^m(r'^2) \subset \mathfrak{p}^{n+1}(r') \subset \mathfrak{p}^{2(n+1)-m}$. Auf diese Weise gelangen wir endlich zum Ergebnis, dass für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r''

$$(r''p) \subset \mathfrak{p}^t, \qquad t = km > n+1, \qquad k > 1$$

gilt. Da aber nach (1) $(p^k) = \mathfrak{p}^t \mathfrak{p}_1^{kb_1} \dots \mathfrak{p}_j^{kb_j}$ ist, folgt daraus $\mathfrak{p}_1^{kb_1} \dots \mathfrak{p}_j^{kb_j}(r''p) \subset \mathfrak{p}^t \mathfrak{p}_1^{kb_1} \dots \mathfrak{p}_j^{kb_j} = (p^k)$. Für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element r''' ist danach $r'''p = p\bar{r}$, $\bar{r} \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler hat, folgt daraus ein Widerspruch $r''' \subset \mathfrak{p}$. Unsere Voraussetzung, dass $\mathfrak{p}^{n+1}$ nicht primär ist, ist damit falsch.

Über die Ringe ohne Einheitselement und ohne Nullteiler.

In diesem Paragraphen sollen die Eigenschaften der Ringe, welche keinen Nullteiler und kein Einheitselement besitzen, und in denen jedes Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist, abgeleitet werden.

Satz 26. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein Ring ohne Nullteiler und ohne Einheitselement, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt, so ist jedes in* $\mathfrak{R}$ *minimale Primideal* $\mathfrak{p}$ *ein Hauptideal.*

Ist ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal $\mathfrak{p}$ kein Hauptideal, so muss für ein von Null verschiedenes Element p aus $\mathfrak{p}$

$$(1) \qquad (p) \neq \mathfrak{p}, \qquad (p) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m \mathfrak{p}_1^{m_1} \dots \mathfrak{p}_n^{m_n}$$

sein. Dabei können wir nach Lemma 2 voraussetzen, dass alle $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_n$ auch ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal sind. Nehmen wir willkürlich von $\mathfrak{a}$

ein von 0 verschiedenes Element a aus, so gilt nach Lemma 3 auch eine Darstellung

$$(2)\qquad (a)=\mathfrak{p}^{k}\mathfrak{p}^{k_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{k_n}\mathfrak{p}'^{l}\ldots,\quad m\leqq k,\quad m_i\leqq k_i\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Aus (1) und (2) folgt $(p)\mathfrak{p}^{k-m}\mathfrak{p}^{k_1-m_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{k_n-m_n}\mathfrak{p}'^{l}\ldots=\mathfrak{p}(a)$. Wäre $(p)=\mathfrak{p}(a)$, so würde $p=p'a$, $p'\subset\mathfrak{p}$ und daraus folgte $\mathfrak{p}(a)=(p)=(p')(a)$. Da aber $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler enthält, ergäbe sich daraus ein Widerspruch $\mathfrak{p}=(p')$. Damit muss $(p)\neq\mathfrak{p}(a)$ und für ein Ideal $\mathfrak{b}=\mathfrak{p}^{k-m}\mathfrak{p}^{k_1-m_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{k_n-m_n}\mathfrak{p}'^{l}\ldots$ aus $\mathfrak{R}$ $(p)\mathfrak{b}=\mathfrak{p}(a)$ sein. Infolgedessen existiert in $\mathfrak{R}$ für irgendwelches Element a aus $\mathfrak{a}$ ein zu a entsprechendes Ideal $\mathfrak{b}$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ die Idealsumme aller solchen $\mathfrak{b}$, so ergibt sich $(p)\mathfrak{M}=\mathfrak{p}\mathfrak{a}=(p)$. Da $\mathfrak{R}$ keinen Nullteiler hat, folgt daraus die Existenz des Einheitselementes, was unserer Voraussetzung für $\mathfrak{R}$ widerspricht. Also muss jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}$ ein Hauptideal sein.

Aus Satz 26 erhalten wir auf Grund von Lemma II und III ohne weiteres:

Hauptsatz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Einheitselement und auch ohne Nullteiler. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in $\mathfrak{R}$ jedes Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist, besteht darin, dass in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Jedes von Null verschiedene Element lässt sich nicht als Produkt unendlich vieler Elemente darstellen.*(1)

2. *Ist ein von Null verschiedenes Element p unzerlegbar, so ist (p) ein Primideal.*

Ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{R}$ als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar, so ist nach Lemma II für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element a $(a)=\mathfrak{p}_1^{k_1}\ldots\mathfrak{p}_m^{k_m}$, wobei $\mathfrak{p}_i$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal bedeutet, und nach Satz 26 ist $\mathfrak{p}_i=(p_i)$. Wenn $a=a_1a_2\ldots a_s$, $s>k_1+k_2+\cdots+k_m$ ist, so folgt aus $(a_i)=\mathfrak{p}_{i1}^{k_{i1}}\ldots\mathfrak{p}_{im_i}^{k_{im_i}}$

$$(a)=\mathfrak{p}_{11}^{k_{11}}\ldots\mathfrak{p}_{1m_1}^{k_{1m_1}}\mathfrak{p}_{21}^{k_{21}}\ldots\mathfrak{p}_{sm_s}^{k_{sm_s}}=\mathfrak{p}^{k_1}\ldots\mathfrak{p}_m^{k_m},$$

(1) Bei dieser Bedingung wird die Eindeutigkeit der unzerlegbaren Faktoren eines Elementes nicht vorausgesetzt. Unser Ring ist damit nicht identisch mit Z. P. E.-Ring, d. h. es lässt sich in dem genannten Ringe jedes Element eindeutig in unzerlegbare Faktoren zerlegen. Ist z. B. $\mathfrak{R}$ der Ring aller rationalen Zahlen mit geradem Zähler und mit ungeradem Nenner, so wird $\frac{4}{45}=\frac{2}{3}\frac{2}{15}=\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{5}$, wobei jedes $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{5}$ ein unzerlegbares Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Also ist $\mathfrak{R}$ kein Z. P. E.-Ring, aber ein Ring ohne Nullteiler und ohne Einheitselement, in dem jedes Hauptideal sich als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellen lässt. Aber jedes Hauptideal $\left(\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{15}\right)$, $\left(\frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{2}{5}\right)$ ist gleich mit $\mathfrak{R}$, und im allgemeinen ist $(p)=\mathfrak{R}$ für jedes unzerlegbare Element p. Für die Definition für Z. P. E.-Ring vgl. W. Krull, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* I_1 Heft 5 (1939), 27.

wobei jedes $\mathfrak{p}_{ij}$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal bedeutet. Nach Lemma III erhalten wir offenbar einen Widerspruch. Damit ist jedes von Null verschiedenes Element nicht als Produkt unendlich vieler Elemente darstellbar.

Ist p ein von Null verschiedenes unzerlegbares Element, so muss (p) ein Primideal sein. Sonst würde $(p)=\mathfrak{p}_1^{l_1}\ldots\mathfrak{p}_j^{l_j}$, $l_1+\cdots+l_j>1$ und anderseits folgte nach Satz 26 $\mathfrak{p}_i=(p_i)$ $(i=1,2,\ldots,j)$, $p=p_1^{l_1}\ldots\mathfrak{p}_j^{l_j}(a+r)$, wobei a eine ganze Zahl und r ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Das widerspricht der Annahme, dass p unzerlegbar ist.

Umgekehrt sind die Bedingungen offenbar hinreichend.

Über die Ringe ohne Einheitselement, aber mit Nullteiler.

Satz 27. *Ist $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Nullteiler, aber ohne Einheitselement, in dem jedes Hauptideal als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar ist, so ist jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}_i$ auch ein maximales Primideal.*

Da (0) kein Primideal ist, erhalten wir nach Lemma I $(0)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$, wobei $\mathfrak{p}_i$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal bedeutet. Ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_1$, so ist $\mathfrak{R}$ nilpotent und unser Satz schon einleuchtet.

Es sei damit $\mathfrak{R}$ nicht nilpotent. Dann muss $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{p}_i$ für alle $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ sein und wir können ein Element r finden, so dass $r\not\equiv\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ ist. Nach unserer Voraussetzung für $\mathfrak{R}$ gilt die Produktzerlegung $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$, in der jedes $\mathfrak{p}'$ kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal ist. Nun setzen wir

$$(1)\qquad (r)=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}\,,\qquad (r)\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}\mathfrak{R}\,,\qquad \mathfrak{p}_i\subset\mathfrak{p}_1'\,,$$

wo $\mathfrak{p}_i$ eines aus $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n$ bedeutet. Hier nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}_1'$ ausser $\mathfrak{p}_i$ noch ein von $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_i$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$ enthalt. Da $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{p}_i$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal ist, können wir ein durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element p von $\mathfrak{p}$ ausnehmen und

$$(2)\qquad (p)=\mathfrak{p}''\mathfrak{a}'\,,\qquad \mathfrak{p}''\leqq\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}_1'\,,\qquad \mathfrak{p}''\neq\mathfrak{p}_i\,,\qquad \mathfrak{p}''\geqq\mathfrak{p}_j$$

setzen, wobei $\mathfrak{p}_j$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal ist. Aus (1) und (2) folgt unmittelbar $(r)\mathfrak{a}''=\mathfrak{p}''\mathfrak{a}\mathfrak{R}$ für ein Ideal $\mathfrak{a}''$. Durch Multiplikation mit $\mathfrak{p}_1'$ ergibt sich nach (1) $(r)\mathfrak{a}''\mathfrak{p}_1'=(r)\mathfrak{p}''\mathfrak{R}$. Da $r\not\equiv\mathfrak{p}_j$ ist, so folgt daraus $\mathfrak{a}''\mathfrak{p}_1'\leqq\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{a}''\leqq\mathfrak{p}''$. Daraus folgt nach $(r)\mathfrak{p}_1'\leqq(r)\mathfrak{R}$ leicht $(r)\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}''=(r)\mathfrak{p}''\mathfrak{R}$, und folglich wird nach (2) $(r)(p)\mathfrak{p}_1'=(r)(p)\mathfrak{R}$. Da aber $pr\not\equiv\mathfrak{p}_i$ ist, erhalten wir $\mathfrak{p}_1'+\mathfrak{p}_i=\mathfrak{R}+\mathfrak{p}_i$, nämlich $\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{R}$. Also ergibt sich:

Ist (r) durch jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal unteilbar, so enthält jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Primideal $\mathfrak{p}'$ in der Produktzerlegung $(r)=\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\mathfrak{p}_m'^{b_m}$ ein und zwar das einzige Primideal.

Es sei damit $\mathfrak{p}_1'$ ein Primideal, welches ein und zwar das einzige in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}_1$ enthält und wir unterscheiden zwei verschiedene Fälle:

1. Die Anzahl n der in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale $\mathfrak{p}_i$ sei grösser als 1. Dann können wir nach $(0)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$ setzen

$$(3)\quad \begin{cases} r=r_1+r_2\subset\mathfrak{p}_1', \quad r'=r_1+r_2^4\subset\mathfrak{p}_1', \quad r_1r_2=0, \quad r_1\subset\mathfrak{p}_1, \\ r_1\not\subset\mathfrak{p}_i\ (i=2,3,\ldots\ldots,n), \quad r_2\subset\mathfrak{p}_i\ (i=2,3,\ldots\ldots,n), \quad r_2\not\subset\mathfrak{p}_1. \end{cases}$$

Nach unserer Voraussetzung für $\mathfrak{R}$ ergibt sich die Produktzerlegung

$$(4)\qquad (r)=\mathfrak{R}^b\mathfrak{p}_1'^{b_1}\ldots\ldots\mathfrak{p}_s'^{b_s}, \qquad (r')=\mathfrak{R}^{b'}\mathfrak{p}_1''^{b_1'}\ldots\ldots\mathfrak{p}_t''^{b_t'},$$

wobei jedes $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{p}_j''$ kein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal ist und ein und nur ein Primideal enthält. Nach $r_1r_2=0$ folgt $r_1\subset$, $r_2\subset\mathfrak{p}_i'$ $(i=1,2,\ldots\ldots,s)$, $r_1\subset$, $r_2\subset\mathfrak{p}_j''$ $(j=1,2,\ldots\ldots,t)$. Ist $(r)=(r')$, so wird $r_1+r_2=(r_1+r_2^4)(a+r'')$, wo a eine ganze Zahl und r'' ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Nach (3) ergibt sich daraus $r_2^2=r_2^4r'''$. Setzen wir $r_2^2r'''=e$, so wird $e=e^2\neq 0$ und daraus folgt $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{K}$, $e\subset\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{M}$ kein Einheitselement besitzt, denn $\mathfrak{R}$ besitzt kein Einheitselement. Aus $r_1\subset\mathfrak{p}_1$, $\not\subset\mathfrak{p}_i$ $(i=2,3,\ldots\ldots,n)$, $r_1\subset\mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_1'$ und anderseits ist nach $r_2^2\subset\mathfrak{K}$, $r_2^2\subset\mathfrak{p}_1'$ sofort $\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{p}_1'$. Also muss $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_1'$ sein.

Ist $(r)\neq(r')$, so müssen wir nach (4) drei verschiedene Fälle betrachten:

$$r=r'r_0', \qquad rr_0=r'r_0', \qquad rr_0=r',$$

wobei r_0 und r_0' beide durch jedes $\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$ unteilbar sind, und im zweiten Falle ein Primideal existiert, welches eines aus r_0 und r_0', aber nicht beide enthält. Im ersten Falle ergibt sich ganz genau wie beim obigen Falle $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_1'$. Im zweiten Falle erhalten wir $r_0r_1^2=r_0'r_1^2$, $r_0r_2^2=r_0'r_2^5$ und daher folgt $r_0-r_0'\subset\mathfrak{p}_i$ $(i=2,3,\ldots\ldots,n)$, $r_0-r_0'r_2^3\subset\mathfrak{p}_1$. Ist r_0' (bzw. r_0) durch ein Primideal $\mathfrak{p}'$ teilbar, so folgt daraus, dass r_0 (bzw. r_0') auch durch dasselbe Primideal teilbar ist, was aber unmöglich ist. Im dritten Falle ergibt sich unmittelbar $r_0r_1^2=r_1^2$ $r_0r_2^2=r_2^5$ und daraus folgt $r_0-r_2^3\subset\mathfrak{p}_1$. Setzen wir nun $r_0=r_2^3+p_1$, $p_1\subset\mathfrak{p}_1$, so erhalten wir $p_1\neq 0$, $r_1^2=r_1^2\,(r_2^3+p_1)=r_1^2p_1$. Da aber $r_1\not\subset\mathfrak{p}_i$ $(i=2,3,\ldots\ldots,n)$ ist, folgt daraus $p_1^{lt}-p_1\subset\mathfrak{p}_i$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$ $(p_1^{lt}-p_1)^l=0$ für eine ganze Zahl $l=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$. Danach erhalten wir $p_1^l=p_1^{2l}q\neq 0$, $p_1\subset\mathfrak{p}_1$ und eine Zerlegung von $\mathfrak{R}$ in eine direkte Summe $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dotplus\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^2\leqq\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_1'$. Nach $r_1^2=r_1^2p_1$ ergibt sich auch $r_1^2\subset\mathfrak{K}$. Wäre $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^2$, so würde $(m)\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$ für ein Element m aus $\mathfrak{M}$, welches durch jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal, das $\mathfrak{K}$ enthält, unteilbar ist. Daher folgte $m=m'm$, $m'\subset\mathfrak{M}$, $(m'-m'^{lt})^l=0$ und $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\dotplus\mathfrak{M}_2$ $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_1^2$. Dabei besitzt der Ring $\mathfrak{M}_1$ das Einheitselement. Da in $\mathfrak{R}$ nur endlich viele in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale existieren, und da $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement besitzt, hätten wir nach einer endlichen Fortsetzung dieses Verfahrens eine direkte Summe $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}_1\dot{+}\mathfrak{M}_2\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{M}_k\dot{+}\mathfrak{K}$ $(k\geqq 2)$ $\mathfrak{M}_k\neq\mathfrak{M}_k^2$. Das widerspricht der Voraussetzung $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^2$. Also muss $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{M}$ in eine direkte Summe unzerlegbar sein, da jedes Hauptideal aus $\mathfrak{R}$ als Potenzprodukt von Primidealen darstellbar ist. Für den Durchschnitt $\bar{\mathfrak{p}}_1'=\mathfrak{M}\frown\mathfrak{p}_1'$ gilt damit auch $\mathfrak{M}\bar{\mathfrak{p}}_1'\neq\bar{\mathfrak{p}}_1'$. Denn sonst gälte für ein durch jedes $\mathfrak{K}$ enthaltende minimale Primideal unteilbares Element $\bar{p}_1'$ aus $\mathfrak{p}_1'$ $(\bar{p}_1')=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{M}(\bar{p}_1')=(\bar{p}_1')$ und daher folgte die Zerlegung von $\mathfrak{M}$. Damit können wir ein durch $\mathfrak{M}\bar{\mathfrak{p}}_1'$ unteilbares Element $\bar{p}_1'$ von $\bar{\mathfrak{p}}_1'$ ausnehmen, und $(\bar{p}_1')$ muss ein Primideal sein, welches nach $(\bar{p}_1')\mathfrak{K}=(0)$ nicht identisch mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1'$ ist. Daraus folgt ein Widerspruch gegen unsere Annahme, dass $\mathfrak{p}_1'$ ein und zwar das einzige Primideal $\mathfrak{p}_1$ enthält. Demnach muss $\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{R}$ sein.

II. Die Anzahl n der in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale sei *1*. Dann muss $\mathfrak{p}^{a_1}=(0)$, $\mathfrak{p}_1\neq\mathfrak{p}_1^2$ sein. Damit sei $r_1\subset\mathfrak{p}_1$, $r_1\not\subset\mathfrak{p}_1^2$. Hier nehmen wir $\mathfrak{R}\supset\mathfrak{p}_1'\supset\mathfrak{p}_1$ an, dann gilt $(p_1')=\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}(p_1')=\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1'\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\not\subset\mathfrak{p}_1$ für ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element p_1' aus $\mathfrak{p}_1'$. Daraus folgt

$$\mathfrak{a}'(p_1')=\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}\,,\quad \mathfrak{a}'\subset\mathfrak{p}_1\,,\quad (p_1')\subseteqq\mathfrak{R}\mathfrak{a}\,,\quad \mathfrak{p}_1(p_1')=\mathfrak{R}\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}\,.$$

Für das Element r_1 erhalten wir danach $(r_1p_1')=(r_1)\mathfrak{R}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_1'(r_1p_1')=\mathfrak{R}(r_1p_1')$. Ist r_0 ein durch $\mathfrak{p}_1'$ unteilbares Element aus $\mathfrak{R}$, so ergibt sich daraus $r_0r_1p_1'=p_1''r_1p_1'$, $p_1''\subset\mathfrak{p}_1'$. Setzen wir nach $(r_1)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\not\subset\mathfrak{p}_1$ nun $r_0p_1'-p_1''p_1'=r_2$ oder $a_1(r_0p_1'-p_1''p_1')=r_2$, je nachdem $(r_1)=\mathfrak{p}_1$, oder nicht ist, wobei $a_1\subset\mathfrak{a}_1$, $a_1\not\subset\mathfrak{p}_1$ ist, so erhalten wir

$$r_1r_2=0\,,\quad r_2\not\subset\mathfrak{p}_1\,,\quad \mathfrak{p}_1(r_2)=(0)\,. \tag{5}$$

Ferner sei $r=r_1+r_2^2$, $r'=r_2^2$. Dann gilt hier auch die Formel (4).

Zunächst sei $(r)=(r')$. Dann folgt nach (5) $r_1=r_2^2(a+\bar{r})\neq 0$ $r_2^3(a+\bar{r})=0$, wobei a eine ganze Zahl und $\bar{r}$ ein Element aus $\mathfrak{R}$ bedeutet. Aus $r_2^2\not\subset\mathfrak{p}_1$ folgt daraus $r_2(a+\bar{r})\subset\mathfrak{p}_1$. Nach (5) ergibt sich ein Widerspruch $r_1=r_2^2(a+\bar{r})=0$.

Zweitens sei $(r)\neq(r')$. Dann müssen wir wie beim Falle I die drei verschiedenen Fälle

$$r=r'r_0'\,,\quad rr_0=r'r_0'\,,\quad rr_0=r'$$

betrachten. Dabei sind r_0 und r_0' beide durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbar, und im zweiten Falle existiert ein Primideal, welches eines aus r_0 und r_0', aber nicht beide enthält. Im ersten Falle ist nach (5) $r_2^3=r_2^3r_0'$, $r_0'-r_0'^3\subset\mathfrak{p}_1$. Da $\mathfrak{p}_1^{a_1}=(0)$ ist, so folgt daraus $(r_0'-r_0'^3)^{a_1}=0$, $r_0'^{a_1}=r_0'^{a_1+1}r_0''$, $r_0''\not\subset\mathfrak{p}_1$. Nun setzen wir $e=r_0'^{a_1}r_0''^{a_1}$, dann wird $e=e^2\not\subset\mathfrak{p}_1$ und daraus ergibt sich $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dot{+}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^2\not\subset\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}^2\subseteqq\mathfrak{p}_1$. Aus $\bar{\mathfrak{p}}_1'=\mathfrak{K}\frown\mathfrak{p}_1'$, $\bar{\mathfrak{p}}_1'=\bar{\mathfrak{p}}_1'^2$ folgte die Zerlegung $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_1\dot{+}\mathfrak{K}_2$ und wir hätten einen Widerspruch gegen die Eigenschaft von $\mathfrak{R}$. Aus $\bar{\mathfrak{p}}_1'^2\subset\bar{\mathfrak{p}}_1'$ ergibt sich auch ein Widerspruch gegen die Eigenschaft von $\mathfrak{R}$. Im zweiten

Fall ist $(r_0-r_0')r_2^3=0$, $r_0-r_0'\subset\mathfrak{p}_1$ und daraus ergibt sich auch ein Widerspruch, nämlich dass r_0 und r_0' durch dasselbe Primideal teilbar sind. Im letzten Falle ergibt sich auch ein Widerspruch ganz genau wie beim ersten Falle. Also muss $\mathfrak{p}_1'=\mathfrak{R}$ sein und unser Satz ist vollständig bewiesen.

Als das Hauptziel dieses Paragraphen erhalten wir jetzt mit Hilfe der vorigen Ergebnisse den

Hauptsatz II. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Ring ohne Einheitselement, aber mit Nullteiler. Ist jedes Hauptideal aus $\mathfrak{R}$ als Potenzprodukt endlich vieler Primideale darstellbar, so muss $\mathfrak{R}$ in die folgende direkte Summe zerlegbar sein:*

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dot{+}\mathfrak{K} \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{R}=\mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{K}$ einen Körper bedeutet. Ferner ist $\mathfrak{M}$ ein Ring ohne Einheitselement, in welchem die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. *Jedes von Null verschiedene Element ist nicht als Produkt unendlich vieler Elemente darstellbar.*

2. *Für jedes unzerlegbare Element p ist $(p)=\mathfrak{M}$.*

Dieser Schluss kann offenbar umgekehrt werden.

Ist $\mathfrak{R}$ nilpotent, so gibt es kein Primideal ausser $\mathfrak{R}$ und aus $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{R}^2$ folgt $(r)=\mathfrak{R}$. Für ein unzerlegbares Element p gilt danach auch $(p)=\mathfrak{R}$.

Im anderen Falle ist $(0)=\mathfrak{p}_1^{a_1}\ldots\mathfrak{p}_n^{a_n}$, wo jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal $\mathfrak{p}_i$ nach Satz 27 auch ein maximales Primideal ist. Nach Lemma I gibt es in $\mathfrak{R}$ nur endlich viele in $\mathfrak{R}$ minimale Primideale. Ist $\mathfrak{p}_i\neq\mathfrak{R}\mathfrak{p}_i$, so gibt es ein durch $\mathfrak{R}\mathfrak{p}_i$ unteilbares Element p_i aus $\mathfrak{p}_i$. Es sei p_i' ein Element aus $\mathfrak{p}_i^2$, welches durch das p_i enthaltende, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal ausser $\mathfrak{p}_i$ unteilbar, aber durch jedes andere, in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal teilbar ist, und es sei $p=p_i+p_i'$. Dann ist offenbar $(p)=\mathfrak{p}_i$. Ist $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_i\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}_i\neq\mathfrak{p}_i^2$, so können wir ganz genau wie beim obigen Falle beweisen, dass $(p)=\mathfrak{p}_i\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_i$ ist. Ist $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}_i^2$, so wird $(p_i)=(p_i)\mathfrak{p}_i$ für ein Element p_i aus $\mathfrak{p}_i$, welches durch jedes andere in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal ausser $\mathfrak{p}_i$ unteilbar ist. Daraus folgt $p_i=p_ip_i'$, $p_i'\subset\mathfrak{p}_i$, $(p_i'-p_i'^3)^{a_1+\cdots+a_n}=0$ und daher erhalten wir einen Widerspruch $p_i=0$, oder eine Zerlegung $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dot{+}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\subseteqq\mathfrak{p}_i$, wo $\mathfrak{K}$ ein Ring mit Einheitselement ist. Dabei muss ferner $\mathfrak{K}=\mathfrak{p}_i$ sein, sonst würde $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}^2$ für $\mathfrak{n}=\mathfrak{M}\frown\mathfrak{p}_i$ und daher folgte $\mathfrak{n}=(0)$, oder $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\dot{+}\mathfrak{K}_1$, was der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ widerspricht. *Nämlich muss jedes in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal ein Hauptideal sein.*

Wenn die Anzahl n der in $\mathfrak{R}$ minimalen Primideale grösser als 1 ist, so folgt ganz genau wie beim Beweis von Satz 27 $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dot{+}\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ ein Ring mit Einheitselement ist. Wäre $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}^2$, so würde $(m)\mathfrak{M}=(m)$ für ein Element m aus $\mathfrak{M}$, welches durch jedes $\mathfrak{K}$ enthaltende in $\mathfrak{R}$ minimale Primideal unteilbar ist, und daraus folgte $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\dot{+}\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_1^2=\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2^2=\mathfrak{M}_2$. Daraus ergäbe sich ein Widerspruch (vgl. s. 12). Damit muss $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{M}=(m)$ sein. Nach der Produktzerlegung jedes Hauptideals aus $\mathfrak{R}$ müssen

$\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{K}$ beide unzerlegbar sein, und ferner muss $\mathfrak{M}$ ein in $\mathfrak{R}$ minimales Primideal sein. Daraus folgt leicht, dass $\mathfrak{K}$ ein Körper ist, und die im Satz ausgesprochenen Bedingungen für $\mathfrak{M}$ können wir daraus gewinnen.

Wenn $n=1$ ist, müssen wir zwei verschiedene Fälle $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2$ und $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{R}^2$ unterscheiden. Im ersten Falle folgt aus $(r)=(r)\mathfrak{R}$ ohne weiteres $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}\dot{+}\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}^2$, $\mathfrak{M}\leqq\mathfrak{p}_1$ und aus der Tatsache, dass $\mathfrak{p}_1$ nilpotent ist, folgt ein Widerspruch $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{R}^2$. Im zweiten Falle ist $(r)=\mathfrak{R}$ für ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element r aus $\mathfrak{R}$ und nach dem obig gewonnenen Resultat ist ferner $\mathfrak{p}_1=(p_1)$. Ist $(p_1)\not<\mathfrak{R}^2$, so muss $(r)=(r^2+p_1)=\mathfrak{R}$ sein. Daher folgt $\mathfrak{R}=\mathfrak{M}+\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}=\mathfrak{p}_1$, wo $\mathfrak{K}$ ein Körper ist. Ist $(p_1)\subset\mathfrak{R}^2$, so wird $p_1=rr'$, $r'\subset\mathfrak{p}_1$ und nach $\mathfrak{p}_1=(p_1)$ ergibt sich daraus $p_1=p_1r''$. Dabei muss $r''\not<\mathfrak{p}_1$ sein: sonst würde $p_1=0$. Damit ist $\mathfrak{p}_1=(p_1)$ durch jede Potenz von $\mathfrak{R}$ teilbar. Da $\mathfrak{R}$ kein Einheitselement hat und da in diesem Falle der Teilerkettensatz in $\mathfrak{R}$ gilt, ergibt sich nach dem in der Fussnote geschriebenen Satz(1) ein Widerspruch. Da $\mathfrak{p}_1$ nilpotent ist, erfüllt $\mathfrak{M}=\mathfrak{p}_1$ offenbar die im Satz ausgesprochenen Bedingungen.

(1) S. Mori, Über Produktzerlegung der Ideale, dieses Jour. **2** (1932), 6.

Satz. *Ist $\mathfrak{p}$ ein vom Einheitsideal verschiedenes Primideal, so ist $\mathfrak{p}$ dann und nur dann teilbar durch jede Potenz von jedem echten Teiler von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ oder $\mathfrak{p}$ ein maximales Primideal vom Ring mit Einheitselement ist.*