Über die Symmetrie des Prädikates "relativ prim".

Von

Shinjiro MORI.

(Eingegangen am 20 Jan. 1949)

In seinem Lehrbuch "Moderne Algebra" nennt Herr B.L. van der Waerden "*Ideal* $\mathfrak{b}$ *relativ prim zu Ideal* $\mathfrak{a}$", falls $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ ist; doch ist aber dieses Prädikat in allgemeinen Fällen offensichtlich nicht symmetrisch. So erhebt sich die Frage: *In welchem Ring diese Definition für die von Null verschiedenen Ideale symmetrisch ist?*; und diesem Problem ist die folgende Arbeit gewidmet.

Auf Grund hiervon nehme ich an, der zu behandelnde Ring sei kommutativ und besitze ein von $\mathfrak{R}$ und (o) verschiedenes Ideal.

Zunächst wird unser Problem im allgemeinsten Ring behandelt und dann sind die Ergebnisse dieser Betrachtungen bei speziellen, aber interessanten Ringen angewandt.

1. Diskussion im allgemeinen Ring.

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der am Anfang besprochenen Frage im allgemeinen kommutativen Ring beschäftigen. Dazu ist es genügend den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 1. *Im allgemeinen kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ ist das Prädikat "relativ prim" dann und nur dann symmetrisch, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Für jeden Teiler $\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{R})$ eines gegebenen Ideals $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R},\neq(o))$ gibt es stets ein solches Element r, dass $(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$, $r\nleq\mathfrak{a}$ ist.*

2. *Für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$ $(\neq(o))$ ist $(r)\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{a}$.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\neq(o)$, $\mathfrak{b}\neq(o)$ stets $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ folgt. Dann muss für jeden Teiler $\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\supset\mathfrak{a}$ sein, weil $\mathfrak{R}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ ist. Daraus folgt die Existenz eines Elementes r derart, dass

$$(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}, \qquad r\nleq\mathfrak{a}.$$

Da $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}:\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\neq(o)$ ist, so muss wegen der Symmetrie $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{R}$ sein, also ist $(r)\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{a}$ für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}(\neq(o))$. Die Bedingungen sind hiermit notwendig.

Umgekehrt setzen wir die Gültigkeit der Bedingungen voraus. Da aus $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:\mathfrak{a}$ leicht $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ folgt, so muss nach den Bedingungen 1 und 2 $(\mathfrak{b},\mathfrak{a})=\mathfrak{R}$ sein. Damit muss $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ sein. Denn sonst wäre $(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ für ein Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$, und daraus folgte $(r)(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=(r)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{a}$, was der Bedingung 2 widerspricht. Nämlich dass das Prädikat "relativ prim" symmetrisch ist.

Hieran schliesst sich noch folgender

Satz 2. *Ist das Prädikat "relativ prim" im Ring $\mathfrak{R}$ symmetrisch, so sind in $\mathfrak{R}$ die beiden Prädikate "relativ prim" und "teilerfremd" gleichbedeutend.*

Denn aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$, und wegen der Symmetrie ergibt sich $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\mathfrak{R}$.

Umgekehrt folgt aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})=\mathfrak{R}$, dass für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$ $(r)\mathfrak{b}\not\leqq\mathfrak{a}$ ist, weil sonst $(r)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{a}$, $r\notin\mathfrak{a}$ wäre, das wäre ein Widerspruch gegen die Bedingung 2 des Satzes 1. Daher muss $\mathfrak{b}$ relativ prim zu $\mathfrak{a}$ sein.

Um die Struktur der in Frage stehenden Ringe noch besser kennenzulernen, geben wir einen

Satz 3. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Symmetrie des Prädikates "relativ prim" sind*

1. *Wenn $(r)\mathfrak{R}\neq(o)$ für ein Element r ist, so gilt $(r)\mathfrak{R}=(r)$, und wenn $(r)\mathfrak{R}=(o)$ ist, so gehört r zu allen von Null verschiedenen Idealen.*

2. *Ist $\mathfrak{h}(\neq(o))$ ein Halbprimideal und $\mathfrak{R}\supset\mathfrak{m}\supset\mathfrak{h}$, so gibt es ein solches Ideal $\mathfrak{z}$, dass $(\mathfrak{m}, \mathfrak{z})=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{m}\frown\mathfrak{z}=\mathfrak{h}$ ist.*

3. *Für das zu einem Ideal $\mathfrak{a}(\neq(o))$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}$ gibt es immer ein Element r derart, dass $(r)\,\mathfrak{h}\leqq\mathfrak{a}$, $r\notin\mathfrak{a}$ ist.*

Wenn in $\mathfrak{R}$ das Prädikat "relativ prim" symmetrisch ist, und wenn $(r)\mathfrak{R}\neq(o)$ ist, so muss $(r)\mathfrak{R}=(r)\mathfrak{R}:\mathfrak{R}$ nach $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}:(r)\mathfrak{R}$ sein. Da aber $(r)\mathfrak{R}:\mathfrak{R}\geqq(r)\geqq(r)\mathfrak{R}$ ist, so folgt daraus $(r)=(r)\mathfrak{R}$. Im Falle $(r)\mathfrak{R}=(o)$ ist $r\in\mathfrak{a}$ für jedes Ideal $\mathfrak{a}(\neq(o))$, denn aus $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}:\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{R}$ und damit muss $r\in\mathfrak{a}$ sein. Wenn $\mathfrak{R}^2\neq(o)$ ist, so folgt aus $(r)=(r)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{R}^2$, oder $(r)\leqq\mathfrak{R}^2$ leicht $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2$. Wenn $\mathfrak{R}^2=(o)$ ist, so folgt daraus, dass $\mathfrak{R}$ ein Minimalideal von $\mathfrak{R}$ ist, denn für jedes Element r ist $(r)\mathfrak{R}=(o)$ und für jedes Ideal $\mathfrak{a}\neq(o)$ ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}:\mathfrak{R}$. Das ist ein Widerspruch für Definition von $\mathfrak{R}$. Es ist also nur möglich, dass $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2\neq(o)$ ist.

Lassen wir zweitens $\mathfrak{h}(\neq(o))$ ein Halbprimideal und $\mathfrak{m}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedener Teiler von $\mathfrak{h}$ sein, so ist nach Satz I der Idealquotient $\mathfrak{z}=\mathfrak{h}:\mathfrak{m}$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Ist $(r^n)\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{h}$ für ein Element r, so ist $(r)\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{h}$, denn $\mathfrak{h}$ ist halbprim. Danach ist $\mathfrak{z}$ auch halbprim und $\mathfrak{z}\frown\mathfrak{m}=\mathfrak{h}$. Im Falle $(\mathfrak{z}, \mathfrak{m})\subset\mathfrak{R}$ folgt nach Satz I $\mathfrak{z}'=\mathfrak{z}:(\mathfrak{z}, \mathfrak{m})\supset\mathfrak{z}$; also befindet sich in $\mathfrak{z}'$ ein Element q', das zu $\mathfrak{z}$ nicht gehört. Da aber $(q')\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{m}$, $(q')\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{z}$ sind, so folgt $(q')\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{h}$ und hieraus $q'\in\mathfrak{z}$ ein Widerspruch. Daher muss $(\mathfrak{z}, \mathfrak{m})=\mathfrak{R}$ sein.

Endlich sei $\mathfrak{h}$ das zu einem Ideal $\mathfrak{a}\neq(o)$ gehörige Halbprimideal, nämlich die Gesamtheit aller Elemente, deren endlichen Potenzen in $\mathfrak{a}$ enthalten sind. Nach der soeben erwähnten Resultat ist $(h)\mathfrak{R}\neq(o)$ und daraus $(h)\mathfrak{R}=(h)$ für ein Element h von $\mathfrak{h}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{a}$. Daraus folgt $h=r_0h=r_0{}^nh$ für ein Element r_0 von $\mathfrak{R}$. Wenn $\mathfrak{R}=\mathfrak{h}$ ist, so folgt daraus ein Widerspruch $h\in\mathfrak{a}$, denn in diesem Fall ist $r_0{}^n\in\mathfrak{a}$ für eine passend grösse natürliche Zahl n. Also ist $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{h}$. Wenden wir nun Satz I auf $\mathfrak{z}=\mathfrak{a}:\mathfrak{h}$ an, so erhalten wir damit $\mathfrak{z}\supset\mathfrak{a}$; daraus folgt die Bedingung 3.

Es seien in $\mathfrak{R}$ die Bedingungen erfüllt. Dann folgt aus der Bedingung I und den obig erwähnten Betrachtungen $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2\neq(o)$. Es sei $\mathfrak{a}$ ein von $\mathfrak{R}$ und (o) verschiedenes Ideal, und $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal. Wenn dabei $\mathfrak{h}=\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2$ ist, so ist nach Bedingung 3 $\mathfrak{z}_1=\mathfrak{a}:\mathfrak{h}\supset\mathfrak{a}$. Da aber $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{R}$ ist, so ergibt sich nach Bedingung I $(q_1)=(q_1)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{a}$, oder $q_1\in\mathfrak{a}$ für jedes Element q_1 aus $\mathfrak{z}_1$. Daraus folgt ein Widerspruch $\mathfrak{z}_1\leqq\mathfrak{a}$, also muss $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{h}$ sein.

Andererseits lassen wir $\mathfrak{b}$ ein von $\mathfrak{R}$ verschiedener echter Teiler von $\mathfrak{a}$ sein, dann ist $\mathfrak{b}_1=(\mathfrak{h},\mathfrak{b})\neq\mathfrak{R}$, denn sonst wäre $\mathfrak{R}$ das zu $\mathfrak{b}$ gehörige Halbprimideal, das, wie schon früher gezeigt wurde, unmöglich ist.

Ist nun $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{h}$, so folgt aus Bedingung 3 $(r)\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ für ein Element r $(\notin\mathfrak{a})$.

Ist zweitens $\mathfrak{b}_1\supset\mathfrak{h}$, so folgt nach Bedingung 2 die Existenz eines solchen Ideal $\mathfrak{b}_2$, dass $\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2=\mathfrak{h}$, $(\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{R}$ ist. Da für ein Element b_2 von $\mathfrak{b}_2$ ausserhalb von $\mathfrak{h}$ wir, wie schon früher bewiesen wurde, ein solches Ideal $\mathfrak{b}'$ erhalten, dass $((b_2),\mathfrak{h})\cap\mathfrak{b}'=\mathfrak{h}$, $((b_2,\mathfrak{h}),\mathfrak{b}')=\mathfrak{R}$ ist, so folgt aus $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2$ $((b_2),\mathfrak{b}')=((b_2^2),\mathfrak{b}'^2,\mathfrak{h})=\mathfrak{R}$. Nach $((b_2),\mathfrak{h})\cap\mathfrak{b}'=\mathfrak{h}$ ergibt sich damit $((b_2),\mathfrak{h})=((b_2^2),\mathfrak{h})$. Aber es ist $(b_2^2)\mathfrak{R}\neq(o)$ und daraus folgt $((b_2),\mathfrak{h})=((b_2^2)\mathfrak{R},\mathfrak{h})$. Danach ist $b_2\equiv b_2^2r$ $(\mathfrak{h})$ für ein Element r aus $\mathfrak{R}$. Setzen wir $b_2r=e$, so erhalten wir damit $e\equiv e^2$ $(\mathfrak{h})$, $b_2\equiv b_2e(\mathfrak{h})$. Aus $e-e^2=h\in\mathfrak{h}$ folgt auch $(e-e^2)^k\in\mathfrak{a}$, da $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal ist. Damit ist $e^k\equiv e^{2k}r'(\mathfrak{a})$. Setzen wir nun $e^kr'=e_2$, so wird danach $e_2\equiv e_2^2(\mathfrak{a})$, $e^k\equiv e^ke_2(\mathfrak{a})$. Bezeichnen wir ausserdem mit $\mathfrak{m}$ die Gesamtheit aller Elemente m derart, dass $e_2m\equiv m(\mathfrak{a})$ ist, und mit $\mathfrak{n}$ die Gesamtheit aller Elemente n derart, dass $e_2n\in\mathfrak{a}$ ist, so bemerken wir leicht $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{n}=\mathfrak{a}$. Dabei ist aber nach $e_2\in\mathfrak{b}_2$ $\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{b}_2$. Aus $\mathfrak{b}_1(e_2)\leqq\mathfrak{h}$ folgt $b_1^le_2^l\equiv b_1^le_2\equiv 0(\mathfrak{a})$ für jedes Element b_1 aus $\mathfrak{b}_1$ und daraus ergibt sich $b_1^l\in\mathfrak{n}$. Damit ist das zu $\mathfrak{n}$ gehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{b}_1$. Wir erhalten daher unter Bedingung 3 ein solches Element s, dass $\mathfrak{b}_1(s)\leqq\mathfrak{n}$, $s\notin\mathfrak{n}$ ist. Daraus folgt $se_2\notin\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1(se_2)\leqq\mathfrak{a}$. Da aber $\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{b}_1$ ist, so folgt daraus $\mathfrak{b}(se_2)\leqq\mathfrak{a}$, $se_2\notin\mathfrak{a}$. Also ist in $\mathfrak{R}$ die Bedingung I von Satz I erfüllt.

Endlich folgt aus der Bedingung I, dass für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}$ $(r)\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{a}$ ist. Nach Satz I ist hiermit unserer Satz in allen Teilen vollständig bewiesen.

2. Diskussion in speziellen Ringen.

Nachdem im vorigen Abschnitt die Symmetrie des Prädikates "relativ prim" im allgemeinsten Ring betrachtet war, treten nun die Diskussion in den speziellen, aber interessanten Ringen mehr in den Vordergrund.

Wir verstehen zunächst unter $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring, in dem jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Ideal stets ein Maximalideal als Teiler besitzt. Dann haben wir Satz 3 in folgender einfacher Form.

Satz 4. *Es sei jedes von $\mathfrak{R}$ verschiedene Ideal in $\mathfrak{R}$ durch ein Maximalideal teilbar. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Symmetrie des Prädikates "relativ prim"*

1. *Für jedes Element r ausserhalb von $\mathfrak{a}(\neq(0))$ ist $(r)\mathfrak{R}\nleqq\mathfrak{a}$.*

2. *Für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$, das ein Teiler von $\mathfrak{a}(\neq(0))$ ist, gibt es ein Element r' derart, dass $(r')\mathfrak{m}\leqq\mathfrak{a}$, $r'\notin\mathfrak{a}$ ist.*

Nach Satz I sind die Bedingungen offentlich notwendig.

Umgekehrt aus den Bedingungen können wir zunächst die folgenden Hilfssätze aussprechen.

I. *Maximalideal ist prim und umgekehrt ist Primideal $(\neq(0))$ maximal.*

Angenommen, es sei $r_1r\in\mathfrak{m}$, $r_1\notin\mathfrak{m}$, $r_2\notin\mathfrak{m}$ für ein Maximalideal $\mathfrak{m}$, dann ist $((r_1),\mathfrak{m})=\mathfrak{R}$ nnd daraus folgt $(r_2)\mathfrak{R}\leqq\mathfrak{m}$, $r_2\notin\mathfrak{m}$, was der Bedingung I widerspricht. Also ist $\mathfrak{m}$ prim. Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein von (o) verschiedenes Primideal, und $\mathfrak{m}$ ein maximaler Teiler von $\mathfrak{p}$, so ist nach Bedingung 2 $(r')\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{p}$, $r' \notin \mathfrak{p}$ für ein Element r'. Da aber $\mathfrak{p}$ prim ist, so muss damit $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ sein.

II. *Sind* $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$ *alle Maximalideale, welche ein Ideal* $(\mathfrak{a} \neq (0))$ *enthalten, und* $m_i'(i=1,2,\cdots)$ *die Elemente, welche beziehungsweise in* $\mathfrak{m}_i$ *nicht liegen, so ist*

$$\mathfrak{m} = ((m_1'), (m_2'), \ldots, \mathfrak{a}) = \mathfrak{R}$$

Denn, wäre $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{R}$, so würde etwa $\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{m}_k$ und daraus folgt $m_k' \notin \mathfrak{m}$. Andererseits ist aber sicher $m_k' \in \mathfrak{m}$. Danach muss $\mathfrak{m} = \mathfrak{R}$ sein.

Es seien nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei von $\mathfrak{R}$ und (o) verschiedene Ideale und $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots; \mathfrak{m}_1', \mathfrak{m}_2' \ldots$ beziehungsweise die zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gehörigen Maximalideale.

Ist $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_1'$, so wird $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \leqq \mathfrak{m}_1$. Damit folgt aus Bedingung 2 $r'\mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{a}$, $r' \notin \mathfrak{a}$ und $r''\mathfrak{m}_1 \leqq \mathfrak{b}$, $r'' \notin \mathfrak{b}$, woraus wir $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}:\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}:\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}:\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{b}$ erhalten.

Sind alle $\mathfrak{m}_i$ von allen $\mathfrak{m}_i'$ verschieden, so enthält $\mathfrak{b}$ ein Element m_i', das in $\mathfrak{m}_i$ nicht liegt. Nach Hilfssatz II gilt es damit $(\mathfrak{a}, (m_1'), (m_2'), \ldots) = \mathfrak{R}$. Da aber $m_i' \in \mathfrak{b}$ ist, so folgt daraus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{R}$, woraus $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}:(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}:\mathfrak{R}$, $\mathfrak{b}:\mathfrak{a} = \mathfrak{b}:(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{b}:\mathfrak{R}$ folgt. Nach Bedingung I erhalten wir damit $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}:\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Auf Grund dieser Ergebnisse können wir schliessen, dass das Prädikat "relativ prim" in $\mathfrak{R}$ symmetrisch ist.

Auf Grund der Hilfssätze können wir noch den folgenden Satz beweisen.

Satz 5. *Ist in* $\mathfrak{R}$ *das Prädikat symmetrisch, so ist jedes von Null verschiedene Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von endlich oder unendlich vielen Primärideaien darstellbar, was zu Maximalidealen gehört.*

Ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal, das ein Ideal $\mathfrak{a} \neq (o)$ enthält, so ist nach Hilfssatz I $\mathfrak{m}$ prim. Es sei nun $\mathfrak{z}$ die Gesamtheit aller solchen Elemente q aus $\mathfrak{m}$, dass $qr \in \mathfrak{a}$ für ein Element r ausserhalb von $\mathfrak{m}$ ist. Dann ist $\mathfrak{z}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal. Dieser Beweis gestaltet sich folgendermassen.

Zunächst ist $\mathfrak{z}$ ein $\mathfrak{a}$ enthaltendes Ideal, da nach 1 $\mathfrak{m}$ prim ist.

Zweitens sei $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{z}$ gehörige Halbprimideal, so ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}$. Denn, da $\mathfrak{m}$ prim ist, so muss $\mathfrak{h} \leqq \mathfrak{m}$ sein. Ist $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$, so folgt nach Satz 4, dass $(r)\mathfrak{m} \leqq \mathfrak{h}$, $r \notin \mathfrak{h}$ ist. Dabei muss $r \notin \mathfrak{m}$ sein, da $\mathfrak{h}$ halbprim ist. Für ein beliebiges Element m aus $\mathfrak{m}$ gilt es danach $(rm)^k \in \mathfrak{z}$, $r^k \notin \mathfrak{m}$. Daraus folgt $r'r^k m^k \in \mathfrak{a}$, $r' \notin \mathfrak{m}$ für ein Element r' und nach $r'r^k \notin \mathfrak{m}$ erhalten wir noch $m^k \in \mathfrak{z}$, also ist $m \in \mathfrak{h}$, was unmöglich ist.

Endlich ist immer $mr' \notin \mathfrak{z}$ für ein Element m aus $\mathfrak{m}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{z}$ und ein Element r' ausserhalb von $\mathfrak{m}$. Denn, sonst würde $mr'r \in \mathfrak{a}$ für ein Element r ausserhalb von $\mathfrak{m}$ und daraus folgt nach der Definition von $\mathfrak{z}$ $m \in \mathfrak{z}$, was unserer Annahme widerspricht. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass $\mathfrak{z}$ ein zu $\mathfrak{m}$ gehöriges Primärideal ist.

Betrachten wir alle verschiedene Maximalideale $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots$, die $\mathfrak{a}$ enthalten, so entspricht jedem $\mathfrak{m}_i$, wie schon früher, ein Primärideal $\mathfrak{z}_i$. Mit diesen erhalten wir $\mathfrak{d} = \mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 \cap \mathfrak{z}_3 \cap \ldots$ und dabei ist $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}$. Denn, ist ein Element d aus $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{a}$ nicht enthalten, so wird nach der Definition von $\mathfrak{z}_i$ $dm_i' \in \mathfrak{a}$, $m_i' \notin \mathfrak{m}_i$ $(i=1,2\ldots)$. Nach Hilfssatz 2 ist aber $\mathfrak{R} = (\mathfrak{a}, (m_1'), (m_2'), \ldots)$. Damit ist $(d)\mathfrak{R} \leqq \mathfrak{a}$, $d \notin \mathfrak{a}$; was nach Satz I unmöglich ist. Es ist nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}_1 \cap \mathfrak{z}_2 \cap \ldots$.

Schliesslich wollen wir den allgemeinen Satz I noch auf den Ring $\mathfrak{R}$ mit Teilerkettensatz anwenden. Zu diesem Zwecke ist es genug, den folgenden Satz hinzuzufügen.

Satz 6. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring mit Teilerkettensatz. Dann sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Symmetrie des Prädikates "relativ prim"*

1. *Existenz des Einheitselements*
2. *Vielfachenkettensatz.*

Nach der Annahme der Symmetrie folgt aus Satz 3 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}^2+(o)$. Hiermit folgt nach Teilerkettensatz die Existenz des Einheitselements. Da jedes von Null verschiedene Primideal in $\mathfrak{R}$ nach Satz I maximal ist, so können wir durch Teilerkettensatz die Gültigkeit des Vielfachenkettensatzes beweisen. Das Umgekehrte ist nach Satz I offensichtlich.