ÜBER DIE SYMMETRIE DES PRÄDIKATES „RELATIV PRIM". II

Von

Shinjiro MORI

(Eingegangen am 10, Dez. 1950)

In einer früheren Arbeit[1] habe ich das Strukturproblem für die allgemeinen kommutativen Ringe, in denen das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist, in Angriff genommen. Es muss nun unsere nächste Aufgabe sein, die Eigenschaften der Ideale der oben genannten Ringe kennen zu lernen. Dabei müssen wir die Definition für ein starkes Primärideal teilweise ändern, und überdies ist anzunehmen, dass jedes Halbprimideal mindestens einen Primteiler besitzt, und dass jede Teilerkette der Primideale im Endlichen abbricht.

I. Reduction der Ideale durch Primärideale.

Einen Struktursatz über die oben genannten Ringe stellen wir der Reduktiontheorie von Idealen voran.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring,*[2] *in dem das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist, und bedeutet $\mathfrak{a}$ ein von (o) und $\mathfrak{R}$ verschiedenes Ideal von $\mathfrak{R}$, so ist das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal von $\mathfrak{R}$ verschieden.*

Nehmen wir nämlich an, dass das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ mit $\mathfrak{R}$ übereinstimmt, so folgt $\mathfrak{h}\neq\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden ist. Ist r irgend ein Element von $\mathfrak{R}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{a}$, so soll wegen der Eigenschaft von[3] $\mathfrak{R}$ $(r)=(r)\mathfrak{R}$ sein. Demnach ergibt sich $r=rr'=rr'^2=\dots$ für ein Element r'. Aus $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}$ folgt daraus $r\in\mathfrak{a}$, was unserer Annahme widerspricht.

Für ein tieferes Eindringen in die Eigenschaft der Ideale soll die Existenz eines Primteilers der Ideale untersucht werden. Das Problem ist jedoch schwer, obgleich bedeutsame Abhandlungen über diesen Gegenstand erschienen sind. Wir fügen nur die Äquivalenz der folgenden Annahmen bei.

I. *In $\mathfrak{R}$ besitzt jedes Halbprimideal $(\neq(o), \neq\mathfrak{R})$ mindestens einen Primidealteiler $(\neq\mathfrak{R})$.*

---

1) Über die Symmetrie des Prädikates „relative prim". Journal of Sci. of the Hiroshima Univ. 14 (1950), 102.

2) Wir schliesen den Ring aus, welcher kein Ideal ausser (o) und $\mathfrak{R}$ besitzt.

3) Für den Ring $\mathfrak{R}$ gilt:
Wenn $(r)\mathfrak{R}\neq 0$ ist, so wird $(r)\mathfrak{R}=(r)$, und wenn $(r)\mathfrak{R}=0$ ist, so gehört r zu allen von Null verschiedenen Idealen. loc. cit. 103.

II. *Im Restklassenring* $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$ *nach Halbprimideal* $\mathfrak{h}$ *liegt ein Primelement.*[4]

Satz 2. *Wenn in* $\mathfrak{R}$ *das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist, so sind die Voraussetzungen I und II äquivalent.*

Zunächst nehmen wir I an. Hiernach erhalten wir, nach Satz 1, ein Halbprimideal $\mathfrak{h}$ ausser $(\mathfrak{o})$ und $\mathfrak{R}$, und $\mathfrak{h}$ ist durch ein Primideal $\mathfrak{p}\,(\neq\mathfrak{R})$ teilbar. Ferner gilt $(r')\,\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{h}$ für ein durch $\mathfrak{h}$ unteilbares Element r'.[5] Da $\mathfrak{h}$ aber halbprim ist, so soll $r'\notin\mathfrak{p}$ sein. Wenn $\mathfrak{d}=(r',\mathfrak{h})\frown\mathfrak{p}\supset\mathfrak{h}$ ist, so wird $d^2\in\mathfrak{h}$ für jedes durch $\mathfrak{h}$ unteilbare Element d aus $\mathfrak{d}$, was unmöglich ist, denn $\mathfrak{h}$ ist halbprim. Demnach gilt $(r',\mathfrak{h})\frown\mathfrak{p}=\mathfrak{h}$.

Andererseits ist $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal[6] und folglich wird $r'\equiv r'^2r''\ (\mathfrak{p})$. Setzen wir nun $e=r'r''$, so wird $e\equiv e^2\,(\mathfrak{p})$, $(e,\mathfrak{p})=\mathfrak{R}$, $(e,\mathfrak{h})\frown\mathfrak{p}=\mathfrak{h}$. Das e entsprechende Element $\bar{e}$ in $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$ soll ein Primelement sein. Sonst wäre $(\bar{e})$ ein echter Teiler eines Ideals $(\bar{r}_1)$, und nach der Eigenschaft von $\mathfrak{R}$ hätten wir $\bar{r}_2\,((\bar{r}_1),\bar{\mathfrak{p}})\subseteqq\bar{\mathfrak{p}}$ für ein Element $\bar{r}_2\,(\neq0)$ ausserhalb von $\bar{\mathfrak{p}}$, was der Annahme widerspricht, dass $\mathfrak{p}$ prim ist.

Zweitens nehmen wir II an und $\bar{e}$ sei ein Primelement in $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$. Dann ist $\bar{e}\equiv\bar{e}^2\bar{r}'\,(\mathfrak{h})$. Setzen wir somit $\bar{e}_0=\bar{e}\bar{r}'$, so wird $(\bar{e}_0,\mathfrak{h})=(\bar{e},\mathfrak{h})$, $\bar{e}_0^2\equiv\bar{e}_0\,(\mathfrak{h})$. Die Menge aller x aus $\mathfrak{R}$ mit $x\bar{e}_0\equiv0\,(\mathfrak{h})$ ist ein Halbprimideal $\mathfrak{p}\,(\supseteqq\mathfrak{h})$, und dabei ist $\bar{e}_0\notin\mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{h}$ halbprim und $(\bar{e}_0)\,\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{h}$ ist, so soll $(\bar{e}_0,\mathfrak{h})\frown\mathfrak{p}=\mathfrak{h}$ sein. Für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$ gilt $\bar{e}_0\,(r-\bar{e}_0r)\equiv0\,(\mathfrak{h})$, und daraus folgt $r\equiv r\bar{e}_0\,(\mathfrak{p})$. Damit muss $r\in((\bar{e}_0),\mathfrak{p})$, also $(\bar{e}_0,\mathfrak{p})=\mathfrak{R}$ sein. Wenn $\mathfrak{p}$ kein Primideal ist, so erhalten wir zwei Elemente y und y' derart, dass $yy'\in\mathfrak{p}$, $y\notin\mathfrak{p}$, $y'\notin\mathfrak{p}$ ist, Dabei soll $y\neq y'$ sein, da $\mathfrak{p}$ halbprim ist. Nach $y\equiv\bar{e}_0y\not\equiv0\,(\mathfrak{p})$, $y'\equiv\bar{e}_0y'\not\equiv0\,(\mathfrak{p})$, $\bar{e}_0y,\ \bar{e}_0y'\in(\bar{e}_0,\mathfrak{h})$ erhalten wir $(\bar{e}_0y,\mathfrak{h})=(\bar{e}_0y',\mathfrak{h})$, denn $(\bar{e}_0)$ ist ein minimales Ideal in $\bar{\mathfrak{R}}$. Daraus folgt $\bar{e}_0^2y^2\in\mathfrak{h}$ nach $(\bar{e}_0)\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{h}$ und daher erhalten wir $\bar{e}_0y\in\mathfrak{h}$, was einen Widerspruch $\bar{e}_0y\in\mathfrak{p}$ ergibt. $\mathfrak{p}$ soll nämlich ein Primideal sein, das ein Teiler von $\mathfrak{h}$ ist.

Hier wollen wir eine neue Definition für ein starkes Primärideal einführen.[7]

---

4) Ein Element e heisst *Primelement*, wenn das Hauptideal (e) ein minimales Ideal ist.

5) 6) loc. cit. 103.

7) Es ist leicht beweisbar, dass jedes stark Primärideal von Noether auch stark im unseren Sinne ist. Die Umgekeherte gilt aber nicht.

Denn, bezeichnen wir durch $\mathfrak{R}=C[x_1, x_2, \dots x_n \dots]$ den ganzzahligen Polynombereich der unendlich vielen Unbestimmten $x_1, x_2, \dots x_n \dots$ und durch $\mathfrak{a}$ das Ideal $(2, x_1^2, x_2^3, \dots x_n^{n+1}, \dots x_1x_2, x_1x_3, \dots, x_nx_{n+1}, \dots)$ in $\mathfrak{R}$, so gilt im Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$

$$2x_i=0,\quad x_i^{i+1}=0,\quad x_ix_j=0\ (i\neq j)\quad (i, j=1, 2, \dots n, \dots).$$

Damit besitzt $\bar{\mathfrak{R}}$ das Einselement 1 und $\bar{\mathfrak{p}}=(x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$ ist ein und zwar einziges Primideal in $\bar{\mathfrak{R}}$. Jedes durch $\bar{\mathfrak{p}}$ teilbare Ideal $\bar{\mathfrak{q}}$ ist ein zu $\bar{\mathfrak{p}}$ gehöriges Primärideal. Hierbei ist $\bar{\mathfrak{q}}$ schwach im Sinne von Noether, aber ist stark im unseren Sinne.

Definition. *Ein Ideal* $\mathfrak{q}$ *heisst „stark primär,“ wenn in seinem Restklassenring* $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{q}$ *jeder Nullteiler nilpotent ist, und wenn für das zu* $\mathfrak{q}$ *gehörige Primideal* $\mathfrak{p}$ *ein solches Element* r *existiert, dass* $(r)\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}$, $r\notin\mathfrak{q}$ *ist.*

Satz 3. *In* $\mathfrak{R}$ *sei das Prädikat „relativ prim“ symmetrisch, und wir nehmen Voraussetzung I an. Dann ist jedes von Null verschiedene Ideal in* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von endlich, oder unendlich vielen starken Primäridealen, die nicht zu* $\mathfrak{R}$ *gehören, eindeutig darstellbar.*

Nach Satz 1 ist das zum Ideal $\mathfrak{a}\,(\neq o)$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{R}$ verschieden. Demnach ist $\mathfrak{a}$ nach I durch ein Primideal $(\neq\mathfrak{R})$ teilbar. Hieraus folgt, wie in meiner früheren Arbeit gezeigt wurde,[8] die Darstellbarkeit von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt der starken Primärideale, die nicht zu $\mathfrak{R}$ gehören. Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu beweisen, seien

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\ldots\ldots = \mathfrak{q}_1'\frown\mathfrak{q}_2'\frown\ldots\ldots$$

zwei Darstellungen von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von starken Primäridealen. Da nach der Symmetrie des Prädikates „relativ prim“ für das zu $\mathfrak{q}_1$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_1$ ein solches Element r_1 existiert, dass $(r_1)\mathfrak{p}_1\subseteqq\mathfrak{a}$, $r_1\notin\mathfrak{a}$ ist, so muss $r_1\notin\mathfrak{q}_1'$ für eines von $\mathfrak{q}_i'\,(i=1, 2, \ldots)$, etwa $\mathfrak{q}_1'$, sein. Danach muss das zu $\mathfrak{q}_1'$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_1'$ mit $\mathfrak{p}$, welches zu $\mathfrak{q}_1$ gehört, identisch sein.

Wenden wir den Satz 2 auf $\mathfrak{p}_1$ an, so wird

$$\bar{e}_1^2 \equiv \bar{e}_1\,(\mathfrak{p}_1),\quad (\bar{e}_1, \mathfrak{h})\frown\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h},\quad (\bar{e}_1, \mathfrak{p}_1) = \mathfrak{R}$$

für das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$, und dabei ist $\bar{e}_1$ ein Primelement in $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$. Aus $\mathfrak{h}\subseteqq\mathfrak{p}_i\,(i=1, 2, \ldots)$ folgt damit $(\bar{e}_1, \mathfrak{h})\subseteqq\mathfrak{p}_i\,(i\neq1)$ und eine Potenz von $\bar{e}_1$ wird in $(\mathfrak{q}_i, \mathfrak{h})\,(i\neq1)$ und $(\mathfrak{q}_i', \mathfrak{h})\,(i\neq1)$ enthalten. Da für jede grosse Zahl n stets $\bar{e}_1^2\equiv\bar{e}_1^n\,(\mathfrak{h})$ ist, so muss $(\bar{e}_1^2-\bar{e}_1^n)^k\equiv0\,(\mathfrak{a})$, $\bar{e}_1^{2k}\equiv\bar{e}_1^{4k}r(\mathfrak{a})$ sein. Setzen wir $e_0=\bar{e}_1^{2k}r$, so folgt daraus $e_0\equiv e_0^2\,(\mathfrak{a})$, $e_0\notin\mathfrak{p}_1$, $e_0\in\mathfrak{p}_i$, $e_0\in\mathfrak{p}_i'$ $(i=2, 3, \ldots)$. Damit werden

$$\mathfrak{q}_2\frown\mathfrak{q}_3\frown\ldots\ldots \not\subseteqq\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{q}_2'\frown\mathfrak{q}_3'\frown\ldots\ldots \not\subseteqq\mathfrak{p}_1,$$

denn sonst wäre $e_0^2\in\mathfrak{p}_1$ und danach $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{R}$. So erhalten wir $\mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}_1'$. Durch Wiederholung dieser Prozesse gelangen wir endlich auf $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{q}_i'\,(i=1, 2, \ldots)$.

II. Bedingungen für eine eindeutige Reduktion der Ideale.

Um das Umgekehrte des im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultates zu behandeln, nehmen wir die folgenden Eigenschaften an:

III. *In* $\mathfrak{R}$ *bricht die Teilerkette der Primideale im Endlichen ab.*

8) loc. cit. 105.

IV. *In* $\mathfrak{R}$ *ist jedes Ideal* $\mathfrak{a}\,(\neq o, \neq\mathfrak{R})$ *als Durchschnitt von endlich oder unendlich vielen starken Primäridealen eindeutig darstellbar, die zu lauter verschisdenen Primidealen, aber nicht zu* $\mathfrak{R}$ *gehören.*

Wir schicken demnach folgenden Satz voraus.

Satz 4. *Wenn in* $\mathfrak{R}$ *die Eigenschaften* III, IV *vorausgesetzt werden, und wenn* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges von Null verschiedenes Ideal ist, so sind die zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale durch einander unteilbar.*

Um dies nachzuweisen, sei $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_2\wedge\ldots$ die eindeutige Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt von starken Primäridealen $\mathfrak{q}_i$, und sei $(o)\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\mathfrak{R}$, worin $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ die zu $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ gehörigen Primideale sind. Setzen wir danach $\mathfrak{a}'=\mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_2$, so gibt ein Element r_2 derart, dass $r_2\in\mathfrak{q}_2$, $r_2\notin\mathfrak{p}_1$ ist, denn nach der Eigenschaft des starken Primärideals $\mathfrak{q}_2$ ist jedes Element aus $\mathfrak{p}_2$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{q}_2$. Es ergibt sich noch

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{q}_1\wedge(\mathfrak{a}', r_2) = \mathfrak{q}_1\wedge(\mathfrak{a}', r_2\mathfrak{p}_2)$$

Aus der Eigenschaft IV folgt

$$(\mathfrak{a}', r_2) = \mathfrak{q}_1'\wedge\mathfrak{q}_2'\wedge\ldots\ldots, \quad (\mathfrak{a}', r_2\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{q}_1''\wedge\mathfrak{q}_2''\wedge\ldots\ldots,$$

woraus noch folgt

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_1'\wedge\mathfrak{q}_2'\wedge\ldots\ldots = \mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_1''\wedge\mathfrak{q}_2''\wedge\ldots\ldots.$$

Durch die Eindeutigkeit der Reduktion von $\mathfrak{a}'$ folgt daraus

$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1'=\mathfrak{q}_1'', \quad (\mathfrak{a}', r_2) = \mathfrak{q}_2\wedge\mathfrak{q}_2'\wedge\ldots\ldots \quad (\mathfrak{a}', r_2\mathfrak{p}_2) = \mathfrak{q}_2\wedge\mathfrak{q}_2''\subset\ldots\ldots.$$

Wenn das zu $\mathfrak{q}_2''$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}_2''$ auch ein Teiler von $\mathfrak{p}_2$ ist, so betrachten $\mathfrak{a}''=\mathfrak{q}_2\wedge\mathfrak{q}_2''$ anstatt $\mathfrak{a}'$. Nach der Endlichkeit der Teilerkette von Primidealen sollen diese Prozesse im Endlichen abbrechen. Hiermit können wir annehmen, dass $\mathfrak{p}_2$ durch $\mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \ldots$ unteilbar ist, worin $\mathfrak{p}_2'', \mathfrak{p}_3'', \ldots$ die zu $\mathfrak{q}_2'', \mathfrak{q}_3'', \ldots$ gehörigen Primideale bedeuten. Es folgt damit $r_2\ni\mathfrak{q}_2''$, $r_2\in\mathfrak{q}_3'', \ldots$. Da aber $r_2\ni\mathfrak{q}_2$ ist, so folgt daraus $r_2\in(\mathfrak{a}', r_2\mathfrak{p}_2)$, $(\mathfrak{a}', r_2)=(\mathfrak{a}', r_2\mathfrak{p}_2)$. Nach $r_2\notin\mathfrak{p}_1$ haben wir $r_2\equiv r_2r_2'\,(\mathfrak{p}_1)$, $r_2'\in\mathfrak{p}_2$, $r_2'\notin\mathfrak{p}_1$, und danach schliessen wir $r_2\,(r_2'-r_2'^2)\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$, $r_2'\equiv r_2'^2\,(\mathfrak{p}_1)$. Ist r ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$, so wird $(rr_2'-r)\,r_2'\equiv 0\,(\mathfrak{p}_1)$, $r\equiv rr'_2\,(\mathfrak{p}_1)$, $r\in\mathfrak{p}_2$. Daraus folgt $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_2$, was unserer Annahme $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{p}_2$ widerspricht. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Mit Benutzung dieses Satzes können wir auch beweisen:

Satz 5. *Ist* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring, dem die Eigenschaften* III *und* IV *zukommen, so sind jede Primideale* $(\neq o, \neq\mathfrak{R})$ *durch einander unteilbar.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{p}$ ein von (o) verschiedenes Primideal, der durch ein von $\mathfrak{R}$ verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}'$ teilbar ist. Dann sind es zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

1. Gibt es mindestens ein Primärideal $\mathfrak{q}'$, welches zum Primideale $\mathfrak{p}'(\supset\mathfrak{p})$ gehört und $\mathfrak{q}'\not\supseteq\mathfrak{p}$ genügt, so folgt nach Satz 4 ein Widerspruch.

2. Wenn jedes Primärideal $\mathfrak{q}'$, welches zu $\mathfrak{p}'(\supset\mathfrak{p}\supset o)$ gehört, stets $\mathfrak{p}$ enthält, so betrachten wir alle Primärideale $\mathfrak{q}_i'$, welche zu allen Primteilern $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ gehören, und ihren Durchschnitt $\mathfrak{d}$. Dann ist $\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1'\frown\mathfrak{q}_2'\frown\mathfrak{q}_3'\frown\dots\supseteq\mathfrak{p}$. Wenn $\mathfrak{d}\supset\mathfrak{p}$ ist, so gilt für ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element d aus $\mathfrak{d}$ $(d,\mathfrak{p})=\mathfrak{q}_1''\frown\mathfrak{q}_2''\frown\dots$, $(d^2,\mathfrak{p})=\mathfrak{q}_1'''\frown\mathfrak{q}_2'''\frown\dots$, worin alle $\mathfrak{q}_i''$, $\mathfrak{q}_j'''$ das Primideal $\mathfrak{p}$ enthalten. Daraus folgt $(d,\mathfrak{p})=(d^2,\mathfrak{p})=\mathfrak{d}$, $d\notin\mathfrak{p}$, $d\in\mathfrak{p}'$. Wir haben daher

$$d\equiv d^2d'\not\equiv o\,(\mathfrak{p}),\quad dd'\equiv(dd')^2\,(\mathfrak{p}),\quad dd'\in\mathfrak{p}',$$

und für jedes Element r aus $\mathfrak{R}$ gilt

$$(r-rdd')\,dd'\equiv o\,(\mathfrak{p}),\quad r\equiv rdd'\,(\mathfrak{p}),\quad r\equiv o\,(\mathfrak{p}'),$$

daraus folgt ein Widerspruch $\mathfrak{R}=\mathfrak{p}'$. So erhalten wir

$$\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\dots\dots=\mathfrak{p}.$$

Das oben gewonnene Resultat $\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\dots=\mathfrak{p}$ widerspricht auch der Annahme IV. Unser Satz ist hiermit bewiesen.

Aus Satz 5 ergibt sich nun

Satz 6. *Wenn in $\mathfrak{R}$ die Eigenschaften* III *und* IV *vorausgesetzt werden, so ist in $\mathfrak{R}$ das Prädikat „relativ prim“ symmetrisch.*

Zunächst lässt sich nach Satz 5 beweisen, *dass für jeden Primteiler $\mathfrak{p}\,(\neq\mathfrak{R})$ vom Ideal $\mathfrak{a}\,(\neq o)$ ein solches Element r gibt, dass $r\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{a}$, $r\notin\mathfrak{a}$ ist.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\frown\mathfrak{q}_1\frown\dots$ die eindeutige Reduktion von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\dots$. Dann wird $\mathfrak{a}_1\not\subseteq\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{a}_1\subseteq\mathfrak{a}$. Wenn wir aus allen Primteilern von $\mathfrak{a}$ einen Durchschnitt $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\dots$ bilden, so soll $\mathfrak{h}$ halbprim sein. Wenn dabei $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\dots$ ist, so lassen wir $\mathfrak{p}$ weg, und auf diese Weise bekommen wir endlich eine reduzierte Darstellung $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_{i_1}\frown\mathfrak{p}_{i_2}\frown\dots$. Nach Satz 5 sind alle $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\dots$ maximal, und folglich wird im Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$, wie wir im Beweise von Satz 2 gesehen haben,

$$\bar{\mathfrak{R}}=(\bar{e}_{i_1},\bar{\mathfrak{p}}_{i_1}),\quad\bar{\mathfrak{R}}=(\bar{e}_{i_2},\bar{\mathfrak{p}}_{i_2}),\dots,\quad\bar{e}_{i_1}\cdot\bar{e}_{i_2}=0\dots,$$

worin $\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\dots$ Primelemente bedeuten.

Setzen wir $\mathfrak{h}_n=\mathfrak{p}_{i_1}\frown\mathfrak{p}_{i_2}\frown\ldots\frown\mathfrak{p}_{i_n}$, so folgt nach IV $\mathfrak{R}\mathfrak{h}_n=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\ldots$, und dabei sind $\mathfrak{q}_i$ die nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörigen Primärideale. Aus $\mathfrak{R}\mathfrak{h}_n\subseteqq\mathfrak{q}_i$ ergibt sich daraus $\mathfrak{h}_n\subseteqq\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{h}_n\subseteqq\mathfrak{q}_2,\ldots$. Wir erhalten danach $\mathfrak{R}\mathfrak{h}_n=\mathfrak{h}_n$. Setzen wir nun $n=1$, so finden wir

$$\mathfrak{p}_{i_1}=\mathfrak{p}_{i_1}\mathfrak{R}=\mathfrak{p}_{i_1}(\bar{e}_{i_2},\mathfrak{p}_{i_2}),\quad \mathfrak{R}=(\bar{e}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_1})=(\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\mathfrak{p}_{i_1}\mathfrak{p}_{i_2})=(\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\mathfrak{h}_2).$$

Wir erhalten durch Wiederholung dieses Prozesses

$$\mathfrak{R}=(\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\ldots\ldots\bar{e}_{i_n},\mathfrak{h}_{n-1}\mathfrak{p}_{i_n})=(\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\ldots\ldots\bar{e}_{i_n},\mathfrak{h}_n),$$

und demnach ergibt sich endlich

$$\mathfrak{R}=(\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\bar{e}_{i_3}\ldots\ldots\mathfrak{h}).$$

Damit stimmt die Gesamtheit aller Primteiler von $\mathfrak{a}$ mit der Gesamtheit von $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots$ überein. Es ist daraus leicht beweisbar, wie wir im Beweise von Satz 3 gesehen haben, dass die Gesamtheit von allen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primidealen mit der Gesamtheit von $\mathfrak{p}_{i_1},\mathfrak{p}_{i_2},\ldots$ auch übereinstimmt. Denn, wenn $\mathfrak{p}_{i_1}$ nicht zu $\mathfrak{a}$ gehört, so folgte ein Widerspruch $(\mathfrak{h},\mathfrak{a})=\mathfrak{h}\ni e'_{i_1}$. Aus den obig gewonnenen Resultaten ergibt sich, dass $\mathfrak{a}_1\not\subseteqq\mathfrak{p}$ ist. Denn, wäre $\mathfrak{a}_1\subseteqq\mathfrak{p}$, so folgte ein Widerspruch $(\mathfrak{h},\mathfrak{a}_1)\subseteqq\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{h},\bar{e})\subseteqq\mathfrak{p}$, wobei $\bar{e}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Element in $\mathfrak{R}$ bedeutet. Damit ist $\mathfrak{a}_1\not\subseteqq\mathfrak{p}$, und folglich wird $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}:\mathfrak{a}_1$. Da aber $\mathfrak{q}$ stark ist, so gilt nach Definition $r'\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}$, $r'\notin\mathfrak{q}$ für ein Element r'. Hieraus folgt $r'\mathfrak{a}_1\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{a}$, $r'\mathfrak{a}_1\not\subseteqq\mathfrak{a}$. So entsteht der Beweis unser Behauptung.

Zweitens sei $\mathfrak{b}\,(\neq\mathfrak{R})$ ein beliebiger Teiler von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{p}$ ein zu $\mathfrak{b}$ gehöriges Primideal. Nach Satz 5 gehört $\mathfrak{p}$ dann auch zu $\mathfrak{a}$, und nach obig gewonnenem Resultat ergibt sich, dass $r\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$, $r\notin\mathfrak{a}$ für ein Element r ist.

Endlich können wir leicht beweisen, dass $\mathfrak{R}$ keinen Totalnullteiler in bezug auf $\mathfrak{a}$ enthält. Denn, wäre $r\mathfrak{R}\subseteqq\mathfrak{a}$, $r\notin\mathfrak{a}$, so ergäbe sich aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\ldots$ der Widerspruch, dass r in $\mathfrak{a}$ enthalten sein müsste.

Diese letzten Eigenschaften sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass in $\mathfrak{R}$ das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist,[9] und wir gewinnen so unseren Satz.

Zum Schlusse können wir die im vorigen gewonnenen Resultate als Hauptsatz zusammenfassen:

Hauptsatz. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring,*[10] *in denen die folgenden*

9) loc. cit., 102.

10) Wir nehmen die Existenz eines von $\mathfrak{R}$ und (o) verschiedenen Ideals, aber nicht die Existenz des Einheitselements an.

Bedingungen befriedigt werden:

I. *Jedes Halbprimideal* ($\neq o, \neq \mathfrak{R}$) *besitzt einen von* $\mathfrak{R}$ *verschiedenen Primidealteiler.*

2. *Die Teilerkette von Primidealen bricht im Endlichen ab.*

So lässt sich jedes Ideal ($\neq o, \neq \mathfrak{R}$) *als Durchschnitt von endlich, oder unendlich vielen starken Primäridealen,*[11] *die nicht zu* $\mathfrak{R}$ *gehören, dann und nur dann eindeutig darstellen, wenn in* $\mathfrak{R}$ *das Prädikat „relativ prim" symmetrisch ist.*

11) Hier wird das starke Primärideal im neueren Sinne gefasst.