ÜBER DEN FUNDAMENTALSATZ DER IDEALTHEORIE IN UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 25, Mai 1951)

In seiner Arbeit[1] hat herr W. Krull die Begriffe des Punktringes und des Zurückleitungsideals eingeführt und mit Hilfe dieser Begriffe den Fundamentalsatz bewiesen;

Ist $\mathfrak{K}$ ein unendlicher algebraischer Zahlkörper, und ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}$, so lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$ als ein kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches seiner sämtlichen Primärkomponenten darstellen.

In der vorliegenden Note werde ich den Fundamentalsatz in einem abstrakten Ringe $\mathfrak{O}$ beweisen, welcher den eben genannten Ring $\mathfrak{R}$ als einen spezialen Fall enthält. Als Stütze gebrauche ich hierbei den Begriff des Halbprimideals und eine Eigenschaft einer isolierten Primärkomponente eines Ideals.

1. Vorbereitende Untersuchungen

Es sei $\mathfrak{O}$ ein Ring, in dem folgende drei Bedingungen erfüllt sind;

I. *$\mathfrak{O}$ ist ein kommutativer Integritätsbereich mit Einselement.*

II. *Jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal ist durch mindestens ein Primideal*[2] *teilbar, und alle Primideale sind teilerlos.*

III. *Es sei $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{O})$ ein gegebenes Ideal, $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal*[3] *von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$. Ist π ein Element aus $\mathfrak{p}$, so gibt es ein solches Element s, dass $\pi s \in \mathfrak{h}$, $s \notin \mathfrak{p}$ ist.*[4]

Dann gilt in $\mathfrak{O}$ für isolierte Primärkomponenten eines Ideals folgender Satz.

1) W. Krull, Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern. Math. Zeit. 29 (1929), zitiert mit [W. Krull].

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits-und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) Ist $\mathfrak{h}$ die Gesamtheit aller Elemente h von der Art, dass eine Potenz von h durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, so nennen wir $\mathfrak{h}$ das "*Zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$."

4) *Anmerkung* 1. In diesem Ring $\mathfrak{O}$ wird keine Endlichkeitsbedingung vorausgesetzt.

Anmerkung 2. Ein Beispiel von solchem Ringe ist der Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen Zahlen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$ (vgl. §2 dieser Note).

Satz 1. *Es sei* $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{O})$ *ein gegebenes Ideal,* $\mathfrak{h}$ *das zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$, *und* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$. *Ist* $\mathfrak{q}$ *die Gesamtheit aller Elemente, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente* $s\notin\mathfrak{p}$ *durch* $\mathfrak{a}$ *teilbar ist, so ist* $\mathfrak{q}$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$.

Zunächst können wir leicht beweisen, dass $\pi^k\in\mathfrak{q}$ für eine endliche ganze Zahl k ist, wenn $\pi\in\mathfrak{p}$ ist. Denn, aus $\pi\in\mathfrak{p}$ folgt nach Bedingung III, dass für ein Element $s(\notin\mathfrak{p})$ $\pi s\in\mathfrak{h}$ gilt. Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{h}$ muss $\pi^k s^k\in\mathfrak{a}$ für eine passend grosse natürliche Zahl k sein. Da aber $s^k\notin\mathfrak{p}$ ist, so folgt $\pi^k\in\mathfrak{q}$ nach dem Struktur von $\mathfrak{q}$.

Zweitens folgt $\beta\in\mathfrak{p}$, wenn $\alpha\beta\in\mathfrak{q}$ und $\alpha\notin\mathfrak{q}$ ist. Denn, aus $\alpha\beta\in\mathfrak{q}$ folgt die Existenz eines Elements t von der Art, dass $\alpha\beta t\in\mathfrak{a}$, $t\notin\mathfrak{p}$ ist. Wäre $\beta\notin\mathfrak{p}$, so würde $\beta t\notin\mathfrak{p}$ und aus $\alpha\beta t\in\mathfrak{a}$ folgt $\alpha\in\mathfrak{q}$ entgegen der Annahme $\alpha\notin\mathfrak{q}$. Damit muss $\beta\in\mathfrak{p}$ sein.

Drittens behaupten wir $\mathfrak{q}\equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Denn, aus $\alpha\in\mathfrak{q}$ ergibt sich die Existenz eines Elements s, derart dass $\alpha s\in\mathfrak{a}$, $s\notin\mathfrak{p}$ ist. Wäre $\alpha\notin\mathfrak{p}$, so würde $\alpha s\notin\mathfrak{p}$, und danach wäre $\mathfrak{p}$ kein Teiler von $\mathfrak{a}$. Das widerspricht unserer Annahme $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{p}$. Also ist $\alpha\in\mathfrak{p}$ und folglich $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{p}$.

Aus diesen Tatschen folgt, dass $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges, schwaches Primärideal und ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist.

Endlich wollen wir beweisen, dass $\mathfrak{q}$ gleich dem Durchschnitt aller der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale ist, die Teiler von $\mathfrak{a}$ sind. Nämlich $\mathfrak{q}$ ist die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$. Denn, aus $\alpha\in\mathfrak{q}$ folgt die Existenz eines Elements s ausserhalb von $\mathfrak{p}$, derart dass $\alpha s\in\mathfrak{a}$ ist. Es sei $\mathfrak{q}_{(\tau)}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, welches ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Dann folgt $\alpha s\in\mathfrak{q}_{(\tau)}$ aus $\alpha s\in\mathfrak{a}$. Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{q}_{(\tau)}$ und $s\notin\mathfrak{p}$ folgt $\alpha\in\mathfrak{q}_{(\tau)}$ für alle τ. Somit ist $\mathfrak{q}\subseteqq\bigcap_{\tau}\mathfrak{q}_{(\tau)}$. Da aber $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primäridealteiler von $\mathfrak{a}$ ist, so erhalten wir $\mathfrak{q}=\bigcap_{\tau}\mathfrak{q}_{(\tau)}$.

Satz 2. *Ist* $\mathfrak{q}$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{q}$ *dann und nur dann gleich* $\mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{a}$ *durch ein einziges Primideal* $\mathfrak{p}$ *teilbar ist.*

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}$ gleich $\mathfrak{a}$ ist. Aus $\pi\in\mathfrak{p}$ folgt nach Bedingung III die Existenz eines Elements t von der Art, dass $\pi t\in\mathfrak{h}$, $t\notin\mathfrak{p}$ ist. Nach der Eigenschaft von $\mathfrak{h}$ muss damit $\pi^r t^r\in\mathfrak{a}$ sein. Da $t^r\notin\mathfrak{p}$ ist, so folgt nach der Annahme $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$ leicht $\pi^r\in\mathfrak{a}$.

Wäre nun $\mathfrak{p}'(\neq\mathfrak{O})$ ein von $\mathfrak{p}$ verschiedener Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so wäre $\pi^r\in\mathfrak{p}'$, und folglich $\pi\in\mathfrak{p}'$. So hätten wir $\mathfrak{p}'\supset\mathfrak{p}$, entgegen der Bedingung II, da $\mathfrak{p}'\neq\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'\neq\mathfrak{O}$ ist. Damit ist $\mathfrak{a}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mathfrak{a}$ keinen von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primidealteiler besitzt. Dann ist $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}$ für die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$, so gäbe es ein Element ρ in $\mathfrak{q}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{a}$. Damit gäbe es ein Element t von der Art, dass $\rho t \in \mathfrak{a}$, $t \notin \mathfrak{p}$ ist. So würde $\mathfrak{a}:(\rho) \not\subseteqq \mathfrak{p}$, weil $\mathfrak{a}:(\rho)$ das Element t enthält. Andererseits würde $\mathfrak{a}:(\rho) \neq \mathfrak{O}$, wegen $\rho \notin \mathfrak{a}$. Damit sollte $\mathfrak{a}:(\rho)$ nach Bedingung II mindestens einen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{O}$ verschiedenen Primidealteiler $\mathfrak{p}'$ besitzen. Daraus folgt ein Widerspruch, dass $\mathfrak{a}$ durch zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ teilbar wäre. Also muss $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}$ sein.

Satz 3. *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ lässt sich als Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten darstellen.*

Zunächst sei $\mathfrak{a}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar. Dann ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}$ nach dem Satz 2. In diesem Falle ist damit unsere Behauptung einleuchtend.

Zweitens sei $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ ein beliebiger Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, dann wird $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_{(\iota)}$ für jedes ι, und daher folgt $\mathfrak{a} \subseteqq \bigcap_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$.[5)]

Es sei δ ein Element aus $\bigcap_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$, dann ist $\delta \in \mathfrak{q}_{(\iota)}$ und daraus folgt die Existenz eines Elements s_{ι} von der Art, dass $\delta s_{\iota} \in \mathfrak{a}$, $s_{\iota} \notin \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist. Wegen $\mathfrak{a}:(\delta) \ni s_{\iota}$, gilt danach $\mathfrak{a}:(\delta) \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p}_{(\iota)})$ für jedes ι. Ferner folgt aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}:(\delta)$ die Tatsache, dass $\mathfrak{a}:(\delta)$ keinen Primidealteiler $(\neq \mathfrak{O})$ ausser allen Primidealteilern $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ von $\mathfrak{a}$ haben kann. Daraus folgt, dass $\mathfrak{a}:(\delta)$ keinen Primidealteiler ausser $\mathfrak{O}$ besitzt. Nach Bedingung II erhalten wir damit $\mathfrak{a}:(\delta)=\mathfrak{O}$. Da $\mathfrak{O}$ aber ein Einselement enthält, so muss $\delta \in \mathfrak{a}$ sein. Daraus folgt $\mathfrak{a} \supseteqq \bigcap_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$, und nach dem obig gewonnenen Resultat erhalten wir $\mathfrak{a}=\bigcap_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$.

Zum Schlusse werden wir noch einen Satz hinzufügen.

Satz 4. *Ist $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}(\neq \mathfrak{O})$, so ist $\mathfrak{h}$ gleich dem Durchschnitt sämtlicher Primidealteiler von $\mathfrak{a}$.*

Beweis. Wenn $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ ein beliebiger Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ ist, so ist $\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{p}_{(\iota)}$ und folglich $\mathfrak{h} \subseteqq \bigcap_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$.

Nehmen wir jetzt an, dass $\mathfrak{h} \subset \bigcap_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist, so gibt es ein Element δ in $\bigcap_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{h}$. Aus $\delta \in \mathfrak{p}_{(\iota)}$ folgt nach Bedingung III die Existenz eines Elements s_{ι} von der Art, dass $\delta s_{\iota} \in \mathfrak{h}$ $s_{\iota} \notin \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist. Damit soll $\mathfrak{h}:(\delta) \not\subseteqq \mathfrak{p}_{(\iota)}$ sein. Da aber $\delta \notin \mathfrak{h}$ ist, so erhalten wir $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{h}:(\delta) \neq \mathfrak{O}$. Wir

5) $\iota \in \mathfrak{J}$; $\mathfrak{J}$ ist eine Menge endlicher oder unendlicher Indexe.

können daher behaupten dass $\mathfrak{h}:(\delta)$ keinen Primidealteiler $(\neq\mathfrak{O})$ ausser allen Primidealteilern $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ von $\mathfrak{a}$ haben kann. Das ist nach Bedingung II unmöglich. Daraus folgt $\mathfrak{h}=\bigcap_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}$.

2. Nachweis des Hauptsatzes

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1\subset\mathfrak{K}_2\subset\cdots\cdots\subset\mathfrak{K}_\nu\subset\cdots\cdots$ definiert ist, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Körper der rationalen Zahlen ist. Wir nennen $\mathfrak{K}$ schlechthin einen unendlichen algebraischen Zahlkörper. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}$ und mit $\mathfrak{R}_\nu$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}_\nu$. Dann ist der Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{K}_\nu$ gleich $\mathfrak{R}_\nu$.

In $\mathfrak{R}$ gelten offenbar die am Anfang von vorigen Abschnitt ausgesprochenen Bedingungen I[6] und II[7].

Wenn die dritte Bedingung in $\mathfrak{R}$ erfüllt ist, so erkennen wir die Gültigkeit des Satzes 3 in $\mathfrak{R}$, und folglich erhalten wir einen neuen Beweis unseres Fundamentalsatzes.

Zum Beweise der Gültigkeit der Bedingung III in $\mathfrak{R}$, schicken wir folgende Hilfssätze vor. Sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$. Wenn wir $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{R}_\nu$ bzw. $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{R}_\nu$ mit $\mathfrak{a}_\nu$ bzw. $\mathfrak{h}_\nu$ bezeichnen, so gilt zunächst,

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{h}_\nu$ ist das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}_\nu$.*

Beweis. Aus $\alpha\in\mathfrak{h}_\nu$ folgt $\alpha\in\mathfrak{h}$. Dann ist offenbar $\alpha^r\in\mathfrak{a}$, so folgt $\alpha^r\in\mathfrak{a}_\nu$, da α ein Element aus $\mathfrak{R}_\nu$ ist. Wenn ein Element α' aus $\mathfrak{R}_\nu$ nilpotent in bezung auf $\mathfrak{a}_\nu$ ist, so wird $\alpha'\in\mathfrak{h}\cap\mathfrak{R}_\nu$. Damit ist unserer Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es seien $\mathfrak{p}_{\nu_1}, \mathfrak{p}_{\nu_2}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$ alle voneinander verschiedene Primidealteiler von $\mathfrak{a}_\nu$, dann ist $\mathfrak{h}_\nu=\mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 gilt offenbar $\mathfrak{h}_\nu\subseteqq\mathfrak{p}_{\nu_1}\cap\mathfrak{p}_{\nu_2}\cap\ldots\ldots\cap\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$. Es sei nun α irgendein Element aus $\mathfrak{p}_{\nu_1}\cap\mathfrak{p}_{\nu_2}\cap\ldots\ldots\cap\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$, dann ist α ein Element aus $\mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$, wegen $\mathfrak{p}_{\nu_1}\cap\mathfrak{p}_{\nu_2}\cap\ldots\ldots\cap\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}=\mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$; d. h.

$$\alpha\in\mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda} \tag{1}$$

Andererseits gilt in $\mathfrak{R}_\nu$ eine Primfaktorzerlegung von $\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_{\nu_1}^{e_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}^{e_2}\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}^{e_\lambda}$.

---

6) 7) Siehe etwa E. Stiemke; Über unendliche algebraische Zahlkörper. Math. Zeit, 25 (1926) Vgl. [W. Krull] s. 44.

Bezeichnen wir mit e das Maximum von $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_\lambda$, so erhalten wir ohne weiteres

$$(\mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda})^e \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu_1}^{e_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}^{e_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}^{e_\lambda} = \mathfrak{a}_\nu \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\alpha^e \in \mathfrak{a}_\nu$, und daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{h}_\nu$ nach Hilfssatz 1. Also muss $\mathfrak{h}_\nu \supseteqq \mathfrak{p}_{\nu_1} \cap \mathfrak{p}_{\nu_2} \cap \ldots\ldots \cap \mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$ sein und daher folgt $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu_1} \cap \mathfrak{p}_{\nu_2} \cap \ldots\ldots \cap \mathfrak{p}_{\nu_\lambda} = \mathfrak{p}_{\nu_1}\mathfrak{p}_{\nu_2}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu_\lambda}$.

Satz 5. *Es sei* $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R})$ *ein beliebiges Ideal in* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{h}$ *das zugehörige Halbprimideal von* $\mathfrak{a}$, *und* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$. *Ist* π *ein Element aus* $\mathfrak{p}$, *so gibt es ein solches Element* s, *dass* $\pi s \in \mathfrak{h}$, $s \notin \mathfrak{p}$ *ist.*

Zum Beweise sei π ein Element aus $\mathfrak{p}$. Wenn wir ν genügend gross auswählen, so wird π eine Zahl aus $\mathfrak{K}_\nu$. Bezeichnen wir wie früher, $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{K}_\nu$ resp. mit $\mathfrak{p}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\nu$, so wird nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{p}_\nu\mathfrak{b}_\nu$, wo $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu) = 1$ ist. Aus $\pi \in \mathfrak{p}_\nu$ folgt damit $\pi\mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{h}_\nu$. Danach gibt es in $\mathfrak{K}_\nu$ ein Element s von der Art, dass $s \in \mathfrak{b}_\nu$, $s \notin \mathfrak{p}_\nu$ und $\pi s \in \mathfrak{h}_\nu$ ist. Aus $\pi s \in \mathfrak{h}_\nu$ folgt $\pi s \in \mathfrak{h}$. Dabei können wir behaupten, dass $s \notin \mathfrak{p}$ ist. Denn, wäre $s \in \mathfrak{p}$, so würde $\mathfrak{p}$ Teiler von $(\mathfrak{p}_\nu, s)$, also sollte $\mathfrak{p}$ Einselement enthalten, da aus $s \notin \mathfrak{p}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, s) = \mathfrak{R}_\nu$ folgte. Mit diesem Widerspruch ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, erhalten wir folgenden

Hauptsatz. *Ist* $\mathfrak{R}$ *die Menge aller ganzen Zahlen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers* $\mathfrak{K}$, *so lässt sich jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten darstellen.*

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinen besten Dank aus.