Über ganzzahlige quadratische Gleichungen, die eine reduzierte Zahl als Wurzel besitzen.

Von

Shinjiro Mori.

(Eingegangen am 30 Nov., 1948)

Bekanntlich ist *die Kettenbruchentwickelung der reellen positiven Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung periodisch.*[1] Für diesen klassischen Lagrange'schen Satz gebe ich im folgenden einen elementaren Beweis, mit dem ich eine neue Definition für reduzierte Zahl verbinde, und aus dieser Überlegung gewinne ich zugleich einen Satz über die Lösung der Pell'schen Gleiching.

1. Beweis des Lagrange'schen Satzes.

Sei $f(x)=ax^2+bx+c=0$ eine ganzzahlge primitive Gleichung mit positiver Diskriminante $D=b^2-4ac>0$, jedoch eine Wurzel positiv, und also $a>0$. Nun können wir, unter (x) die Matrix $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ verstehend, die obige Gleichung auch in der Form

(1) $$(x)'\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}(x)=0$$

umschreiben, und indem wir auf diese Formel die Transformation

(2) $$x=k+\frac{1}{x'}, \quad \text{oder} \quad (x)=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x')$$

anwenden, ergibt sich

(3) $$(x')'\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{pmatrix}(x')=0, \quad \text{oder} \quad a_1x'^2+b_1x'+c_1=0,$$

worin nach $\begin{pmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $$a_1=ak^2+bk+c=f(k), \quad b_1=2ak+b=f'(k), \quad c_1=a,$$

(5) $$b_1^2-4a_1c_1=b^2-4ac=D>0.$$

Hierzu nehmen wir noch Folgendes an; x ist eine positive Wurzel von (I) und k eine positive ganze Zahl, oder Null, so dass x zwischen k und $k+1$ liegt. Daher sind a_1, b_1, c_1, auch ganze Zahlen. Wenn aber $k=0$ ist, so muss nach (2) die positive Wurzel x' von (3) grösser als 1 sein. Damit werden wir uns weiterhin auf die Betrachtung vom Falle $k\geqq 1$ beschränken dürfen.

Da die Funktion $y=f(x)=ax^2+bx+c$ bei der vorerwähnten Annahme eine Parabel darstellt, so können wir nach dem Zeichen von c drei Fälle unterscheiden

1. $f(0)=c>0, \quad k>\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},$

2. $f(0)=c>0, \quad k<\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a},$

3. $f(0)=c<0.$

---

(1) H. Weber, Algebra 1, S. 431.

Im Falle 1 muss $f(k)<0$ sein, denn k liegt zwischen zwei positiven Wurzeln von $f(x)=0$. Damit gilt bei der Substitution (2)

$$a_1=f(k)<0, \qquad c_1=a>0.$$

Nähmlich gehört die transformierte Gleichung zum Falle 3.

Im Falle 2 muss $b<0$ sein. Da aber unter den geeigneten Voraussetzungen $f(k)<0$ ist, so folgt, dass $f(x)$ am Punkte $x=k$ abnehmend ist, also $b_1=f'(k)<0$. Hieraus ergibt sich nach (4)

$$-b_1=-2ak-b, \qquad -b_1>0, \qquad -b>0,$$

also ist $|b_1|<|b|$. Nach (5) bleibt aber die Diskriminante bei der Substitution (2) ungeändert, und folglich muss nach einer endlichen Zahl von Substitutionen dieser Art (2) eine zum Falle 3 gehörige Gleichung vorkommen.

Im Falle 3 liegt k zwischen zwei Wurzeln von $f(x)=0$, also ist $a_1=f(k)<0$. Da aber $c_1=a>0$ ist, so erhalten wir durch die Substitution (2) wieder eine zum Falle 3 gehörige Gleichung. Andererseits ist die Anzahl der Zum Falle 3 gehörigen Gleichungen mit einer gegebenen Diskriminante endlich.

Eine Selbstverständliche Folge der bisherigen Betrachtungen ist der Lagrange'sche Satz.

2. Fine Definition der reduzierten Zahl.

Wir wollen jetzt um die zum Falle 3 gehörigen Gleichungen noch näher untersuchen. Da diese gleichungen in der From

$$ax^2+bx-c=0, \qquad a>0; \qquad c>0,$$

darstellbar sind, so unterscheiden sich zwei Fälle, je nachdem b positiv oder negativ ist.

Im Falle $b>0$ liegt k zwischen zwei Wurzeln von $f(x)=0$, denn nach unserer Voraussetzung ist eine Wurzel positiv. Hieraus folgt $a_1=f(k)<0$, $c_1=a>0$. Da nach $k\geqq 0$ der Minimumpunkt $-\dfrac{b}{2a}$ kleiner als k ist, so erhalten wir $b_1=f'(k)>0$. Es entsteht damit die Gleichung mit $b<0$ aus der Gleichung mit $b>0$ dadurch, dass wir $x=k+\dfrac{1}{x'}$ setzen.

Im Falle $b\leqq 0$ können wir die Gleichung in der Form

$$f(x)=ax^2-bx-c=0, \qquad a>0, \qquad b\geqq 0, \qquad c>0$$

setzen, und folglich ist $\left[\dfrac{b}{a}\right]\leqq k$. Nach der am Anfang erwähnten Bemerkung können wir hierzu $k\geqq 1$ setzen, was im Gange unserer Überlegung die Allgemeinheit nicht wesentlich beschränkt. Daraus folgt $k>\dfrac{b}{2a}$ und damit ist $b_1=f'(k)>0$. Anderseits ist aber $a_1=f(k)<0$, $c_1=a>0$, also gehört die transformierte Gleichung $a_1x'^2+b_1x'+c_1=0$ wieder zu derselben Art, wie $ax^2-bx-c=0$ und die positive Wurzel dieser Gleichung ist auch grösser als 1.

In der Gleichung $-a_1x'^2-b_1x'-c_1=0$ sind dann

$$-a_1>0, \quad b_1>0, \quad c_1>0, \quad \frac{b_1+\sqrt{b_1^2+4(-a_1)c_1}}{-2a_1}>1$$

und daraus folgt leicht

(6) $b_1+c_1>-a_1$.

Nach (4) ist aber

$$(-a_1)+b_1=c+bk-ak^2+2ak-b=c+b(k-1)-a(k-1)^2+a,$$

worin $k\geqq 1$ und $-f(k-1)>0$ ist. Wir schliessen also

$$(-a_1)+b_1>a=c_1.$$

Dies führt mit Hilfe von (6) zu dem Resultat(2)

$$b_1>|(-a_1)-c_1|.$$

Unter Zusammenfassung aller obig gewonnen Einzelergebnisse notieren wir den

Satz. *Durch endlich malige Wiederholung der Substitutionen* $x=k+\dfrac{1}{x'}$ *für ein ganzzahliges* k *erreichen wir von einer ganzzahligen Gleichung* $ax^2+bx+c=0$ *mit einer positiven Wurzel endlich eine ganzzahlige Gleichung* $a_m x^2-b_m x-c_m=0$, *worin* $a_m>0$, $b_m>0$, $c_m>0$ *und* $b_m>|a_m-c_m|$ *sind. Diese Gleichung verändert sich durch die Substitution* $x=k+\dfrac{1}{x'}$ *wieder in eine Gleichung mit denselben Eigenschaften.*

Hieraus führen wir folgenden Begriff ein;

Definition. Die positive Wurzel einer ganzzahligen Gleichung $ax^2-bx-c=0$ von der Art, dass $a>0$, $b>0$, $c>0$ und $b>|a-c|$ sind, heisst *reduzierte Zahl.*

Hierbei ist zu beachten, dass die Übereinstimmung dieser Benennung mit derselben von Gauss(3) leicht beweisbar ist.

3. Über die rein periodische Kettenbruchentwickelung.

Auf Grund unserer Definition für reduzierte Zahl beweisen wir direkt den

Satz. *Die Kettenbruch-entwickelung einer positiven Wurzel* ω *von* $ax^2-bx-c=0$ *ist dann und nur dann rein periodisch, wenn* $a>0$, $b>0$, $c>0$ *und* $b>|a-c|$ *sind.*

Zunächst sei ω rein periodisch entwickelbar. Dann wird $(\omega)=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_n&1\\1&0\end{pmatrix}(\omega)$ $=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}(\omega)$, worin $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\delta\geqq 0$, $\alpha\delta-\beta\gamma=(-1)^n$ und α die grösste und δ die kleinste ist. Wenn wir den Ausdruck in der Form $\gamma\omega^2-(\alpha-\delta)\omega-\beta=0$ umschreiben, so folgt nach der Vergleichung der Koeffizienten

$$\frac{a}{\gamma}=\frac{b}{\alpha-\delta}=\frac{c}{\beta},$$

danach sind $a>0$, $b>0$, $c>0$. Da aber $\alpha-\delta>|\beta-\gamma|$ ist, so folgt auch $b>|a-c|$.

Umgekehrt sei ω eine positive Wurzel einer Gleichung, die die im Satz gesagten Bedingungen erfüllt. Da die kleinste Lösung t, u der Pell'schen Gleiching $t^2-Du^2=\pm 4$ existiert, so setzen wir

$$\gamma=au>0,\quad \alpha-\delta=bu>0,\quad \beta=cu>0,\quad \alpha+\delta=t.$$

Dann ist

$$\pm 1=\frac{t^2-Du^2}{4}=\frac{(\alpha+\delta)^2-(\alpha-\delta)^2-4\beta\gamma}{4}=\alpha\delta-\beta\gamma,$$

(2) Ist $b_1=|(-a_1)-c_1|$, so wird $D=b_1^2+4(-a_1)c=(-a_1+c_1)^2$.

(3) Weber, Algebra 1. S. 427.

und ferner ist $a=\frac{t+bu}{2}$ eine positive ganze Zahl, denn t und bu sind zugleich gerade oder zugleich ungerade. Nach $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$ sollen α und δ dasselbe Vorzeichen besitzen, also ist auch $\delta\geqq0$. Nach der Annahme $b>|a-c|$ haben wir auch $\alpha-\delta>|\beta-\gamma|$. Wenn wir jetzt $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm1$ in Betrachtung ziehen, so können wir daraus folgern, dass α die grösste und δ die kleinste aus α, β, γ, δ ist.

Wenn $\delta=0$ ist, so wird $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&1\\1&0\end{pmatrix}$. Im anderen Falle könen wir $\gamma>\alpha-k_1\gamma=\alpha_1>0$ für eine geeignete positive ganze Zahl k_1 setzen, so wird $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=\mp1$, worin $\beta_1=\beta-k_1\delta$ ist. Daraus folgt nach $\delta>0$, $\alpha_1>0$ leicht $\beta_1\geqq0$. Ausserdem folgt aus $\gamma>\alpha_1$, $\gamma\beta_1-\delta\alpha_1=\mp1$, $\beta_1\geqq0$, dass $\delta\geqq\beta_1$ und γ die grösste und β_1 die kleinste aus γ, δ, α_1, β_1 ist. Damit können wir

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&\delta\\\alpha_1&\beta_1\end{pmatrix}$$

setzen, und $\begin{pmatrix}\gamma&\delta\\\alpha_1&\beta_1\end{pmatrix}$ besitzt ganz dieselben Eigenschaften wie $\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$. Durch solche Prozesse erreichen wir shliesslich die Form

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_m&1\\1&0\end{pmatrix},$$

worin k_i eine positive ganze Zahl bedeutet. Hiermit ist

$$(\omega)=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_m&1\\1&0\end{pmatrix}(\omega),$$

also ist die Kettenbruchentwickelung von ω rein periodisch.

4. Ein Satz über die Pell'she Gleichung.

Bedeutet b die grösste in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl, also $b<\sqrt{D}<b+1$, so ist

$$D=b^2+a,\quad 2b>a-1\geqq0.$$

Ist ω eine positive Wurzel von $x^2-2bx-a=0$, so ist die Kettenbruchentwickelung von ω nach dem vorigen Satz rein periodisch, also ist $(\omega)=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_n&1\\1&0\end{pmatrix}(\omega)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}(\omega)$, worin $\alpha\delta-\beta\gamma=(-1)^n$ und α die grösste und δ die kleinste ist. Nach der Vergleichung der Koeffizienten erhalten wir damit

$$\frac{1}{\gamma}=\frac{2b}{\alpha-\delta}=\frac{a}{\beta}=\frac{1}{u},$$

wobei u aber eine positive ganze Zahl ist, denn 1, $2b$, a besitzen keinen gemeinsamen Teiler. Nach $2bu=\alpha-\delta$ sind α und δ zugleich gerade oder zugleich ungerade und folglich ist $t=\frac{\alpha+\delta}{2}$ eine ganze positive Zahl. Da aber

$$t^2-Du^2=\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)^2-\gamma\beta=\alpha\delta-\beta\gamma=(-1)^n$$

ist, so erhalten wir nach Kettenbruchentwickelung von ω eine Lösung von $t^2-Du^2=(-1)^n$.

Im allgemeinen setzen wir

$$(\omega)=\begin{pmatrix}k_1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_2&1\\1&0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}k_n&1\\1&0\end{pmatrix}(\omega)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}(\omega)=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}^m(\omega)=\begin{pmatrix}\alpha_m&\beta_m\\\gamma_m&\delta_m\end{pmatrix}(\omega),\quad \frac{\alpha_m+\delta_m}{2}=t_m,$$

und sei u_m der grösste gemeinsame Teiler won $\alpha_m-\delta_m$, β_m und γ_m, so wird auch

$t_m^2-Du_m^2=(-1)^{nm}$. Das ist das einfache Mittel, um für ein gegebenes $D>0$ alle Lösungen von der Pell'schen Gleichung $t^2-Du^2=\pm 1$ zubestimmen. Durch einfache Übertragung dieses Mittels können wir leicht beweisen:

Satz. *Ist D in der From $D=b^2+4ac$ darstellbar, worin a und c beide die Faktoren von b, jedoch relativ prim sind, so ist die Pell'sche Gleichung $t^2-Du^2=-4$ nicht lösbar.*

Denn in der Gleichung $ax^2-bx-c=0$ ist $b>|a-c|$, also ist die Kettenburchentwickelung der positiven Wurzel ω dieser Gleichung rein periodisch. Da a und c die verschiedenen Faktoren von b sind, so ergibt sich

$$(\omega)=\begin{pmatrix}\frac{b}{a} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b}{c} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(\omega),\quad \frac{b}{a}\neq\frac{b}{c}.$$

Nach der wohl bekannten Eigenschaft, dass bei einer Diskriminante die verschiedenen Perioden entweder alle eine gerade oder alle eine ungerade Gliederzahl enthalten, ergibt sich damit unser Satz.