IDEALTHEORIE IN EINEM SPEZIELLEN UNENDLICHEN ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER

von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30. Sep. 1952)

Bei der Theorie des unendlichen algebraischen Zahlkörpers kann die Tatsache auftreten, dass ein Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent ist.[1] Es fragt sich nun, ob ein unendlicher algebraischer Zahlkörper existiert, welcher kein idempotentes Primideal ausser Einheits- und Null-idealen hat. Der Zweck dieser Arbeit ist, die Existenz dieses Körpers nachzuweisen und sich mit Idealtheorie in diesem speziellen Körper zu beschäftigen.

Im ersten Paragraphen wird vor allem durch ein Beispiel gezeigt, dass die gewünschte Art von unendlichen algebraischen Zahlkörpern existieren kann. Anschliessend wird im §2 der spezielle unendliche algebraische Körper $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$ eingeführt, der die folgenden Bedingungen erfüllt:

I) *Für die Zerlegung einer beliebigen natürlichen Primzahl* p *in* $\mathfrak{K}_\nu$: $p=\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu}^{e_{\nu\lambda_\nu}}$, *ist jeder Exponent* $e_{\nu i}$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda_\nu)$ *für hinreichend grosses* ν *konstant.*

II) *Aus der Körperfolge* $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ *können wir eine Teilfolge* $\{\mathfrak{K}_\mu\}$ *so auswählen, dass jedes Primideal* $\mathfrak{p}_{\mu i}$ $(i=1, 2, \ldots, \lambda_\mu)$ *von* $p=\mathfrak{p}_{\mu 1}^{e_{\mu 1}}\mathfrak{p}_{\mu 2}^{e_{\mu 2}}\ldots\ldots\mathfrak{p}_{\mu\lambda_\mu}^{e_{\mu\lambda_\mu}}$ *in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren beim Übergang von* $\mathfrak{K}_\mu$ *zu* $\mathfrak{K}_{\mu+1}$ *zerfällt.*

Im folgenden benützen wir nur diesen Körper als den Grundkörper für unsere durchgeführten Untersuchungen.

In §2 wollen wir auch zeigen, dass für ein Primideal[2] $\mathfrak{p}$ und die von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$ bestehen kann, und dass die Beziehungen $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gleichbedeutend sind, wenn $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_{(\iota)}$ die Teiler von $\mathfrak{a}$ sind. In §3 stellen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass zu einem gegebenen Ideale $\mathfrak{a}$ und einem beliebigen Idealteiler $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ stets ein Ideal $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist, existiert. Im letzten Paragraphen lässt es sich zeigen, dass ein bewertungstheoretisches „*endliches*" Ideal[3]

1) Siehe etwa E. Stiemke: „Über unendliche algebraische Zahlkörper," Math. Zeit. 25 (1926) Kapitel 6. Die Stiemkesche Arbeit wird in Zukunft mit „Stiemke" zitiert.

2) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

3) Vgl. W. Krull; „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Math. Zeit., Bd. 29, 1929, s. 50. Diese Krullsche Arbeit wird mit „Krull (1)" zitiert.

nicht notwendig „*endliche Basis*“ besitzt. Das heisst; trotzdem in unserem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ bewertungstheoretisch endlich ist, hat $\mathfrak{p}$ keine endliche Basis.

§ 1. Ein Beispiel

Unter dem Kreiskörper $\mathfrak{K}_0(\omega_p)$ verstehen wir wie gewöhnlich den Körper, der durch Adjunktion der p-ten Einheitswurzel $\omega_p=e^{\frac{2i\pi}{p}}$ zum rationalen Körper $\mathfrak{K}_0$ entsteht, wobei p eine natürliche Primzahl bedeutet. Adjungieren wir zum rationalen Körper $\mathfrak{K}_0$ sukzessive die 3-ten, 5-ten, 7-ten, ..., p_ν-ten, ... Einheitswurzeln, so entsteht eine Folge von Kreiskörpern:

$$\mathfrak{K}_1=\mathfrak{K}_0(\omega_3),\ \mathfrak{K}_2=\mathfrak{K}_0(\omega_3,\omega_5),\ \mathfrak{K}_3=\mathfrak{K}_0(\omega_3,\omega_5,\omega_7),\ \dots,\ \mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{K}_0(\omega_3,\omega_5,\dots,\omega_{p_\nu}),\ \dots$$

von denen jeder vorangehende im folgenden enthalten ist. Die Gesamtheit der Zahlen von allen $\mathfrak{K}_\nu$ ist wieder ein Körper, den wir mit $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_0(\omega_3,\omega_5,\dots,\omega_{p_\nu},\dots)$, oder $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}_0(\omega_{p_1},\omega_{p_2},\dots,\omega_{p_\nu},\dots)$ bezeichnen.

Bekanntlich gilt das Zerlegungsgesetz im Kreiskörper $\mathfrak{K}_\nu$, und seine Diskriminante stellt sich als Potenzprodukt der rationalen Primzahlen $p_1(=3)$, $p_2(=5)$, $p_3(=7)$, ..., p_ν dar. Ist p eine ungerade Primzahl, so ist $p<p_\nu$ für hinreichend grosses ν. Im Kreiskörper $\mathfrak{K}_\nu$ ist das Ideal $[p]$ als $p-1=\varphi(p)$-te Potenz des Produktes von λ_ν konjugierten Primidealen des Grades g_ν darstellbar: $[p]=(\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{p}_{\nu 2}\dots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu})^{p-1}$, wo g_ν den kleinsten positiven Exponent bedeutet, welcher die Kongruenz $p^{g_\nu}\equiv 1\left(\mathrm{mod}\ \frac{\prod_{i=1}^{\nu}p_i}{p}\right)$ genügt, und λ_ν die ganze rationale Zahl, welche für die soeben erwähnte Zahl g_ν die Gleichung $\lambda_\nu g_\nu=\varphi\left(\frac{\prod_{i=1}^{\nu}p_i}{p}\right)$ genügt. Hierbei steht aber der Exponent $p-1$ konstant bleiben, während ν immer zunimmt. Danach erhalten wir folgendes Ergebniss:

Ist p eine natürliche Primzahl und ν eine hinreichend grosse Zahl, so ist $[p]$ in $\mathfrak{K}_\nu$ im Produkt von Primidealen: $[p]=(\mathfrak{p}_{\nu 1},\mathfrak{p}_{\nu 2}\dots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu})^{e_\nu}$ zerlegbar. Dabei ist der Exponent e_ν unabhängig von ν, wenn ν grösser ist als eine hinreichend grosse Zahl.

Nun wollen wir zeigen, dass λ_ν über alle Grenzen zunimmt, wenn ν wächst. Betrachten wir dazu den Kreiskörper $\mathfrak{K}_0(\omega_{p_{\nu+1}})=\mathfrak{K}'_{\nu+1}$. So zerlegt sich das Ideal $[p]$ von $\mathfrak{K}'_{\nu+1}$ im Produkt von $\lambda'_{\nu+1}$ verschiedenen konjugierten Primidealen $g'_{\nu+1}$-ten Grades: $[p]=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\dots\dots\mathfrak{p}_{\lambda'_{\nu+1}}$, $\lambda'_{\nu+1}g'_{\nu+1}=\varphi(p_{\nu+1})=p_{\nu+1}-1$

$$p^{g'_{\nu+1}}\equiv 1 \pmod{p_{\nu+1}}$$

wo $g'_{\nu+1}$ die kleinste rationale ganze positive Zahl bedeutet, welcher die obige Kongruenz genügt. Da die Körperdiskriminanten der Körper $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}'_{\nu+1}$ teilerfremd sind, so besitzt $[p]$ im aus $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}'_{\nu+1}$ zusammengesetzten Kreiskörper $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ $\lambda'_{\nu+1}\lambda_\nu(=\lambda_{\nu+1})$ verschiedene Primidealteiler.[4] Um unseren Zweck zu erreichen, ist es damit genug folgenden Hilfssatz hinzuzufügen.

Hilfssatz. *Für eine gegebene Primzahl p gibt es unendlich viele Primzahlen p_μ von der Art, dass $p^{g'_\mu}\equiv 1 \pmod{p_\mu}$, $0<g'_\mu\leq\frac{p_\mu-1}{2}$, d.h. $\lambda'_\mu\geq 2$ ist.*

Zum Beweise, wollen wir drei folgende verschiedene Fälle betrachten. Zunächst sei $p=4m+1$. Nach Dirichletschen Primzahlsatz gibt es unendlich viele Primzahle p_μ von der Form $p_\mu=pn+1$. Dann ist nach dem Quadratischen Reziprozitätsgesetze $\left(\frac{p}{p_\mu}\right)\left(\frac{p_\mu}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p_\mu-1}{2}}=(-1)^{2m\cdot\frac{p_\mu-1}{2}}=1$ und ferner $\left(\frac{p_\mu}{p}\right)=\left(\frac{1}{p}\right)=1$. Damit muss $\left(\frac{p}{p_\mu}\right)=1$ sein. Da aber nach dem Eulerschen Kriterium $\left(\frac{p}{p_\mu}\right)\equiv p^{\frac{p_\mu-1}{2}} \pmod{p_\mu}$ ist, so folgt $p^{\frac{p_\mu-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p_\mu}$. In diesem Fall ist damit unsere Behauptung richtig.

Zweitens sei $p=4m-1$. Da nach Dirichletschen Satz wir unendlich viele Primzahle p_μ von der Form $p_\mu=4pn-1$ auswählen können, so ist $\left(\frac{p_\mu}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2m-1}=-1$, $\left(\frac{p_\mu}{p}\right)\left(\frac{p}{p_\mu}\right)=-1$ und daraus folgt $\left(\frac{p}{p_\mu}\right)=1$. Nach dem Eulerschen Kriterium erhalten wir damit $p^{\frac{p_\mu-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p_\mu}$, also besteht unser Hilfssatz auch in diesem Falle.

Endlich sei $p=2$, dann ist nach dem zweitern Ergänzungssatze für eine ungerade Primzahl p_μ $\left(\frac{2}{p_\mu}\right)=(-1)^{\frac{p_\mu^2-1}{8}}$. Hierbei nahmen wir eine Primzahl $p_\mu=8n\pm 1$ aus, so wird $\left(\frac{2}{p_\mu}\right)=1$. Da aber nach dem Eulerschen Kriterium $\left(\frac{2}{p_\mu}\right)\equiv 2^{\frac{p_\mu-1}{2}} \pmod{p_\mu}$ ist, so ergit sich $2^{\frac{p_\mu-1}{2}}\equiv 1 \pmod{p_\mu}$. Damit ist der Beweis unseres Hilfssatzes beendet.

Jetzt können wir unsere bisherigen Ergebnisse in folgendem Satze zusammen fassen:

Es sei $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$ der unendliche algebraische Körper, wobei $\mathfrak{K}_\nu=\mathfrak{K}_0(\omega_{p_1},\omega_{p_2},\ldots\ldots\omega_{p_\nu})$, $\omega_{p_\nu}=e^{\frac{2i\pi}{p_\nu}}$ ist. Ist p eine Primzahl, so hat $[p]$ in $\mathfrak{K}_\nu$ die Zerlegung $[p]=(\mathfrak{p}_{\nu 1}\mathfrak{p}_{\nu 2}\ldots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu})^{e_\nu}$ und steht der Exponent e_ν für hinreichend grosses ν konstant bleibt, während λ_ν mit ν über alle Grenzen wächst. Aus der zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Körperfolge $\{\mathfrak{K}_\nu\}$ können wir eine Teilfolge $\{\mathfrak{K}_\mu\}$ so auswählen, dass

4) D. Hilbert; „Die Theorie der algebraischen Zahlkörper," Jber. Deutsch. Math. Verein. Bd. IV. 1894-95. s. 267.

jedes Primideal $\mathfrak{p}_{\mu i}$ $(i=1, 2, \dots, \lambda_\mu)$ *von der Zerlegung* $p=(\mathfrak{p}_{\mu 1}\mathfrak{p}_{\mu 2}\dots\mathfrak{p}_{\mu\lambda_\mu})^{e_\mu}$ *beim Übergang von* $\mathfrak{K}_\mu$ *zu* $\mathfrak{K}_{\mu+1}$ *stets in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren zerfällt.*[5]

§ 2. Primideale und Primärideale

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen unendlichen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \cdots\cdots$ definiert ist. Dabei ist jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über den rationalen Zahlkörper $\mathfrak{K}_0$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}$ und mit $\mathfrak{O}_\nu$ die Menge aller ganzen algebraischen Zahlen aus $\mathfrak{K}_\nu$.

Durch das Beispiel von § 1 können wir nun zwei folgende Annahmen über $\mathfrak{O}$ machen:

Voraussetzung I. Für die Zerlegung einer beliebigen natürlichen Primzahl p *in* $\mathfrak{O}_\nu$: $p=\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu}^{e_{\nu\lambda_\nu}}$, *ist jeder Exponent* $e_{\nu i}$ $(i=1, 2, \dots, \lambda_\nu)$ *für hinreichend grosses* ν *konstant.*

Voraussetzung II. Aus der Ringenfolge $\{\mathfrak{O}_\nu\}$ *können wir eine Teilfolge* $\{\mathfrak{O}_\mu\}$ *so auswählen, dass jedes Primideal* $\mathfrak{p}_{\mu i}$ $(i=1, 2, \dots, \lambda_\mu)$ *von* $p=\mathfrak{p}_{\mu 1}^{e_{\mu 1}}\mathfrak{p}_{\mu 2}^{e_{\mu 2}}\dots\dots\mathfrak{p}_{\mu\lambda_\mu}^{e_{\mu\lambda_\mu}}$ *in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren beim Übergang von* $\mathfrak{O}_\mu$ *zu* $\mathfrak{O}_{\mu+1}$ *zerfällt.*

Zunächst wollen wir einen Hilfssatz beweisen, der in dieser Arbeit eine grosse Rolle spielt.

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{a}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ *ein Ideal in* $\mathfrak{O}$, *und ist* $\mathfrak{J}$ *eine endliches oder unendliches Menge von Indexen, so ist* $(\bigcap_\iota \mathfrak{a}_{(\iota)}) \cap \mathfrak{O}_\nu = \bigcap_\iota (\mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu)$.

Da für ein beliebiges Element α von $(\bigcap_\iota \mathfrak{a}_{(\iota)}) \cap \mathfrak{O}_\nu$ $\alpha \in \mathfrak{a}_{(\iota)}$ ist, so gilt offenbar $\alpha \in \mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu$ für alle ι. Hieraus folgt $(\bigcap_\iota \mathfrak{a}_{(\iota)}) \cap \mathfrak{O}_\nu \leq \bigcap_\iota (\mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu)$. Es sei umgekehrt β ein beliebiges Element aus $\bigcap_\iota (\mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu)$, dann ist $\beta \in \mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu$. Folglich ist $\beta \in \mathfrak{a}_{(\iota)}$ für alle ι und $\beta \in \mathfrak{O}_\nu$, somit folgt $\beta \in (\bigcap_\iota \mathfrak{a}_{(\iota)}) \cap \mathfrak{O}_\nu$. Daraus ergibt sich $(\bigcap_\iota \mathfrak{a}_{(\iota)}) \cap \mathfrak{O}_\nu \geq \bigcap_\iota (\mathfrak{a}_{(\iota)} \cap \mathfrak{O}_\nu)$.

Ist $p \subset \mathfrak{p}_{1\nu} \subset \mathfrak{p}_{2\nu} \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_{n\nu} \subset \cdots\cdots$ eine Folge von Primidealen $\mathfrak{p}_{1\nu}, \mathfrak{p}_{2\nu}, \dots\dots, \mathfrak{p}_{n\nu}, \dots\dots$ aus $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \dots\dots, \mathfrak{O}_n, \dots\dots$, so ist die Vereinigungsmenge $\{p, \mathfrak{p}_{1\nu}, \mathfrak{p}_{2\nu}, \dots\dots, \mathfrak{p}_{n\nu}, \dots\dots\}$ ein Primideal[6] von $\mathfrak{O}$ und wir bezeichnen dies mit $\mathfrak{p}_{(\nu)}$. Dann dient uns als Ausgangspunkt der folgende

---

5) Aus dieser Tatsache ergibt sich sofort der Satz: *Die Primidealteiler jeder Primzahl* p *haben in diesem unendlichen Körper* $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$ *die Mächtigkeit des Kontinuums.* Vgl. „Stiemke" s. 31.

6) Vgl. „Simke" s. 20.

Satz 1. *When* $\mathfrak{p}$ *ein beliebiges Primideal in* $\mathfrak{O}$ *ist, so können wir eine Menge von abzählbaren unendlich vielen Primidealen* $\mathfrak{p}_{(\nu)}$ *von der Art finden, dass* $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_{(\nu)}$ *für alle* ν *gilt.*

Wir können dem gegebenen Primideal $\mathfrak{p}$ die Idealfolge $p = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{p}_\nu \subset \cdots\cdots$ zuordnen, wobei $\mathfrak{p}_\nu$ ein durch $\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{O}_\nu$ definiertes Primideal in $\mathfrak{O}_\nu$ ist. Nach Voraussetzung II können wir ferner die Annahme machen, dass $\mathfrak{p}_\nu$ beim Übergang von $\mathfrak{O}_\nu$ zu $\mathfrak{O}_{\nu+1}$ in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren zerfällt. Daraus folgt die Existenz des Primideales $\mathfrak{p}_{(\nu)} = \{p, \mathfrak{p}_{1\nu}, \mathfrak{p}_{2\nu}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{\nu-1\,\nu}, \mathfrak{p}_{\nu\,\nu}, \ldots\ldots\}$ von der Art, dass $\mathfrak{p}_{1\nu}, \mathfrak{p}_{2\nu}, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{\nu-1\,\nu}$ mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{\nu-1}$ übereinstimmen, während das folgende Glied $\mathfrak{p}_{\nu\,\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1\,\nu}, \ldots\ldots$ von $\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{p}_{\nu+1}, \ldots\ldots$ verschieden ist. Nämlich ist

$$\mathfrak{p}_{(\nu)} = \left\{p, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{p}_{\nu-1}, \mathfrak{p}_{\nu\,\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1\,\nu} \ldots\ldots\right\}.$$ [7]

Dann können wir leicht bestätigen, dass $\mathfrak{p}_{(\nu)} \neq \mathfrak{p}_{(\tau)}$ ist, wenn $\nu \neq \tau$ ist. Jetzt müssen wir beweisen, dass $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}$ ist. Zum Beweise sei α ein beliebiges Element aus $\bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}$, dann ist $\alpha \in \mathfrak{O}_\mu$ für $\mu \geq N$, wenn N eine hinreichend grosse Zahl ist. Damit ist $\alpha \in (\bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}) \wedge \mathfrak{O}_\mu$. Nach Hilfssatz 1 ist aber $(\bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}) \wedge \mathfrak{O}_\mu = \bigwedge_{\nu} (\mathfrak{p}_{(\nu)} \wedge \mathfrak{O}_\mu)$ und nach der Straktur von $\mathfrak{p}_{(\nu)}$ ist $\mathfrak{p}_{(\mu+1)} \wedge \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu = \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{O}_\mu$. Daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{p}_\mu$ und folglich $\alpha \in \mathfrak{p}$. Also muss $\mathfrak{p} \supseteq \bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}$ sein. Dabei können wir behaupten, dass $\mathfrak{p} \neq \bigwedge_{\nu} \mathfrak{p}_{(\nu)}$ ist, weil jedes Primideal in $\mathfrak{O}$ teilerlos ist. Hieraus folgt Satz 1.

Satz 2. *Wenn* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von Ideal* $\mathfrak{a}$ *in* $\mathfrak{O}$ *ist und wenn* $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$ *für die von* $\mathfrak{p}$ *verschiedenen Primidealteiler* $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$[8] *von* $\mathfrak{a}$ *ist, so können wir ein Primideal* $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ *aus* $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ *so wählen, dass* $\mathfrak{p}_{(\tau)} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{O}_\nu$ *ist.*

Ist $\mathfrak{h}$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{h}$ gleich dem Durchschnitt sämtlicher Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, nämlich $\mathfrak{h} = \mathfrak{p} \wedge (\bigwedge_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)})$.[9]

Da nach unserer Voraussetzung $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist, so folgt $\mathfrak{h} = \bigwedge_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}$. Danach erhalten wir wegen Hilfssatz 1

$$\mathfrak{h} \wedge \mathfrak{O}_\nu = (\bigwedge_{\iota} \mathfrak{p}_{(\iota)}) \wedge \mathfrak{O}_\nu = \bigwedge_{\iota} (\mathfrak{p}_{(\iota)} \wedge \mathfrak{O}_\nu) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Andererseits ist $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{O}_\nu$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{O}_\nu$.[10]

---

7) Vgl. W. Krull; „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern", Math. Zeit. Bd. 29, 1929, s. 53. Diese Krullsche Arbeit zitiere ich mit „Krull (1)".

8) In Zukunft bedeutet $\mathfrak{J}$ stets eine Menge unendlicher Indexe.

9) N. Nakano; „Über den Fundamentalsatz der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," dieses Jour. 15 (1952); Satz 4, s. 173. Zitiert mit „Nakano".

10) „Nakano" s. 174, Hilfssatz 1

Daraus folgt $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu1}^{e_{\nu1}}\mathfrak{p}_{\nu2}^{e_{\nu2}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{\nu\lambda}^{e_{\nu\lambda}}$ und $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu1}\frown\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$ ......(2)

Aus (1) und (2) ergibt sich

$\frown_\iota(\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu)=\mathfrak{p}_{\nu1}\frown\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$, also $\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu\geqq\mathfrak{p}_{\nu1}\frown\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$ für alle ι. Da $\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu$ aber ein Primideal von $\mathfrak{O}_\nu$ ist, so muss $\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu$ mit einem aus $\mathfrak{p}_{\nu1},\mathfrak{p}_{\nu2},\dots\dots,\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$ übereinstimmen.[11] Wäre eines, etwa $\mathfrak{p}_{\nu1}$, aus $\mathfrak{p}_{\nu i}$ $(i=1,2,\dots,\lambda)$ gleich keinem aus $\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu$, $\iota\in\mathfrak{J}$, so hätten wir etwa $\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\mathfrak{p}_{\nu3}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}=\mathfrak{p}_{\nu1}\frown\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$. Was aber unmöglich ist. Denn $\mathfrak{p}_{\nu1},\mathfrak{p}_{2\nu},\dots\dots,\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$ sind verschiedene Primideal im Ringe $\mathfrak{O}_\nu$ vom endlichen algebraischen Körper $\mathfrak{K}_\nu$. Damit können wir in $\mathfrak{p}_{(\iota)}\frown\mathfrak{O}_\nu$, $\iota\in\mathfrak{J}$ mindestens ein Primideal so befinden, dass es einem beliebig ausgenommenen $\mathfrak{p}_{\nu i}$ $(i=1,2,\dots,\lambda)$ gleich ist.

Auf der anderen Seite ist $\mathfrak{p}_\nu\,(=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\nu)$ ein Primidealteiler des Halbprimideales $\mathfrak{h}_\nu=\mathfrak{p}_{\nu1}\frown\mathfrak{p}_{\nu2}\frown\cdots\cdots\frown\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$, da $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}$ und folglich $\mathfrak{p}_\nu\supset\mathfrak{a}_\nu$ ist. Damit muss $\mathfrak{p}_\nu$ mit einem, etwa $\mathfrak{p}_{\nu1}$ aus $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}_{\nu2},\dots\dots,\mathfrak{p}_{\nu\lambda}$ übereinstimmen. Folglich können wir ein Primideal $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ aus der Menge $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$ so wählen, dass $\mathfrak{p}_{(\tau)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$ ist.

Offensichtlich ist eine Potenz eines Primideales von $\mathfrak{O}$ ein Primärideal und umgekehrt können wir fragen: Welche Aussagen lassen sich über die Struktur von Primäridealen aus $\mathfrak{O}$ machen? Zur Antwort schicken wir folgende Sätze voraus.

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{q}$ *ein Primärideal in* $\mathfrak{O}$, *welches zu einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehört, so ist* $\mathfrak{q}$ *gleich einer Potenz von* $\mathfrak{p}$.

Da $\mathfrak{q}$ ein Primärideal ist, muss $\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu$ ein Primärideal von $\mathfrak{O}_\nu$ sein.[12] Folglich ist $\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$. Nach Voraussetzung I kann $\mathfrak{p}_\nu$ für hinreichend grosses ν stets beim Übergang von $\mathfrak{O}_\nu$ zu $\mathfrak{O}_{\nu+1}$ nicht verzweigen. Also ist

$$\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_\nu}\mathfrak{b}_{\nu+1}\leqq\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{q}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}},\ (\mathfrak{p}_{\nu+1},\mathfrak{b}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1}$$

und folglich $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_\nu}\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$. Daraus ergibt sich $a_\nu\geqq a_{\nu+1}$. ....(1)

Andererseits ist $\mathfrak{p}_\nu\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}$ und daraus folgt $\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$. Hier wird $\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}$ nicht genau das k.g.V. von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{O}_\nu$ darstellen, aber das k.g.V. von $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}$ und $\mathfrak{O}_\nu$ ist das k.g.V. von $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{O}_\nu$.[13] Damit ist $\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}=\mathfrak{p}_\nu^{a_{\nu+1}}\frown\mathfrak{O}_\nu\leqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{a_{\nu+1}}\frown\mathfrak{O}_\nu$ $=\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$, folglich $a_{\nu+1}\geqq a_\nu$ ....(2)

11) Wir können mühelos folgenden Satz beweisen: *Sind* $\mathfrak{p},\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\dots,\mathfrak{p}_n$ *in endlichen oder unendlichen algebraischen Zahlkörpern einander verschiedene Primideale, so ergibt sich* $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_n$.

12) M. Moriya; „Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades", Jour. of Hokkaido Imp. Univ. 5 (1935), s. 172, zitiert mit „Moriya (1)".

13) „Stiemke", s. 17.

Da aus (1) und (2) $a_\nu = a_{\nu+1}$ folgt, können wir leicht bestätigen, dass $a_\nu = a_{\nu+1} = \cdots\cdots = a$, für $\nu \geq N$ ist, wenn N eine hinreichend grosse Zahl ist. Danach ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^a$. Denn sei α ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}$, so ist von einem geeigneten Index ν an $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$. Daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{a_\nu} = \mathfrak{p}_\nu^a \subseteq \mathfrak{p}^a$. Hiermit muss $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}^a$ sein. Wenn umgekehrt β ein beliebiges Element aus $\mathfrak{p}^a$ ist, so ist β von der Form $\sum_{i=1}^{t} \beta_i^{(1)} \ldots\ldots \beta_i^{(a)}$, wo $\beta_i^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, a)$ die Elemente aus $\mathfrak{p}$ bedeuten. Also ist β ein Element aus $\mathfrak{p}_\nu^a$, wenn $\nu \geq N$ ist. Dies zeigt aber, dass β zu $\mathfrak{q}$ gehört. Also ist $\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}^a$. Daher muss $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^a$ sein.

Aus Satz 3 folgt noch;

Zuzatz. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{O}$, so ist dann und nur dann $\mathfrak{p}^a = \mathfrak{p}^b$, wenn $a = b$ ist.*[14]

Denn nach dem früher Gezeigten sind von einem geeigneten Index N an $\mathfrak{p}^a \frown \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^a$ und $\mathfrak{p}^b \frown \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^b$ $(\mu \geq N)$. Wenn dabei $\mathfrak{p}^a = \mathfrak{p}^b$ ist, so muss zugleich $\mathfrak{p}_\mu^a$ durch $\mathfrak{p}_\mu^b$, und $\mathfrak{p}_\mu^b$ durch $\mathfrak{p}_\mu^a$ teilbar sein, also ist $a = b$. Wenn umgekehrt $a = b$ ist, so ist offenbar $\mathfrak{p}^a = \mathfrak{p}^b$.

Satz 4. *Für eine beliebige natürliche Zahl e existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}^e$ und $\mathfrak{p}^{e+1}$.*

Zum Beweise nehmen wir an, dass echtes Zwischenideal $\mathfrak{a}$ zwischen $\mathfrak{p}^e$ und $\mathfrak{p}^{e+1}$ existiert. Da $\mathfrak{p}^e \supset \mathfrak{a}$ ist, so ist $\mathfrak{a}$ durch das Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar. Ferner ist $\mathfrak{a}$ durch kein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal teilbar, weil $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{p}^{e+1}$ ist. Also ist $\mathfrak{a}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar, und somit ist $\mathfrak{a}$ das zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal. Aus Satz 3 folgt damit $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^f$, und daher erhalten wir $\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{p}^f \subset \mathfrak{p}^{e+1}$, also ist $e = f$ oder $f = e+1$ d.h. $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{e+1}$, entgegen der Annahme.

Satz 5. *Für zwei beliebige natürliche Zahlen e, r erhalten wir $\mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^r$.*

Es sei γ ein Element aus $\mathfrak{p}^r$, dann ist $\gamma\,\mathfrak{p}^e \subseteq \mathfrak{p}^{r+e}$ und daraus folgt $\mathfrak{p}^r \subseteq \mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e$. Nehmen wir jetzt an, dass $\mathfrak{p}^r \subset \mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e$ ist, so gibt es ein Element α in $\mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}^r$. Ferner nach Zusatz von Satz 3 ergibt sich aus $\mathfrak{p}^e \neq \mathfrak{p}^{e+r}$ die Existenz eines Elements β, derart dass $\beta \in \mathfrak{p}^e$, $\beta \notin \mathfrak{p}^{e+r}$ ist. Daraus folgen $\alpha\mathfrak{p}^e \subseteq \mathfrak{p}^{e+r}$, $\alpha\beta \in \mathfrak{p}^{e+r}$. Aus dieser Tatsache und $\beta \notin \mathfrak{p}^{e+r}$ folgt $\alpha \in \mathfrak{p}$. Da $\alpha \in \mathfrak{p}$ und $\alpha \notin \mathfrak{p}^r$ sind, gibt es eine Zahl $t(1 < t \leq r)$ von der Art, dass $\alpha \in \mathfrak{p}^{t-1}$, $\alpha \notin \mathfrak{p}^t$ sind. Dann muss nach Satz 4

$$(\alpha, \mathfrak{p}^t) = \mathfrak{p}^{t-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

sein. Es sei π ein Element derart, dass $\pi \in \mathfrak{p}$, $\pi \notin \mathfrak{p}^2$ sind, so folgt wegen

14) M. Moriya: „Galoissche Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades," Jour. of Hokkaido Imp. Univ. 4 (1936), s. 73. Zitiert mit „Moriya (2)".

Satz 4 $$(\pi^e, \mathfrak{p}^{e+1}) = \mathfrak{p}^e \qquad \text{............(2)}$$

Ferner aus $\alpha\mathfrak{p}^e \subseteq \mathfrak{p}^{e+r}$ folgt $\alpha\pi^e \in \mathfrak{p}^{e+r} \subseteq \mathfrak{p}^{e+t}$

Aus (1) und (2) folgt $$\mathfrak{p}^{t-1}\mathfrak{p}^e = (\alpha, \mathfrak{p}^t)(\pi^e, \mathfrak{p}^{e+1})$$
$$= (\alpha\pi^e, \pi^e\mathfrak{p}^t, \alpha\mathfrak{p}^{e+1}, \mathfrak{p}^{e+t+1}),$$

wobei $\alpha\pi^e \in \mathfrak{p}^{e+t}$, $\pi^e\mathfrak{p}^t \in \mathfrak{p}^{e+t}$, $\alpha\mathfrak{p}^{e+1} \subseteq \mathfrak{p}^{t+e}$ ist. Damit erhalten wir $\mathfrak{p}^{t-1}\mathfrak{p}^e \subseteq \mathfrak{p}^{e+t}$, folglich $\mathfrak{p}^{e+t-1} = \mathfrak{p}^{e+t}$. Das ist aber ein Widerspruch. Zusammenfassend erhalten wir $\mathfrak{p}^{e+r} : \mathfrak{p}^e = \mathfrak{p}^r$.

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ das zu $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ gehörige Primideal.[15] Dann ist $\mathfrak{q}_{(\iota)} = \mathfrak{p}_{(\iota)}^{e_\iota}$ nach Satz 3. Setzen wir nun $\mathfrak{p}_{(\iota)} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu\iota}$, $\mathfrak{q}_{(\iota)} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{q}_{\nu\iota}$, $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu$, so wird $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}} \ldots\ldots \mathfrak{p}_{\nu\lambda_\nu}^{e_{\nu\lambda_\nu}} \subseteq \mathfrak{q}_{\nu\iota} \subseteq \mathfrak{p}_{\nu\iota}$. Da $\mathfrak{q}_{\nu\iota}$ ein Primärideal ist, muss etwa $\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}} \subseteq \mathfrak{q}_{\nu\iota}$ sein. Wenn N hinreichend gross ist, so ist stets $\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_1} \subseteq \mathfrak{q}_{\nu\iota}$, d.h. $e_{\nu\iota} = e_1$ (konst) für $\nu \geq N$. Wenn wir jetzt $\mathfrak{p}_{(1)} = \{\mathfrak{p}_{N1}, \mathfrak{p}_{N+1\,1}, \ldots\ldots\}$, $\mathfrak{q}_{(1)} = \{\mathfrak{p}_{N1}^{e_1}, \mathfrak{p}_{N+1\,1}^{e_1}, \ldots\ldots\}$ setzen, so ergibt sich $\mathfrak{q}_{(1)} = \mathfrak{p}_{(1)}^{e_1} \subseteq \mathfrak{p}_{(\iota)}^{e_\iota} = \mathfrak{q}_{(\iota)}$. Da $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ aber isolierte Primärkomponent ist,[16] muss $\mathfrak{q}_{(1)} = \mathfrak{q}_{(\iota)}$, folglich $e_1 = e_\iota$ sein. Auf der Gedankengang gilt es wegen Voraussetzungen I und II:

Satz 6. *Ist $\mathfrak{q}_{(\iota)} = \mathfrak{p}_{(\iota)}^{e_\iota}$ eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, so ist der Exponent e_ι endlich und beschränkt, nämlich alle Exponenten e_ι, $\iota \in \mathfrak{J}$ sind kleiner als eine hinreichend grosse natürliche Zahl M.*

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein gegebenes Ideal und $\mathfrak{q}$ eine isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal, es seien $\mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ alle isolierte Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, zu denen gehörige Primideale $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ von $\mathfrak{p}$ verschieden sind, und sei $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_\iota \mathfrak{p}_{(\iota)}$, dann gilt $\mathfrak{q}_{(\tau)} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{O}_\nu$ für eins $\mathfrak{q}_{(\tau)}$ aus $\mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$, wenn ν hinreichend gross ist.*

Es sei $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$, dann ist nach der Voraussetzung I

$$\mathfrak{q}_\nu = \mathfrak{q} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}^e \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^e \quad (\nu \geq N)$$

für hinreichend grosse Zahl N. Da aber $\mathfrak{p} \supset \bigwedge_\iota \mathfrak{p}_{(\iota)}$ ist, so können wir nach Satz 2 ein Primideal $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ aus $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ so auswählen, dass $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ induziert $\mathfrak{p}_\nu\,(= \mathfrak{p} \wedge \mathfrak{O}_\nu)$ in $\mathfrak{O}_\nu$.

Ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{q}_{(\tau)} = \mathfrak{p}_{(\tau)}^{e_\tau}$, folglich $\mathfrak{q}_{(\tau)} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_{(\tau)}^{e_\tau} \wedge \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\tau}$. Da $\mathfrak{p}_\nu^{e_\tau}$ und $\mathfrak{p}_\nu^e$ beide die zu $\mathfrak{p}_\nu$

15) Vgl. „Nakano" s.175, Hauptsatz: *Ist $\mathfrak{O}$ die Menge aller ganzen Zahlen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$, so lässt sich jedes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{O}$ als Durchschnitt von seinen samtlichen isolierten Primärkomponenten darstellen.*

16) Vgl. „Nakano" s.172. Wenn $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{q}$ gleich dem Durchschnitt aller der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale, welche Teiler von $\mathfrak{a}$ sind.

gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$ sind, muss $\mathfrak{p}_\nu^e=\mathfrak{p}_\nu^{e_\tau}$ sein, und folglich $\mathfrak{q}_{(\tau)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu$.

Satz 8. *Es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{q}$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$, *es seien* $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$ *alle von* $\mathfrak{p}$ *verschiedene Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$, *zu denen isolierten Primärkomponenten* $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ *von* $\mathfrak{a}$ *gehören, dann sind die folgenden fünf Eigenschaften gleichbedeutend*:

(i) $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$.

(ii) $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$.

(iii) $\mathfrak{q}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$.

(iv) $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\cap(\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)})=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$, *nämlich* $\mathfrak{a}$ *ist verkürzbar.*

(v) $\mathfrak{a}:\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$.

(i)$\to$(ii). Es sei $\mathfrak{p}^e$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, dann ist wegen $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^e\cap\mathfrak{d}=\mathfrak{p}^{e-1}\cap\mathfrak{d}\leq\mathfrak{p}^e$, wobei $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^e\cap(\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)})$, $\mathfrak{d}=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$ sind. Also ist

$$\mathfrak{p}^{e-1}\mathfrak{d}\leq\mathfrak{p}^{e-1}\cap\mathfrak{d}\leq\mathfrak{p}^e. \qquad \text{...........(1)}$$

Wäre $\mathfrak{d}\not\leq\mathfrak{p}$, so gäbe es ein Element d von der Art, dass $d\in\mathfrak{d}$, $d\notin\mathfrak{p}$ ist. So würde $\pi d\in\mathfrak{p}^{e-1}\mathfrak{d}\leq\mathfrak{p}^e$ sein, wobei π ein Element von $\mathfrak{p}^{e-1}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}^e$ ist. Daraus folgte $d\in\mathfrak{p}$. Mit diesem Widerspruch erhalten wir

$$\mathfrak{d}\leq\mathfrak{p} \qquad \text{...........(2)}$$

Ist α ein beliebiges Element von $\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$, so wird $\alpha\in\mathfrak{p}_{(\iota)}$ für alle ι. Nach $\mathfrak{q}_{(\iota)}=\mathfrak{p}_{(\iota)}^{e_\iota}$, folgt daraus $\alpha^{e_\iota}\in\mathfrak{q}_{(\iota)}$ für alle ι. Wegen Satz 6 gilt danach $\alpha^M\in\mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$ für eine endliche Zahl M. Folglich ist $\alpha^M\in\mathfrak{d}$. Aus (2) folgt damit $\alpha\in\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$.

(ii)$\to$(iii). Ist α ein beliebiges Element von $\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$. Wenn wir eine hinreichend grosse Zahl N auswählen, so ist $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$ für $\nu\geq N$. Wegen $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gibt es nach Satz 7 eine Primärkomponente $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, welche induziert $\mathfrak{q}_\nu=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu$ in $\mathfrak{O}_\nu$. Damit ist $\alpha\in(\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)})\cap\mathfrak{O}_\nu=\bigcap_\iota(\mathfrak{q}_{(\iota)}\cap\mathfrak{O}_\nu)\leq\mathfrak{q}_{(\tau)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{q}_\nu$[17] also $\alpha\in\mathfrak{q}$. Danach erhalten wir $\mathfrak{q}\supset\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$.

(iii)$\to$(iv). offenbar.

(iv)$\to$(v). Setzen wir $\mathfrak{a}:\mathfrak{q}=\mathfrak{c}$, so wird $\mathfrak{c}\mathfrak{q}\leq\mathfrak{a}$. Wegen $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\cap(\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)})$, muss danach $\mathfrak{c}\mathfrak{q}\leq\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$ sein, folglich $\mathfrak{c}\mathfrak{q}\leq\mathfrak{q}_{(\iota)}$ für alle ι sein. Da aber $\mathfrak{q}_{(\iota)}:\mathfrak{q}$

17) Im allgemeinen gilt offenbar: *Ist* $\mathfrak{a}_{(\iota)}$ $(\iota\in\mathfrak{J})$ *ein Ideal in* $\mathfrak{O}$, *dann gilt für ein beliebiges Ideal* $\mathfrak{b}$ *in* $\mathfrak{O}$ $(\bigcap_\iota\mathfrak{a}_{(\iota)}):\mathfrak{b}=\bigcap_\iota(\mathfrak{a}_{(\iota)}:\mathfrak{b})$.

$=\mathfrak{q}_{(\iota)}$ ist, so muss $\mathfrak{q}_{(\iota)}\geq\mathfrak{c}$ für alle ι sein. Daraus folgt $\bigwedge_{\iota}\mathfrak{q}_{(\iota)}\geq\mathfrak{c}$, nämlich $\mathfrak{a}\geq\mathfrak{c}=\mathfrak{a}:\mathfrak{q}$. Also ergibt sich $\mathfrak{a}:\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$.

(v)$\rightarrow$(i). Aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{q}\geq\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\geq\mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$.

§ 3. Multiplikativeigenschaft der Ideale

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{O})$, $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{b}$, *und* $\mathfrak{q}_a$ *bzw.* $\mathfrak{q}_b$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$. *Dann erhalten wir*

(i) $\mathfrak{q}_a\leq\mathfrak{q}_b$

(ii) $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{q}_b\mathfrak{a}$

(iii) $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{q}_a\mathfrak{a}$

Fall (i). Es sei α ein Element in $\mathfrak{q}_a$. Dann aus der Eigenschaft der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente[18] folgt die Existenz eines Elements s, derart dass $\alpha s\in\mathfrak{a}$, $s\notin\mathfrak{p}$ ist. Wegen $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$, wird $\alpha s\in\mathfrak{b}$, $s\notin\mathfrak{p}$. Daraus folgt $\alpha\in\mathfrak{q}_b$, also ist $\mathfrak{q}_a\leq\mathfrak{q}_b$.

Fall (ii). Setzen wir $\mathfrak{q}_b=\mathfrak{p}^r$ $(r\geq1)$ nach Satz 3, so können wir $\mathfrak{q}_a=\mathfrak{p}^{r+n}$ $(n\geq0)$ setzen, weil nach (i) $\mathfrak{q}_a\leq\mathfrak{q}_b$ ist. Ist π ein Element derart, dass $\pi\in\mathfrak{p}$, $\pi\notin\mathfrak{p}^2$ ist, so wird $\pi^{r+n}\in\mathfrak{q}_a$. Daraus folgt die Existenz eines Elements t von der Art, dass $\pi^{r+n}t\in\mathfrak{a}$, $t\notin\mathfrak{p}$ ist.

Wäre $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_b\mathfrak{a}$, so würde $\pi^{r+n}t\in\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_b\mathfrak{a}\leq\mathfrak{q}_b\mathfrak{q}_a=\mathfrak{p}^{r+r+n}$
Da aber $t\notin\mathfrak{p}$ ist, so hätten wir $\pi^{r+n}\in\mathfrak{p}^{2r+n}\leq\mathfrak{p}^{r+1+n}$ (denn $r\geq1$) und daraus folgte

$$(\pi^{r+n},\ \mathfrak{p}^{r+1+n})=\mathfrak{p}^{r+1+n} \qquad\qquad (1)$$

Andererseits nach Satz 4 existiert kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}^2$. Danach wird $(\mathfrak{p}^2,\pi)=\mathfrak{p}$, und folglich ist

$$(\mathfrak{p}^{r+1+n},\ \pi^{r+n})=\mathfrak{p}^{r+n} \qquad\qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgte $\mathfrak{p}^{r+n}=\mathfrak{p}^{r+1+n}$, im Widerspruch zum Zusatz von Satz 3. Also ergibt sich $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{q}_b\mathfrak{a}$.

Fall (iii). Aus $\mathfrak{q}_a\leq\mathfrak{q}_b$ folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_a\leq\mathfrak{a}\mathfrak{q}_b$. Nach dem soeben gewonnenen Ergebnisse ist $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_b<\mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_a=\mathfrak{a}$, so ergäbe sich ein Widerspruch $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_b=\mathfrak{a}$. Also muss $\mathfrak{a}\mathfrak{q}_a\neq\mathfrak{a}$ sein.

Durch die Anwendung des Hilfssatzes gewinnen wir den an sich bemerkenswerten

Satz 9. *In* $\mathfrak{O}$ *existiert kein idempotentes Ideal ausser Einheits- und Null-ideal.*

18) Vgl. „Nakano" s. 172. Wenn $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist, so ist $\mathfrak{q}$ die Gesamtheit aller Elemente, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente $s\notin\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist.

Ist $\mathfrak{a}$ ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Ideal in $\mathfrak{O}$, so erhalten wir, wie eben bewiesen, $\mathfrak{a}^2 \leqq \mathfrak{q}_a \mathfrak{a} < \mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$, so würde $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathfrak{q}_a$, im Widerspruch zum Hilfssatz 2 (iii). Deshalb muss $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^2$ sein.

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}\,(\neq \mathfrak{O})$ *und* $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, *so existiert kein Ideal* $\mathfrak{c}$ *von derart, dass* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *ist.*

Nehmen wir die Existenz solchen $\mathfrak{c}$ an, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist, so ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \geqq \mathfrak{c}$. Da aber nach der Voraussetzung $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ist, so erhalten wir $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{c}$. Andererseits ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} \leqq \mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, folglich $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Lässt $\mathfrak{b}$ sich als Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten darstellen; $\mathfrak{b} = \bigwedge_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$, so wird $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = (\bigwedge_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)})\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{q}_{(\iota)}\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}$. Daraus folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_{(\iota)}\mathfrak{a}$, entgegen Hilfssatz 2 (ii). Also ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

Hilfssatz 3. *Es seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *beliebige Ideale in* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{p}$ *sei ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$, *aber kein Teiler von* $\mathfrak{b}$. *Wenn* $\mathfrak{q}_{ab}$ *bzw.* $\mathfrak{q}_a$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ *bzw.* $\mathfrak{a}$ *ist, so erhalten wir* $\mathfrak{q}_{ab} = \mathfrak{q}_a$.

Aus $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ folgt nach Hilfssatz 2 (i) $\mathfrak{q}_a \geqq \mathfrak{q}_{ab}$. Ist α ein Element aus $\mathfrak{q}_a$, so folgt die Existenz eines Elements s von der Art, dass $\alpha s \in \mathfrak{a}$, $s \notin \mathfrak{p}$ ist. Nach der Voraussetzung $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$, gibt es ein Element b, derart dass $b \in \mathfrak{b}$, $b \notin \mathfrak{p}$ ist. Also ergibt sich $\alpha b s \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $bs \notin \mathfrak{p}$. Daraus ergibt sich $\alpha \in \mathfrak{q}_{ab}$, folglich $\mathfrak{q}_a \leqq \mathfrak{q}_{ab}$. Damit muss $\mathfrak{q}_a = \mathfrak{q}_{ab}$ sein.

Hilfssatz 4. *Es seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *beliebige Ideale in* $\mathfrak{O}$ *und sei* $\mathfrak{p}$ *ein gemeinsamer Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$. *Wenn* $\mathfrak{q}_{ab}$, $\mathfrak{q}_a$, $\mathfrak{q}_b$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *ist, so erhalten wir* $\mathfrak{q}_{ab} = \mathfrak{q}_a \cdot \mathfrak{q}_b$.

Setzen wir $\mathfrak{q}_a = \mathfrak{p}^m$, $\mathfrak{q}_b = \mathfrak{p}^n$, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{q}_a\mathfrak{q}_b = \mathfrak{p}^{m+n}$. Da aber $\mathfrak{q}_{ab} = \mathfrak{p}^l$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist, ergibt sich $\mathfrak{p}^l \leqq \mathfrak{p}^{n+m}$,[19] $\mathfrak{q}_{ab} \leqq \mathfrak{q}_a\mathfrak{q}_b$. Wenn aber umgekehrt π ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}_a\mathfrak{q}_b$ ist, so ist π von der From $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i$, wobei α_i bzw. β_i $(i=1, 2, \ldots, r)$ die Elemente aus $\mathfrak{q}_a$ bzw. $\mathfrak{q}_b$ bedeuten. Aus $\alpha_i \in \mathfrak{q}_a$ folgt die Existenz eines Elements s_i von der Art, dass $\alpha_i s_i \in \mathfrak{a}$, $s_i \notin \mathfrak{p}$ ist. Ebenso folgt aus $\beta_i \in \mathfrak{q}_b$ die Existenz eines Elements t_i, derart dass $\beta_i t_i \in \mathfrak{b}$, $t_i \notin \mathfrak{p}$ ist. Daraus folgt $\alpha_i \beta_i s_i t_i \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $s_i t_i \notin \mathfrak{p}$, $(i=1, 2, \ldots, r)$. Deshalb ergibt sich $\alpha_i \beta_i \in \mathfrak{q}_{ab}$, folglich $\pi \in \mathfrak{q}_{ab}$. Also muss $\mathfrak{q}_{ab} \geqq \mathfrak{q}_a\mathfrak{q}_b$, nämlich $\mathfrak{q}_{ab} = \mathfrak{q}_a\mathfrak{q}_b$ sein.

Mit Hilfe der eben bewiesenen Hilfssätze sind wir nunmehr imstande, als Hauptziel des Paragraphen folgenden Satz zu beweisen.

---

19) Vgl. Füssnote 16).

Satz 11. *Wenn* $\mathfrak{b}(\neq\mathfrak{D})$ *ein echter Idealteiler von gegebenem Ideale* $\mathfrak{a}$ *ist, und wenn* $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{a}$ *für jeden Primidealteiler* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ *ist, so gibt es stets ein Ideal* $\mathfrak{c}$ *von der Art, dass* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *ist.*[20]

Wegen $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ können wir $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als Durchschnitt von ihren sämtlichen isolierten Primärkomponenten in der Form

$$\mathfrak{a}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}),\quad \mathfrak{b}=\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\lambda_\iota}$$

darstellen, wobei $\mu_\iota\geq\lambda_\iota$ ist und jedes $\mathfrak{p}'_{(\kappa)}$ für alle κ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, aber kein Teiler von $\mathfrak{b}$ ist. Nun betrachten wir das Ideal

$$\mathfrak{c}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}).$$

Zunächst, da aber $\mu_\iota\geq\lambda_\iota$ ist, so muss dabei $\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota}\geq\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota}$ und folglich $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{c}$ sein.

Zweitens wollen wir zeigen; lässt $\mathfrak{c}$ sich als Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten in der Form $\mathfrak{c}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{a_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)})$ darstellen, so muss $\mu_\iota-\lambda_\iota=a_\iota$, $\nu_\kappa=b_\kappa$ für alle ι, κ sein. Setzen wir $\mathfrak{a}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)})=\mathfrak{p}_{(\tau)}^{\mu_\tau}\wedge\mathfrak{d}$, wobei $\mathfrak{d}=(\bigwedge_{\iota\neq\tau}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)})$ ist, dann erhalten wir nach Satz 8 $\mathfrak{p}_{(\tau)}\not\geq(\bigwedge_{\iota\neq\tau}\mathfrak{p}_{(\iota)})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'_{(\kappa)})$ aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{(\tau)}\neq\mathfrak{a}$. Daraus folgt die Existenz eines Elements α ausserhalb von $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, derart dass $\alpha\in(\bigwedge_{\iota\neq\tau}\mathfrak{p}_{(\iota)})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'_{(\kappa)})$ ist. Nach Satz 6 ist $M=\max(\{\mu_\iota\},\{\nu_\kappa\})$ endlich, und daher muss $\alpha^M\in\mathfrak{d}$ aber $\alpha^M\notin\mathfrak{p}_{(\tau)}$ sein. Setzen wir jetzt $\mathfrak{c}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)})=\mathfrak{p}_{(\tau)}^{\mu_\tau-\lambda_\tau}\wedge\mathfrak{d}'$, wobei $\mathfrak{d}'=(\bigwedge_{\iota\neq\tau}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)})$ ist, so folgt $\alpha^M\in\mathfrak{d}'$ aus $\mathfrak{d}'\geq\mathfrak{d}$. Daraus folgt

$$\alpha^M\mathfrak{p}_{(\tau)}^{\mu_\tau-\lambda_\tau}\leq\mathfrak{p}_{(\tau)}^{\mu_\tau-\lambda_\tau}\wedge\mathfrak{d}'=\mathfrak{c}=(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{a_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)})\leq\mathfrak{p}_{(\tau)}^{a_\tau}.$$

Damit ergibt sich $\mathfrak{p}_{(\tau)}^{\mu_\tau-\lambda_\tau}\leq\mathfrak{p}_{(\tau)}^{a_\tau}$ aus $\alpha^M\notin\mathfrak{p}_{(\tau)}$ und der Eigenschaft von Primärideal $\mathfrak{p}_{(\tau)}^{a_\tau}$ und folglich $\mu_\tau-\lambda_\tau\geq a_\tau$. Da aber $\mathfrak{p}_{(\tau)}^{a_\tau}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige isolierte Parimärkomponente von $\mathfrak{c}$ ist, so erhalten wir $a_\tau\geq\mu_\tau-\lambda_\tau$. Damit soll $\mu_\iota-\lambda_\iota=a_\iota$ für alle ι sein.

Ferner aus $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{c}$ und Hilfssatz 2 (i) folgt $\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}\leq\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)}$. Da aber $\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)}$ die isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{c}$ ist, so folgt $\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)}\leq\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}$. Damit erhalten wir $\mathfrak{p}'^{b_\kappa}_{(\kappa)}=\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}$, folglich $b_\kappa=\nu_\kappa$ für alle κ.

Drittens können wir leicht beweisen, dass $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\leq\mathfrak{a}$ ist. Denn, aus $\beta\in\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\leq\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\lambda_\iota}$, $\mathfrak{c}\leq\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota}$ für alle ι folgt $\beta\in\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\lambda_\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota-\lambda_\iota}=\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota}$ für alle ι. Andererseits ist $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}\leq\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}$, und daraus ergibt sich $\beta\in\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}$ für alle κ. Daraus folgt $\beta\in(\bigwedge_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{\mu_\iota})\wedge(\bigwedge_{\kappa}\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)})=\mathfrak{a}$. Also muss $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\leq\mathfrak{a}$ sein.

20) Vgl. die analogen Untersuchungen von S. Mori; „Über allgemeine Multiplikationsringe I," Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 4 (1934), s. 23-24.

Endlich wollen wir beweisen, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{bc}$ ist. Nun hat $\mathfrak{bc}$ keinen Primidealteiler ausser Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}$. Denn, gäbe es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von der Art, dass

$$\mathfrak{bc}\equiv 0\,(\mathfrak{p}) \quad \text{und zwar} \quad \mathfrak{b}\not\equiv(\mathfrak{p}),\ \mathfrak{c}\not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$$

ist, so ergäbe sich ein Widerspruch mit der Primidealeigenschaft. Daraus können wir $\mathfrak{bc}$ als Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten in der Form $\mathfrak{bc}=(\bigcap_{\iota}\mathfrak{p}_{(\iota)}^{e_\iota})\cap(\bigcap_{\kappa}\mathfrak{p}'^{f_\kappa}_{(\kappa)})$ darstellen. Wir können dabei $e_\iota=\mu_\iota$, $f_\kappa=\nu_\kappa$ für alle ι, κ behaupten.

Denn aus Satz 4 gibt es ein Element π_ι, derart dass $\pi_\iota\in\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\pi_\iota\notin\mathfrak{p}^2_{(\iota)}$, und folglich

$$\pi_\iota^{\mu_\iota}\in\mathfrak{p}^{\mu_\iota}_{(\iota)},\ \pi_\iota^{\mu_\iota}\notin\mathfrak{p}^{\mu_\iota+1}_{(\iota)} \qquad \text{...........(1)}$$

ist. Da $\mathfrak{p}^{\lambda_\iota}_{(\iota)}$ bzw. $\mathfrak{p}^{\mu_\iota-\lambda_\iota}_{(\iota)}$ die isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ bzw. $\mathfrak{c}$ ist, so muss

$$\pi_\iota^{\lambda_\iota}t_1\in\mathfrak{b},\ t_1\notin\mathfrak{p}_{(\iota)}\ ;\ \pi_\iota^{\mu_\iota-\lambda_\iota}t_2\in\mathfrak{c},\ t_2\notin\mathfrak{p}_{(\iota)}$$

sein, also wird $\pi_\iota^{\mu_\iota}t_1t_2\in\mathfrak{bc}$, $t_1t_2\notin\mathfrak{p}_{(\iota)}$, folglich

$$\pi_\iota^{\mu_\iota}\in\mathfrak{p}^{e_\iota}_{(\iota)}. \qquad \text{...........(2)}$$

Aus diesem Resultate und (1) muss $\mu_\iota\geqq e_\iota$ sein.

Andererseits, wegen $\mathfrak{bc}\leqq\mathfrak{a}$ folgt $e_\iota\geqq\mu_\iota$. Damit muss $e_\iota=\mu_\iota$ für alle ι sein. Da $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{p}'_{(\kappa)}$ unteilbar, aber $\mathfrak{bc}\leqq\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{p}'_{(\kappa)}$ ist, so folgt nach Hilfssatz 3 $\mathfrak{p}'^{f_\kappa}_{(\kappa)}=\mathfrak{p}'^{\nu_\kappa}_{(\kappa)}$. Damit wird $f_\kappa=\nu_\kappa$ für alle κ und folglich $\mathfrak{bc}=\mathfrak{a}$.

Damit ist unserer Satz vollständig bewiesen.

Aus Sätzen 10 und 11 folgt sofort der wichtige

Satz 12. *Dafür, dass zu einem gegebenen Ideale* $\mathfrak{a}$ *und einem beliebigen Idealteiler* $\mathfrak{b}$ *von* $\mathfrak{a}$ *stets ein Ideal* $\mathfrak{c}$ *existiert, so dass* $\mathfrak{a}=\mathfrak{bc}$ *ist, so ist notwendig und hinreichend, dass* $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{a}$ *für jeden Primidealteiler* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Ist die Bedingung erfüllt, so gibt es nach Satz 11 ein Ideal $\mathfrak{c}$ von der Art, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{bc}$ ist. Umgehehrt, ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, derart dass $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ ist, so existiert nach Satz 10 kein Ideal $\mathfrak{c}$, derart dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{pc}$ ist, trotzdem $\mathfrak{a}<\mathfrak{p}$ ist.

§ 4. Inverses Ideal[21]

Ist $\mathfrak{O}$ ein beliebiger Ring mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}$, so nennen wir ein Element ξ aus $\mathfrak{K}$ „*fast ganz abhängig*" von $\mathfrak{O}$, wenn in $\mathfrak{O}$ ein Element $\alpha\neq 0$ existiert, für das alle Produkte $\alpha\xi^i$ $(i=1, 2, \ldots)$ in $\mathfrak{O}$ liegen. Gehören

21) Unter dem inversen Ideal $\mathfrak{a}^{-1}$ wird die Gesamtheit derjenigen Elemente ξ von $\mathfrak{K}$ verstanden, für die $\xi\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{O}$ liegt.

alle von $\mathfrak{O}$ fast ganz abhängigen Elemente bereits zu $\mathfrak{O}$, so nennen wir $\mathfrak{O}$ „*vollständig ganz abgeschlossen*“.[22] Dann können wir leicht den folgenden Hilfssatz beweisen.

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{O}$ der Ring aller ganzen Zahlen eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{O}$ ein vollständig ganz abgeschlossener Ring.*[23]

Satz 13. *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$, wobei $\mathfrak{p}^{-1}$ die Gesamtheit aller Elemente aus $\mathfrak{K}$ bedeutet, deren Produkt mit $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$ enthalten ist.*

Nach Definition von $\mathfrak{p}^{-1}$ ist $\mathfrak{O}\leq\mathfrak{p}^{-1}$, daraus folgt $\mathfrak{p}\leq\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}\leq\mathfrak{O}$. Wegen der Teilerlosigkeit von $\mathfrak{p}$, ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}$ gleich $\mathfrak{p}$ order $\mathfrak{O}$. Andererseits, aus

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1})\mathfrak{p}=\mathfrak{a}(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1})\leq\mathfrak{a}\mathfrak{O}=\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}\leq\mathfrak{O}$$

folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}\leq\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{a}\leq\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ ist, ergibt sich $\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{a}$. Wäre $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{O}$, so folgte daraus $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}^2=\mathfrak{a}\mathfrak{p}^3=\cdots\cdots$. Damit würde $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathfrak{p}^e=\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ für die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$; was aber nach Hilfssatz 2 (iii) unmöglich ist. Also muss $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$ sein.

Aus Satz 13 folgt ferner

Satz 14. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{O}$ gilt $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ besitzt keine endliche Basis.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein gegebenes Primideal uud $\mathfrak{p}_\nu$ das k.g.V. von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{O}_\nu$, so bilden wir ein Ideal in $\mathfrak{O}$, welches die Form $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{O}$ hat, wobei $\mathfrak{a}_\nu$ durch $\mathfrak{p}_\nu$ teilbar ist. Dann ist $\mathfrak{p}>\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}\geq\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{O}$, daraus folgt nach Satz 1 $\mathfrak{p}>\bigwedge_\iota\mathfrak{p}_{(\iota)}$, wobei $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$ eine Menge der von $\mathfrak{p}$ verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{O}$. Setzen wir nun $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{O}=\mathfrak{a}$, so ergibt sich nach Satz 8 (ii)$\rightarrow$(i) $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$. Daraus folgt nach Satz 13 $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$.

Jetzt nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}$ eine endliche Basis besitzt, dann erhalten wir $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}\doteq\mathfrak{O}$.[24] Das widerspricht dem obig gewonnenen Resultat. Also kann $\mathfrak{p}$ keine endliche Basis besitzen.[25]

---

22) Vgl. W. Krull; „Idealtheorie“, Ergeb. d. Math. u. I. Grenzgeb. 1935, s. 103. Zitiert mit „Krull (3)“.

23) „Krull (3)“ s. 121.

24) „Krull (2)“ s. 555. In dieser Arbeit hat Herr W. Krull den Satz bewiesen; *Ein Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{O}$ ist dann und nur dann $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{O}$, wenn es eine endliche Basis besitzt.*

25) Vgl. „Moriya (1)“ s. 170. In dieser Arbeit finden wir; Ist die durch ein Primideal $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl p genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{a_\nu}$ in $\mathfrak{O}_\nu$ teilbar und ist von einem hinreichend grossen Index ν an immer $\frac{1}{a_\nu}=\frac{1}{a_{\nu+1}}=\cdots\cdots=$konst, so heisst $\mathfrak{p}$ ***endlich*** in bezug auf die durch $\mathfrak{p}$ definierte normierte Bewertung.

Nach unserer Voraussetzung I ist jedes Primideal bewertungstheoretisch ***endlich***, aber besitzt ***keine endliche Basis***.

Satz 15. *Für jedes Primideal* $\mathfrak{p}$ *in* $\mathfrak{O}$ *ist* $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{O}$.

Nach vorigem Satze ist $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$, daraus folgt $\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^{-1})^2=(\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1})\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{p}$ und ebenso $\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^{-1})^3=\mathfrak{p}$, usw. Ist also ξ ein beliebiges Element von $\mathfrak{p}^{-1}$ und α eins von $\mathfrak{p}$, so ist $\alpha\xi^e(\in\mathfrak{p}(\mathfrak{p}^{-1})^e)$ für alle e ganz. Da aber $\mathfrak{O}$ nach Hilfssatz 5 vollständig ganz abgeschlossen ist, so wird $\xi\in\mathfrak{O}$. Hiermit ist $\mathfrak{p}^{-1}\leqq\mathfrak{O}$, nämlich $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{O}$.

Hilfssatz 6. *Ist* $\mathfrak{b}^{-1}=\mathfrak{O}$, *so ergibt sich* $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}=\mathfrak{a}^{-1}$.

Aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{a}$ folgt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}\geqq\mathfrak{a}^{-1}$. ....(1)

Ist ξ ein beliebiges Element von $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}$, so ist $\xi(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=(\xi\mathfrak{a})\mathfrak{b}\leqq\mathfrak{O}$; demnach wird $\xi\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{b}^{-1}$. Nach Voraussetzung $\mathfrak{b}^{-1}=\mathfrak{O}$, ergibt sich daraus $\xi\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{O}$, folglich $\xi\in\mathfrak{a}^{-1}$. Also muss $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}\leqq\mathfrak{a}^{-1}$ ....(2)
sein. Aus (1) und (2) folgt $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}=\mathfrak{a}^{-1}$.

Aus diesem Hilfssatz und Satz 15 folgt sofort

Satz 16. *Ist* $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_{(1)}^{e_1}\mathfrak{p}_{(2)}^{e_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{(n)}^{e_n}$, *so ist* $\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{O}$.

Denn, aus $\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{O}$ und Hilfssatz 6 folgt $(\mathfrak{p}^2)^{-1}=(\mathfrak{p}\mathfrak{p})^{-1}=\mathfrak{p}^{-1}=\mathfrak{O}$ und $(\mathfrak{p}^3)^{-1}=\mathfrak{O}, \ldots\ldots, (\mathfrak{p}^{e_i})^{-1}=\mathfrak{O}$, woraus die Behauptung folgt.

Wir können diesen Satz noch folgendermassen verändern:

Satz 17. *Wenn* $\mathfrak{a}$ *als Durchschchnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten in der kürzesten Form*[26] $\mathfrak{a}=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$ *darstellbar ist, so ist* $\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{O}$.

Nach Voraussetzung und Satz 8 (i)→(iv) ist $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{a}$ für jeden Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$. Damit gibt es nach Satz 12 ein Ideal $\mathfrak{c}$ für einen beliebigen Idealteiler $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$, derart dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Ist nun $\mathfrak{q}_{(\iota)}$ eine zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, so gibt es ein Ideal $\mathfrak{c}_{(\iota)}$ von der Art, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_{(\iota)}\mathfrak{c}_{(\iota)}$ ist. Wegen $\mathfrak{p}_{(\iota)}=\mathfrak{q}_{(\iota)}^{e_\iota}$ ist aber $\mathfrak{q}_{(\iota)}^{-1}=\mathfrak{O}$. Hiermit ist $\mathfrak{a}^{-1}=(\mathfrak{q}_{(\iota)}\mathfrak{c}_{(\iota)})^{-1}=\mathfrak{c}_{(\iota)}^{-1}$ und daraus folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{q}_{(\iota)}\mathfrak{c}_{(\iota)}\mathfrak{c}_{(\iota)}^{-1}\leqq\mathfrak{q}_{(\iota)}$ für alle ι. Also $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\leqq\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}=\mathfrak{a}$ sein. Da aber $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\geqq\mathfrak{a}$ ist, so folgt $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{a}$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^{-1})^2=\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}(\mathfrak{a}^{-1})=\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{a}$ und ebenso $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^{-1})^3=\mathfrak{a}$, usw. Ist also ξ ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}^{-1}$ und α eins von $\mathfrak{a}$, so ist $\alpha\xi^e(\in\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^{-1})^e)$ für alle e ganz. Da aber $\mathfrak{O}$ vollständig ganz abgeschlossen ist, so wird $\xi\in\mathfrak{O}$. Hiermit ist $\mathfrak{a}^{-1}\leqq\mathfrak{O}$, folglich $\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{O}$.

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinen besten Dank aus.

26) Ist $\mathfrak{a}=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$ eine Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten und gilt $\mathfrak{q}_{(\iota)}\not\supseteq\bigcap_{\tau\neq\iota}\mathfrak{q}_{(\tau)}$ für alle ι, so nennen wir diese Darstellung $\mathfrak{a}=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$ die „*kürzeste*“.