ÜBER KOMMUTATIVE RINGE MIT DER TEILERKETTENBEDINGUNG FÜR HALBPRIMIDEALE

Von

Shinziro MORI

(Eingegangen am 10, Mai 1952)

Die forliegende Arbeit soll eine Fortführung und Ergänzung der Abhandlung „*Zerlegung der Ideale durch schwache Primärideale*“[1] darstellen. Dort würde für den kommutativen Grundring $\mathfrak{R}$ vorausgesetzt, dass in ihm die Teilerkettenbedingung für Primideale erfüllt ist. Mit Hilfe der gemachten Annahme gelangt man dann zum Ergebnisse:

Jedes Ideal von $\mathfrak{R}$ wird dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen dargestellt, wenn $\mathfrak{R}$ die folgenden Eigenschaften hat:

1) *Ist $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{R}$, und ist $\mathfrak{a}:(b)\subset\mathfrak{a}:(b^2)\subset\cdots$ eine Kette der Idealquotienten für ein Element b von $\mathfrak{R}$, so bricht diese Kette nach endlich vielen Gliedern ab, und von einem gewissen n ab sind alle Glieder gleich einem Ideal $\mathfrak{x}$.*

2) *Die Anzahl der in dieser Weise erhaltenen Ideale $\mathfrak{x}$ ist endlich, soweit $\mathfrak{a}$ fixiert ist.*

Im folgenden sollen nun die Beziehungen zwischen den obig ausgesprochenen Bedingungen und der Zerlegbarkeit der Ideale noch tiefer untersucht werden. Zuerst behandeln wir kurz die Zerlegbarkeit der Ideale im kommutativen Ring, in dem die Teilerketten-bedingung für Halbprimideale erfüllt ist. Dabei ziehen wir aber nicht nur die Zerlegung durch endlich viele starke Primärideale in Betracht, sondern auch die Zerlegung durch schwache Primärideale. Mit Hilfe dieser Ergebnisse gelingt es uns, notwendige und hinreichende Kennzeichen dafür zu gewinnen, wann jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen Primäridealen darstellbar ist und wann nicht.[2]

---

1) Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. 12 (1942), I. Diese Arbeit erschient in der Japanischen Sprache und ihr Umriss ist durch Prof. T. Nakayama in Mathematical Reviews 9 (1948) skizziert worden.

2) In unserer ganzen Arbeit wird die Existenz des Einheits-elementes vom Ring gar nicht vorausgesetzt. Dies Ergebnis ist hiermit noch nicht gefunden worden, trotzdem I. S. Cohen geschrieben hat, dass W. Krull dies Problem schon gelöst hat. Mathematical Reviews 9, No. 10 (1948).

Im Falle der schwachen Primärideale ist es möglich, dass jede Potenz eines Primideals durch das zu ihm gehörige Primärideal unteilbar ist. Es ist hiernach unentbehrlich, dass die Bedingung für Zerlegbarkeit der Ideale sich nicht in einfacher Form aussprechen lässt.

Für den Fall der starken Primärideale erhalten wir aber die Zerlegbarkeitbedingung in der folgenden einfacheren Form:

Jedes Ideal lässt sich dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen starken Primäridealen darstellen, wenn die Kette $\mathfrak{a}:(a_1)\subset\mathfrak{a}:(a_1a_2)\subset\mathfrak{a}:(a_1a_2a_3)\subset\cdots$ *für beliebige Elemente* $a_i (i=1, 2\cdots)$ *nach endlich vielen Gliedern abbricht, und wenn die Länge dieser Kette unterhalb einer mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegebenen endlichen Schranke liegt.*

§ 1. Zerlegung der Ideale von Ringen, in denen die Teilerkettenbedingung für Halbprimideale gilt.

Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal des kommutativen Ringes $\mathfrak{R}$ und besitzt der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element, so heisst $\mathfrak{h}$ ein *Halbprimideal.*

Fasst man alle nilpotente Elemente in bezug auf ein Ideal $\mathfrak{a}$ als eine Menge $\mathfrak{h}$ zusammen, so bildet $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal, und heisst das *zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Halbprimideal.*

Nach dieser Definition für Halbprimideal setzen wir die folgende Bedingung voraus:

Bedingung I. *Sind* $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \cdots$ *die Halbprimideale vom Ring* $\mathfrak{R}$, *so bricht die Teilerkette* $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subset\cdots$ *nach endlich vielen Gliedern ab.*

Auf Grund dieser Bedingung beweisen wir zunächst folgenden Satz:

Satz I. *Wenn in einem kommutativen Ring* $\mathfrak{R}$ *die Bedingung I erfüllt ist, so hat* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Teilerkette* $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots$ *von Primidealen* $\mathfrak{p}_i$ *bricht im Endlichen ab,*
2. *Jedes Halbprimideal ist als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar,*

und umgekehrt.

Da ein Primideal ein spezieller Fall von Halbprimideal ist, entsteht die Eigenschaft 1 als eine spezielle Folgerung aus der Bedingung I.

Ist ein Halbprimideal $\mathfrak{h}$ nicht prim, so bestehen die Beziehungen

$$\alpha\notin\mathfrak{h}, \qquad \beta\notin\mathfrak{h}, \qquad \alpha\beta\in\mathfrak{h}$$

für zwei Elemente α und β. Betrachten wir danach den Idealquotient $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{h}:(\alpha)$, so ist $\mathfrak{h}_1$ ein Halbprimideal und ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$. Wenn

$\mathfrak{h}_1$ nicht prim ist, so erhalten wir auf die gleiche Weise $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}_1:(\alpha_1)=\mathfrak{h}:(\alpha\alpha_1)$, wobei $\mathfrak{h}_2$ auch ein Halbprimideal und ein echter Teiler von $\mathfrak{h}_1$ ist. Nach Bedingung I müssen wir aber endlich zum Abschluss kommen und ein Primideal $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{h}:(r_1)$ gewinnen. Dabei ist $r_1 \notin \mathfrak{p}_1$, da $\mathfrak{h}$ halbprim ist.

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots$ alle in dieser Weise erhaltene Primideale. Dann ist $\mathfrak{h}\subseteqq\mathfrak{d}=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots$. Wäre $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{d}$, so würde $d\notin\mathfrak{h}$, $r_i d\in\mathfrak{h}(i=1, 2, \cdots)$ für ein Element d von $\mathfrak{d}$. Nach der soeben besprochenen Konstruktion würde ein Primideal $\mathfrak{p}$ in der Art $\mathfrak{p}=\mathfrak{h}:(d')$, $d'\notin\mathfrak{h}$, $d'\in\mathfrak{d}$, $r_i\in\mathfrak{p}(i=1, 2, \cdots)$ erzeugt, und daher folgte $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i$ und $r_i\in\mathfrak{p}_i$ im Widerspruch zu $r_i\notin\mathfrak{p}_i$. Daraus ergibt sich $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots$. Da $r_i\in\mathfrak{p}_j(j\neq i)$, $r_i\notin\mathfrak{p}_i$ ist, so muss die Darstellung $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots$ unverkürzbar sein. Indem man jetzt die Kette $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{p}_2\frown\mathfrak{p}_3\frown\cdots\subset\mathfrak{p}_3\frown\cdots\subset\cdots$ betrachtet, erkennt man, dass die Anzahl von $\mathfrak{p}_i$ endlich sein muss, weil es andernfalls in $\mathfrak{R}$ eine ins Unendlich laufende Teilerkette von Halbprimidealen gäbe.

Wenn umgekehrt $\mathfrak{R}$ die im Satze ausgesprochenen Eigenschaften hat und wenn $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subset\cdots$ eine Teilerkette von Halbprimidealen ist, so bestehen $\mathfrak{h}_i=\mathfrak{p}_{i1}\frown\mathfrak{p}_{i2}\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_{in_i}(i=1, 2, \cdots)$. Dabei muss jedes Primideal $\mathfrak{p}_{ij}(j=1, 2, \cdots n_i)$ ein Teiler eines von $\mathfrak{p}_{i-1\,k}(k=1, 2, \cdots n_{i-1})$ sein, da $\mathfrak{p}_{i-1\,1}\cdots\mathfrak{p}_{i-1\,n_{i-1}}\subseteqq\mathfrak{h}_{i-1}\subset\mathfrak{h}_i\subseteqq\mathfrak{p}_{ij}$ ist. Auf Grund dieser Tatsache erhalten wir eine Kette $\mathfrak{p}_{1m_1}\subset\mathfrak{p}_{2m_2}\subset\cdots$ von Primidealen, und folglich soll die Kette $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subset\cdots$ nach der Eigenschaft 1 mit endlichen Schritten abbrechen. Der Beweis unseres Satzes ist hiermit abgeschlossen.

Aus dem gewonnenen Ergebnis folgt insbesondere:

Satz 2. *Ist die Bedingung I in $\mathfrak{R}$ erfüllt, und ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Nilideal*[3] *in bezug auf $\mathfrak{b}=(\mathfrak{a}, p_1, p_2, \cdots p_m)$, wobei p_i die in $\mathfrak{p}$ passend gewählten Elemente bedeuten.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal. Dann erhalten wir nach Satz I $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_n$, und dabei können wir $\mathfrak{p}_1\subseteqq\mathfrak{p}$ setzen. Nun sei p_1 ein durch $\mathfrak{h}$ unteilbares Element von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{h}_1$ das zu $(\mathfrak{h}, p_1)$ gehörige Halbprimideal. Dann erhalten wir wieder $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_{12}\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_{1m_1}$, weil $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1\subseteqq\mathfrak{p}_1$ ist. Indem man auf $\mathfrak{h}_1$ dieselbe Schlussweise anwendet, hat wir $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2=\mathfrak{p}_1\frown\mathfrak{p}_{22}\frown\cdots\frown\mathfrak{p}_{2m_2}$, wobei $\mathfrak{h}_2$ das zu $(\mathfrak{h}_1, p_2)\subseteqq\mathfrak{p}_1$ gehörige Halbprimideal ist. Wegen der Bedingung I ist endlich $\mathfrak{p}_1$ das zu $(\mathfrak{h}_{k-1}, p_k)$ gehörige Halbprimideal, und nach der Konstruktion von $\mathfrak{h}_i$ ist $\mathfrak{p}_1$ ein Nilideal

3) Wenn jedes Element eines Teiler $\mathfrak{n}$ vom Ideal $\mathfrak{a}$ nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$ ist, so heisst $\mathfrak{n}$ *Nilideal in bezug auf* $\mathfrak{a}$.

in bezug auf $(\mathfrak{a}, p_1, p_2, \cdots, p_k)$. Durch Wiederholung dieses Schlusses erhalten wir unseren Satz.

Wir nehmen jetzt weiter die folgende Bedingung hinzu:

Bedingung 2. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges Ideal von* $\mathfrak{R}$. *Ist eine Kette* $\mathfrak{a}:(b) \subset \mathfrak{a}:(b^2) \subset \cdots$ *für ein Element* b *gegeben, so sind von einem gewissen* n *ab alle Glieder gleich:* $\mathfrak{a}:(b^n)=\mathfrak{a}:(b^{n+1})=\cdots=\mathfrak{a}_1$, *und* $\mathfrak{a}_1$ *heisst das Grenzideal von* $\mathfrak{a}$ *durch Element* b. *Bilden wir auch die Kette* $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_1:(b_1) \subset \mathfrak{a}_1:(b_1^2) \subset \cdots$, *so gewinnen wir Grenzideal* $\mathfrak{a}_2$ *von* $\mathfrak{a}_1$. *Die Anzahl der Glieder der Kette* $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots$ *von den auf solche Weise erzeugten Grenzidealen* $\mathfrak{a}_i$ *liegt unterhalb einer mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegebenen endlichen Schranke.*

Mit Hilfe der beiden Bedingungen 1 und 2 sind wir nunmehr imstande den Zerlegungssatz zu beweisen. Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst.

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein Ring mit Bedingungen 1 und 2 und* $\mathfrak{a}$ *ein nicht-primäres Ideal von* $\mathfrak{R}$. *Dann gibt es ein Element* r *aus* $\mathfrak{R}$ *mit der Eigenschaft, dass für ein durch* $\mathfrak{a}$ *unteilbares Element* r $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}:(r)$ *ein schwaches Primärideal ist.*

Da $\mathfrak{a}$ kein Primärideal ist, gibt es ein durch Ideal $\mathfrak{a}$ unteilbares Element b von der Art $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(b)\supset\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}_1$ gehörige Halbprimideal, so folgt nach Satz 1 $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_n$ und daraus folgt wegen der Bedingung 2

$$\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1:(r_1^{m_1}) = \mathfrak{a}_1:(r_1^{m_1+1}) \subseteqq \mathfrak{p}_1$$

für ein durch $\mathfrak{p}_1$ unteilbares Element r_1. Wenn für ein Element r_2 ausserhalb von $\mathfrak{p}_1$ $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_2:(r_2)$ ist, so erhalten wir wieder $\mathfrak{a}_3=\mathfrak{a}_2:(r_2)^{m_2}=\mathfrak{a}_2:(r_2)^{m_2+1} \supset \mathfrak{a}_2 \supset \mathfrak{a}_1$. Nach Bedingung 2 bricht aber die Kette $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \cdots \subseteqq \mathfrak{p}_1$ nach endlich vielen Gliedern ab, und wir haben

$$\mathfrak{p}_1 \supseteqq \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+1} = \cdots = \mathfrak{a}_1:(r'), \quad r' \notin \mathfrak{p}_1 .$$

Dabei muss $\mathfrak{a}_n$ das zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige schwache Primärideal sein, weil sonst würde $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1}$. Setzen wir hiermit $\mathfrak{a}_n=\mathfrak{q}$ und $r=br'$, so ergibt sich daraus

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{a}_1:(r') = \mathfrak{a}:(br') = \mathfrak{a}:(r), \quad r \notin \mathfrak{a} ,$$

wobei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}_1$ gehöriges schwaches Primärideal ist.

Auf Grund dieses Satzes können wir den Begriff des zugehörigen Primideals folgendermassen einführen:

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}(\neq\mathfrak{R})$, und ist der Idealquotient $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}:(r)$ für ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element r ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges schwaches Primärideal, so heisst $\mathfrak{p}$ das *zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Primideal.*

Im Ring mit den Bedingungen 1 und 2 gilt nun der folgende grundlegende Satz:

Satz 4. *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein micht-primäres Ideal, und* $\mathfrak{p}$ *ein zu* $\mathfrak{a}$ *gehöriges Primideal. Dann können wir ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges schwaches Primärideal* $\mathfrak{q}'(\supset\mathfrak{a})$ *finden, derart dass für jedes Element* $r'(\notin\mathfrak{a})$ *aus* $\mathfrak{q}'$ *der Idealquotient* $\mathfrak{a}:(r')$ *kein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges schwaches Primärideal ist.*

Nach Satz 2 ist $\mathfrak{p}$ ein Nilideal in bezug auf $\mathfrak{b}=(\mathfrak{a}, p_1, p_2, \cdots, p_m)$, und aus Bedingung 2 folgt

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{a}:(p_1^{n_1}) = \mathfrak{a}:(p_1^{n_1+1}), \\ \mathfrak{r}_2 &= \mathfrak{a}_1:(p_2^{n_2}) = \mathfrak{a}_1:(p_2^{n_2+1}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{r}_m &= \mathfrak{a}_{m-1}:(p_m^{n_m}) = \mathfrak{a}_{m-1}:(p_m^{n_m+1}), \end{aligned}$$

wobei

$$\mathfrak{a}_1=(\mathfrak{a},\ p_1^{n_1}\mathfrak{R}),\ \mathfrak{a}_2=(\mathfrak{a},\ p_1^{n_1}\mathfrak{R},\ p_2^{n_2}\mathfrak{R}),\cdots \mathfrak{a}_{m-1}=(\mathfrak{a},\ p_1^{n_1}\mathfrak{R},\ p_2^{n_2}\mathfrak{R},\cdots, p_{m-1}^{n_{m-1}}\mathfrak{R})$$

sind. Setzen wir nun $\mathfrak{a}_m=(\mathfrak{a},\ p_1^{n_1}\mathfrak{R},\ p_2^{n_2}\mathfrak{R},\cdots, p_m^{n_m}\mathfrak{R})$, so ist $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{a}_m$ gehörige Halbprimideal.

Im Falle $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{R}$ können wir nach Bedingung 2 ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges schwaches Primärideal $\mathfrak{q}'$ aus $\mathfrak{a}_m$, wie im Beweise von Satz 3 gezeigt wurde, konstruieren, und dabei erhalten wir ein Element r von der Art $\mathfrak{q}'=\mathfrak{a}_m:(r)$, $r\notin\mathfrak{p}$. Nun zeigen wir, dass $\mathfrak{q}'$ das im Satz besprochene Primärideal ist. Zu diesem Zwecke sei der Idealquotient $\mathfrak{q}''=\mathfrak{a}:(r')$ für ein Element $r'(\notin\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges schwaches Primärideal. Dann folgt zunächst aus $r'\in\mathfrak{q}'$

$$(2)\qquad rr'\in\mathfrak{a}_m,\ rr'\equiv r_1p_1^{n_1}+r_2p_2^{n_2}+\cdots+r_mp_m^{n_m}(\mathfrak{a}),$$

wobei $r_1, r_2, \cdots, r_m$ die Elemente von $\mathfrak{R}$ bedeuten. Da $\mathfrak{p}$ das zu $\mathfrak{q}''$ gehörige Primideal ist, soll $p_i^k(i=1, 2, \cdots, m)$ für hinreichend grosse natürliche Zahl k durch $\mathfrak{q}''$ teilbar sein, und daraus folgt $r'p_i^k\in\mathfrak{a}(i=1, 2, \cdots, m)$. Aus (2) folgt damit

$$rr'p_m^k\equiv r_mp_m^{n_m+k}\equiv 0\quad(\mathfrak{a}_{m-1}).$$

Daraus erhalten wir vermöge der in (1) enthaltenden Bedeutung

$$r_m\equiv 0\quad(\mathfrak{r}_m),\qquad r_mp_m^{n_m}\equiv 0\quad(\mathfrak{a}_{m-1}),$$

und nach (2)

$$rr'\equiv r_1'p_1^{n_1}+\cdots+r_{m-1}'p_{m-1}^{n_{m-1}}(\mathfrak{a}).$$

Durch Wiederholung solcher Prozesse gelangen wir schliesslich zu $rr' \equiv r_1^{(m-1)} p_1^{n_1}(\mathfrak{a})$, und daraus folgt wieder $r_1^{(m-1)} p_1^{n_1+k} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$. Wegen (1) ergibt sich daraus $rr' \equiv r_1^{(m-1)} p_1^{n_1} \equiv 0\ (\mathfrak{a})$. Da aber $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{a} : (r')$ ist, ist $r \in \mathfrak{q}'' \subseteqq \mathfrak{p}$ im Widerspruch zum vorher gewonnenen Ergebnis $r \notin \mathfrak{p}$.

Wir wenden uns jetzt zur Behandlung des Falles $\mathfrak{R} = \mathfrak{p}$. Nach der bisher angestellten Überlegungen von $\mathfrak{a}_m$ ist $\mathfrak{a}_m$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal. Wäre der Idealquotient $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{a} : (r')$ für ein Element $r'(\notin \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}_m$ ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriges Primärideal, so würde $r' p_i^k \subseteqq \mathfrak{a} (i = 1, 2, \cdots, m)$ für eine hinreichend grosse natürliche Zahl k. Aus $r' \in \mathfrak{a}_m$ folgte damit

$$r' \equiv r_1 p_1^{n_1} + \cdots + r_m p_m^{n_m}(\mathfrak{a}), \quad r_m p_m^{n_m+k} \in \mathfrak{a}_{m-1}, \quad r_m p_m^{n_m} \in \mathfrak{a}_{m-1},$$

und daher $r' \equiv r_1' p_1^{n_1} + \cdots + r'_{m-1} p_{m-1}^{n_{m-1}}(\mathfrak{a})$. Durch Wiederholung dieses Prozesses gelangen wir, wie beim vorigen Falle, zum Widerspruch $r' \in \mathfrak{a}$. Damit ist $\mathfrak{a}_m$ das gewunschte Primärideal.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal von $\mathfrak{R}$. Dann ist die Anzahl der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale endlich.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal. Dann ist nach Satz 1 $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \wedge \mathfrak{p}_2 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{p}_n$, $\mathfrak{p}_i$ die kleinsten Primideal-teiler von $\mathfrak{a}$ bedeuten, und wegen des Satzes 3 gehören alle $\mathfrak{p}_i$ zu $\mathfrak{a}$.

Ee seien zuerst $\mathfrak{p}_1' \subset \mathfrak{p}_2' \subset \cdots$ eine Teilerkette von zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_i'$. Dann bricht die Kette nach Bedingung 1 im Endlichen ab, und wir erhalten das grösste zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}'$. Betrachten wir nun umgekehrt eine Vielfachenkette $\mathfrak{p}_1' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_2'' \subset \mathfrak{p}_1'' \subset \mathfrak{p}'$ von zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_i''$, so muss die Kette nach endlich vielen Gliedern abbrechen. Denn, wegen der Definition für $\mathfrak{p}_i''$ ergibt sich stets ein Element r_i'' von der Art, dass $\mathfrak{q}_i'' = \mathfrak{a} : (r_i'')$ ist, wobei $\mathfrak{q}_i''$ ein zu $\mathfrak{p}_i''$ gehöriges Primärideal bedeutet. Für ein durch $\mathfrak{p}_1''$ unteilbares Element p' aus $\mathfrak{p}'$ gilt nach Bedingung 2

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a} : (p'^k) = \mathfrak{a} : (p'^{k+1}), \quad r' \in \mathfrak{r}, \quad r_i'' \notin \mathfrak{r} \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

und dabei ist r' ein Element derart, dass $\mathfrak{q}' = \mathfrak{a} : (r')$ ein zu $\mathfrak{p}'$ gehöriges Primärideal ist. Es sei wieder p_1'' ein durch $\mathfrak{p}_2''$ unteilbares Element von $\mathfrak{p}_1''$, dann erhalten wir auch

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} : (p_1''^{k_1}) = \mathfrak{r} : (p_1''^{k_1+1}), \quad r' \in \mathfrak{r}_1, \quad r_1'' \in \mathfrak{r}_1, \quad r_i'' \notin \mathfrak{r}_1 \quad (i = 2, 3, \cdots).$$

Nach Bedingung 2 müssen aber diese Verfahren nach endlich maliger Wiederholung abbrechen. Damit gilt der Vielfachenkettensatz für $\mathfrak{p}_1' \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_2'' \subset \mathfrak{p}_1'' \subset \mathfrak{p}'$.

Zweitens seien $\mathfrak{p}_1'$, $\mathfrak{p}_2'$, $\cdots$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale, die durch einander unteilbar sind. Dann ist die Anzahl von $\mathfrak{p}_i'$ nicht grösser als die mit $\mathfrak{a}$ fest gegebene Schranke λ. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, dass die Anzahl m von $\mathfrak{p}_i'$ grösser als λ ist. Dann können wir ein Element p_i' aus $\mathfrak{p}_i'$ finden, so dass p_i' durch jedes von $\mathfrak{p}_1', \cdots \mathfrak{p}_{i-1}', \mathfrak{p}_{i+1}', \cdots, \mathfrak{p}_m'$ unteilbar ist. Aus der Beziehung $\mathfrak{q}_1'=\mathfrak{a}:(r_1')$ erhalten wir damit nach Bedingung 2 ein solches Grenzideal $\mathfrak{r}_1$, dass

$$\mathfrak{r}_1=\mathfrak{a}:(p_1'^{k_1}), \quad \mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}_1, \quad r_1'\in\mathfrak{r}_1, \quad r_i'\notin\mathfrak{r}_1 \quad (i=2, 3, \cdots)$$

sind. Durch Wiederholung dieses Prozesses ergibt hiermit

$$\mathfrak{r}_2=\mathfrak{r}_1:(p_2'^{k_2}), \quad r_2'\in\mathfrak{r}_2, \quad r_i'\notin\mathfrak{r}_2 \quad (i=3, 4, \cdots), \quad \mathfrak{r}_1\subset\mathfrak{r}_2 .$$

Nach endlich maliger Wiederholung dieser Schlusse erreichen wir schliesslich die Grenzideale-folge $\mathfrak{r}_1\subset\mathfrak{r}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{r}_m$ mit Länge m, im Widerspruch dazu, dass die Länge der Grenzideale-kette kleiner als $\lambda+1$ ist.

Diese Ergebnisse, zusammenfassend können, wir zu unserem Satz 5 gelangen.

Es folgt nun der folgende Zerlegungssatz:

Satz 6. *Sind im Ring $\mathfrak{R}$ die Bedingungen 1 und 2 erfüllt, so ist jedes Ideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar.*

Nach dem letzten Satze ist die Anzahl m der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale $\mathfrak{p}_1$, p_2, $\cdots$, $\mathfrak{p}_m$ endlich. Es seien nun $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{q}_m$ die im Satze 4 betrachteten schwachen Primärideale, die beziehungsweise zu $\mathfrak{p}_i$ gehören. Setzen wir danach $\mathfrak{d}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_m$, so soll $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{d}$ sein. Wenn d ein durch $\mathfrak{a}$ unteilbares Element von $\mathfrak{d}$ ist, so muss d nilpotent in bezug auf $\mathfrak{a}$ sein, da alle kleinsten Primideal-teiler von $\mathfrak{a}$ nach dem Beweise von Satz 3 zu $\mathfrak{a}$ gehören. Der Idealquotient $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(d)$ ist damit ein echter Teiler von $\mathfrak{a}$ und aus $\mathfrak{a}_1$ können wir in ganz genau derselben Weise, wie im Beweise von Satz 3, ein Primärideal $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}:(r')$ bilden, wobei $r'=d$, oder $r'=rd$ ist, je nachdem $\mathfrak{a}_1$ primär ist, oder nicht. Damit stimmt das zu $\mathfrak{q}$ gehörige Primideal $\mathfrak{p}$ mit einem, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_m$ überein. Andererseits ist aber nach der Eigenschaft von $\mathfrak{q}_1$ das Element r' durch $\mathfrak{q}_1$ unteilbar, und so gelangen wir zum Widerspruch gegen die Annahme $r'\in\mathfrak{d}\subseteqq\mathfrak{q}_1$. Das vollendet den Beweis.

Über die Anzahl der Primär-komponenten von unverkürzbarer Darstellung eines Ideals gibt der folgende Satz Aufschluss.

Satz 7. *Die Anzahl der schwachen Primär-komponenten der unverkürzbaren Darstellungen eines Ideals* $\mathfrak{a}$ *ist gleich der Anzahl der zu* $\mathfrak{a}$ *gehörigen Primideale.*[4]

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_m$ die allen zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale und $\mathfrak{q}_i(i=1, 2, \cdots, m)$ das zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Primärideal mit der im Satz 4 gewonnenen Eigenschaft. Dann gilt $\mathfrak{q}_i'=\mathfrak{a}:(r_i)$ für ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges schwaches Primärideal $\mathfrak{q}_i'$. Wenn $\mathfrak{p}_j$ durch $\mathfrak{p}_i$ unteilbar ist, so können wir ein Element p_j von $\mathfrak{p}_j$ finden, sodass $\mathfrak{q}_i'=\mathfrak{a}:(r_i p_j)$, $p_j \in \mathfrak{q}_j$ ist. Wenn $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p}_i$ ist, so soll $r_i \in \mathfrak{q}_j$ sein. Durch diese Ergebnisse finden wir, dass für ein Element r_i'

$$\mathfrak{q}_i' = \mathfrak{a}:(r_i')\ r_i' \notin \mathfrak{q}_i, \quad r_i' \in \mathfrak{q}_j \quad (j=1, 2, \cdots m,\ i \neq j)$$

ist. Hiernach soll die im letzten Satze gewonnenne Darstellung unverkürzbar sein.

Es sei nun irgendeine unverkürzbare Darstellung von $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt der schwachen Primärideale: $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1''\frown\mathfrak{q}_2''\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k''$, und $\mathfrak{p}_i''$ das zu $\mathfrak{q}_i''$ gehörige Primideal. Ist $\mathfrak{p}_1''$ das grösste aus $\mathfrak{p}_i''$ und durch $\mathfrak{p}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ unteilbar, so folgt aus $\mathfrak{q}_2''\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k''\subseteqq\mathfrak{q}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ ein Widerspruch $\mathfrak{q}_2''\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k''\subseteqq\mathfrak{a}$. Damit muss $\mathfrak{p}_1''$ durch eines, etwa $\mathfrak{p}_1$, aus den grössten von $\mathfrak{p}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ teilbar sein. Wenn $\mathfrak{p}_1''\subset\mathfrak{p}_1$ dabei ist, so folgt in gleicher Weise $\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_m\subseteqq\mathfrak{q}_i''(i=1, \cdots k)$ und daher ein Widerspruch $\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_m\subseteqq\mathfrak{a}$. Hieraus folgt $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1''$. Da $\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1''$ das grösste aus $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}''$ ist, so können wir in $\mathfrak{p}_1$ ein Element p_1 finden, sodass $p_1 \in \mathfrak{q}_1$, $p_1 \in \mathfrak{q}_1''$, $p_1 \notin \mathfrak{p}_j(j=2, 3, \cdots m)$, $p_1 \notin \mathfrak{p}_i''$ $(i=2, 3, \cdots k)$ ist, und daher folgt nach der Formel $(\mathfrak{q}_1\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_m):(p_1)$ $=(\mathfrak{q}_1:(p_1))\frown\cdots\frown(\mathfrak{q}_m:(p_1))$

$$\mathfrak{a}:(p_1)=\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_m=\mathfrak{q}_2''\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_k''.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens finden wir, dass notwending $k=m$ sein muss, und dass $\mathfrak{p}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ mit $\mathfrak{p}_i''(i=1, 2, \cdots, k)$ übereinstimmen.

§ 2. Zerlegbarkeit der Ideale in Durchschnitt von starken Primäridealen.

Grundlegend ist zuerst der folgende Satz:

Satz 8. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring ohne irgend-welche Bedingung, und sei jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen starken Primäridealen*[5] *darstellbar. Dann hat* $\mathfrak{R}$ *die folgende Eigenschaft:*

4) Der Satz ist der erste Eindeutigkeitssatz für Zerlegung der Ideale durch schwache Primärideale, und in unserem Ringe gilt auch der zweite Eindeutigkeitssatz. Vgl. Van der Waerden *Moderne Algebra,* II, 38.

5) Ein Ideal heisst *primär,* wenn in seinem Restklassenring jeder Nullteiler nilpotent ist, und er heisst *stark* oder *schwach,* je nachdem eine endliche Potenz des zu ihm gehörigen Primideals durch ihn teilbar ist, oder nicht.

Ist $\mathfrak{a}$ *ein Ideal von* $\mathfrak{R}$, *so bricht die Kette* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(a_1)\subset\mathfrak{a}:(a_1a_2)\subset\cdots\subset\mathfrak{a}:(a_1a_2\cdots a_m)\subset\cdots$ *für beliebige Elemente* $a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots$ *im endlichen ab, und die Länge der Kette liegt unterhalb einer mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegebenen endlichen Schranke.*

Zum Beweise sei es eine unverkürzbare Darstellung eines Ideals $\mathfrak{a}$ als Durchschnitt der starken Primärideale

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\wedge\mathfrak{q}_2\wedge\cdots\wedge\mathfrak{q}_n, \tag{1}$$

und $\mathfrak{p}_i$ sei das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal und $\mathfrak{p}_i^{k_i}\subseteqq\mathfrak{q}_i$, $k=k_1+k_2+\cdots+k_n+1$. Ferner seien $p_1, \cdots, p_k$ die Elemente von der Art, dass

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(p_1)\subset\mathfrak{a}:(p_1p_2)\subset\cdots\subset\mathfrak{a}:(p_1p_2\cdots p_k).$$

Ist dabei p_i ein Element, welches durch jedes $\mathfrak{p}_j(j=1, 2, \cdots n)$ unteilbar ist, so erhalten wir $\mathfrak{a}:(p_i)=(\mathfrak{q}_1:(p_i))\wedge\cdots\wedge(\mathfrak{q}_n:(p_i))=\mathfrak{q}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{q}_n=\mathfrak{a}$. Hiermit sollen die Elemente $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$ mindestens durch eines aus $\mathfrak{p}_j$ teilbar sein.

Wären die Elemente $p_1, \cdots, p_l, p_{l+1}$ durch jedes von $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_t$ teilbar, aber durch ein anderes Primideal $\mathfrak{p}_j$ unteilbar, und wäre $l=k_1+k_2+\cdots+k_t$, so folgte $p_1p_2\cdots p_l\in\mathfrak{q}_i(i=1, 2, \cdots, t)$ aus $\mathfrak{p}_i^{k_i}\subseteqq\mathfrak{q}_i$ und daher $\mathfrak{q}_1:(p_1p_2\cdots p_l)=\mathfrak{R}, \cdots, \mathfrak{q}_t:(p_1p_2\cdots p_l)=\mathfrak{R}$. Aus (1) ergäbe sich danach ein Widerspruch $\mathfrak{a}:(p_1\cdots p_l)=\mathfrak{a}:(p_1\cdots p_lp_{l+1})$. Mit Benutzung dieses Resultates gelangen wir zu dem Ergebniss:

Die Länge der Kette $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(p_1)\subset\mathfrak{a}:(p_1p_2)\subset\cdots$ ist nicht länger als k.

Um die Umkehrung des soeben formulierten Satzes zu beweisen, setzen wir die obig gewonnenne Eigenschaft als Bedingung voraus:

Bedingung 3. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal aus* R, *so bricht dis Kette* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}:(a_1)\subset\mathfrak{a}:(a_1a_2)\subset\cdots$ *für beliebige Elemente* $a_1, a_2, \cdots$ *im endlichen ab, und die Länge der Kette liegt unterhalb einer mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegebenen endlichen Schranke.*

Zu unserem Zwecke brauchen wir nun die folgenden Hilfssätze nachzuweisen.

Hilfssatz 1. *Wenn in* $\mathfrak{R}$ *die Bedingung 3 erfüllt ist, so muss die Kette* $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots$ *der Primideale* $\mathfrak{p}_i$ *nach endlich vielen Gliedern abbrechen.*

Zum Beweise bilden wir ein Ideal $\mathfrak{a}$ in folgender Weise

$$\mathfrak{a}=((p_1)\mathfrak{p}_2, (p_1p_3)\mathfrak{p}_4, (p_1p_3p_5)\mathfrak{p}_6, (p_1p_3p_5p_7)\mathfrak{p}_8, \cdots),$$

wobei das Element p_i durch $\mathfrak{p}_i$ teilbar, aber durch $\mathfrak{p}_{i-1}$ unteilbar ist. Setzen wir $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(p_1)$, so wird $\mathfrak{a}_1\supseteqq(\mathfrak{p}_2, (p_3)\mathfrak{p}_4, (p_3p_5)\mathfrak{p}_6, (p_3p_5p_7)\mathfrak{p}_8, \cdots)$. Wäre $a_1\not\equiv\mathfrak{p}_3$ für ein Element a_1 aus $\mathfrak{a}_1$, so folgte aus $\mathfrak{a}_1(p_1)\subseteqq\mathfrak{a}$

$$a_1p_1 = p_1p_2' + p_1p_3p_4' + p_1p_3p_5p_6' + \cdots, \quad p_i' \in \mathfrak{p}_i,$$

wobei $p_1 \notin \mathfrak{p}_0$ ist. Hiermit ergäbe sich daraus

$$a_1 \equiv p_2' + p_3p_4' + p_3p_5p_6' + \cdots (\mathfrak{p}_0),$$

und folglich $a_1 \equiv 0(\mathfrak{p}_3)$ im Widerspruch zur Annahme $a_1 \notin \mathfrak{p}_3$. Also muss $\mathfrak{p}_3 \supseteqq \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{p}_2$ sein.

Setzen wir wieder $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a} : (p_1p_3)$, so wird

$$\mathfrak{a}_3 \supseteqq (\mathfrak{p}_4, (p_5)\mathfrak{p}_6, (p_5p_7)\mathfrak{p}_8, \cdots).$$

Wäre $a_3 \notin \mathfrak{p}_5$ für ein Element a_3 aus $\mathfrak{a}_3$, so würde

$$a_3p_1p_3 = p_1p_2'' + p_1p_3p_4'' + p_1p_3p_5p_6'' + \cdots,$$

wobei $p_i'' \in \mathfrak{p}_i$ ist. Wegen $p_1 \notin \mathfrak{p}_0$ folgte daraus $a_3p_3 \equiv p_2'' + p_3p_4'' + p_3p_5p_6'' + \cdots (\mathfrak{p}_0)$, und nach $p_2'' \in \mathfrak{p}_2$, $p_3 \notin \mathfrak{p}_2$ hätten wir $a_3p_3 \equiv p_3p_4'' + p_3p_5p_6'' + \cdots (\mathfrak{p}_2)$, und ferner $a_3 \equiv p_4'' + p_5p_6'' + \cdots (\mathfrak{p}_2)$. Daher ergäbe sich ein Widerspruch $a_3 \equiv 0(\mathfrak{p}_5)$. Da hiernach $\mathfrak{p}_5 \supseteqq \mathfrak{a}_3 \supset \mathfrak{p}_4$ gilt, so gewinnen wir $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_3$. Durch wiederholte Anwendnng dieses Verfahrens ergibt sich eine Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_3 \subset \cdots$. Nach der Bedingung 3 muss aber die Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : (p_1) \subset \mathfrak{a} : (p_1p_3) \subset \cdots$ nach endlich vielen Gliedern abbrechen. Der Beweis von Hilfssatz 1 ist hiermit abgeschlossen.

Hilfssatz 2. *Wenn in $\mathfrak{R}$ die Bedingung 3 erfüllt ist, so ist jedes Halbprimideal von $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar.*

Ist ein Halbprimideal $\mathfrak{h}$ nicht prim, so gilt $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} : (a_1)$, $\mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}$ für ein Element a_1, und dabei ist $\mathfrak{h}_1$ auch ein Halbprimideal. Indem wir wiederholt dieselbe Schlussweise anwenden, gelangen wir nach Bedingung 3 schliesslich zu einem Primideal $\mathfrak{p}_1$ von der Art $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h} : (r_1)$. Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots$ alle Primideale mit der Eigenschaft $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{h} : (r_i)$ und sei $\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1 \wedge \mathfrak{p}_2 \wedge \cdots$. Dann ist $\mathfrak{h} \subseteqq \mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}_i$ sind durch einander unteilbar, weil $\mathfrak{h}$ halbprim ist. Ist ein Element d von $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{h}$ unteilbar, so wenden wir auf d dieselbe Schlussweise, wie obig auf a_1, an, und danach erhalten wir $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} : (dr)$. Dabei muss $\mathfrak{p}$ mit einem aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots$ übereinstimmen, und daraus ergibt sich $(dr)^2 \in \mathfrak{h}$. Da $\mathfrak{h}$ aber halbprim ist, ergibt sich daraus ein Widerspruch. Also soll damit $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \wedge \mathfrak{p}_2 \wedge \cdots$ sein.

Ist die Anzahl m von $\mathfrak{p}_i$ grösser als die mit $\mathfrak{h}$ fest gegebene endliche Schranke λ, so wählen wir ein Element p_1 von der Art, dass $p_1 \in \mathfrak{p}_1$, $p_1 \notin \mathfrak{p}_i$ $(i=2, 3, \cdots, m)$. Dann gilt $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{h} : (p_1)$, $r_1 \in \mathfrak{r}_1$, $r_i \notin \mathfrak{r}_1 (i=2, 3, \cdots, m)$, da $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{h} : (r_i)$ ist. Wählen wir wieder ein Element p_2, so dass $p_2 \in \mathfrak{p}_2$, $p_2 \notin \mathfrak{p}_j$ $(j=1, 3, \cdots, m)$, so gilt auch $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{h} : (p_1p_2)$, $r_1 \in \mathfrak{r}_2$, $r_2 \in \mathfrak{r}_2$, $r_j \notin \mathfrak{r}_2 (j=3, \cdots, m)$.

Durch Wiederholung dieses Schlusses erhalten wir endlich eine Kette $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h} : (p_1) \subset \mathfrak{h} : (p_1 p_2) \subset \cdots \subset \mathfrak{h} : (p_1 p_2 \cdots p_m)$ mit der Länge $m+1 > \lambda+1$; was unserer Bedingung 3 widerspricht.

Auf Grund dieser soeben gewonnenen Hilfssätze können wir jetzt unsres Ziel dieses Paragraphen kurz in folgender Weise aussprechen:

Hauptsatz 1. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring ohne irgendwelche Bedingung. Jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen starken Primäridealen darstellbar, wenn die Länge der Kette* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : (a_1) \subset \mathfrak{a} : (a_1 a_2) \subset \cdots$ *für beliebige Elemente* $a_1, a_2, \cdots$ *stets unterhalb einer mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegebenen endlichen Schranke liegt.*

Nach Satz 8 ist die Bedingung offenbar notwendig.

Umgekehrt folgt aus der Bedingung nach Hilfssätzen und Satz 1 die Teilerketten-bedingung füı Halbprimideale. Wegen Satz 6 ist damit jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass im Ring mit dieser Bedingung jedes schwache Primärideal zugleich stark sein soll. Es sei $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges schwaches Primärideal und λ die mit $\mathfrak{q}$ fest gegebene endliche Schranke. Dann gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} : (p_1)$, oder $\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} : (p_1) > \mathfrak{q}$, für jedes Element p_1 von $\mathfrak{p}$, je nachdem p_1 durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist, oder nicht. Für jedes Element p_2 von $\mathfrak{p}$ gilt auch

$$\mathfrak{p} \geqq \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}_1 : (p_2) = \mathfrak{q} : (p_1 p_2) > \mathfrak{q}_1 > \mathfrak{q}, \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{R}$$

je nachdem $p_1 p_2$ durch $\mathfrak{q}$ unteilbar ist, oder nicht. Nach unserer Bedingung kommen wir danach zum Schlusse, dass $p_1 p_2 \cdots p_{\lambda+1} \in \mathfrak{q}$ für jede Elemente $p_1, p_2, \cdots, p_{\lambda+1}$ von $\mathfrak{p}$ ist. Aus dieser Tatsache ergibt sich leicht $\mathfrak{p}^{\lambda+1} \leqq \mathfrak{q}$. Nämlich ist $\mathfrak{q}$ stark.

§ 3. Zerlegbarkeit der Ideale in Durchschnitt von schwachen Primäridealen.

Mit Hilfe der Eigenschaft des Idealquotientes können wir den folgenden Satz in der genau gleichen Weise, wie Satz 8, beweisen.

Satz 9. *Ist jedes Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{R}$ *als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen, so ist in* $\mathfrak{R}$ *die Bedingung 2 erfüllt.*

Es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, wobei $\mathfrak{q}_i$ die schwachen Primärideale bedeuten, und $\mathfrak{p}_i$ das zu $\mathfrak{q}_i$ gehörige Primideal. Ist $p_i \in \mathfrak{p}_i$, $p_i \notin \mathfrak{p}_j$, so soll $\mathfrak{R} = \mathfrak{q}_i : (p_i^k)$

$=\mathfrak{q}_i:(p_i^{k+1})$, $\mathfrak{q}_j:(p_i^k)=\mathfrak{q}_j:(p_i^{k+1})=\mathfrak{q}_j$ für eine passend grösse Zahl k sein. Aus $\mathfrak{a}:(p_i^k)=(\mathfrak{q}_1:(p_i^k))\frown\cdots\frown(\mathfrak{q}_n:(p_i^k))$ folgt damit

$$\mathfrak{a}:(p_i^k)=\mathfrak{a}:(p_i^{k+1})=\mathfrak{q}_{i_1}\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_{i_m}=\mathfrak{r}_i\,.$$

Dabei ist das System $\mathfrak{q}_{i_1}\cdots\mathfrak{q}_{i_m}(m<n)$ eine Teilmenge vom System $\mathfrak{q}_i(i=1, 2, \cdots, n)$. Wenden wir den Prozess wieder auf $\mathfrak{r}_i$ an, so erhalten wir auch ein Grenzideal $\mathfrak{r}_j=\mathfrak{r}_i:(p_j^l)=\mathfrak{r}_i:(p_j^{l+1})\supset\mathfrak{r}_i$. In dieser Weise fortfahrend, gelangen wir zu einer Kette $\mathfrak{o}\subset\mathfrak{r}_i\subset\mathfrak{r}_j\subset\cdots\subset\mathfrak{R}$ von Grenzidealen $\mathfrak{r}$, welche in dieser Weise $\mathfrak{r}_j=\mathfrak{r}_i:(p_j^l)=\mathfrak{r}_i:(p_j^{l+1})$ gebildet werden. Ferner soll dabei die Länge der Kette nicht länger als $n+1$ sein. Das vollendet den Beweis.

Wir wenden uns jetzt zur näheren Betrachtung der notwendigen Bedingungen dafür, dass jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar ist. Wir brauchen dazu nur den folgenden Satz:

Satz 10. *Wenn jedes Ideal von $\mathfrak{R}$ als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar ist, so soll die Kette $\mathfrak{h}_1\subset\mathfrak{h}_2\subset\cdots$ von Halbprimidealen nach endlich vielen Gliedern abbrechen.*

Aus der im Satz ausgesprochenen Eigenschft folgt leicht, dass jedes Halbprimideal als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist.

Ist die Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch die schwachen Primärideale $\mathfrak{q}_i$ $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\frown\mathfrak{q}_2\frown\cdots\frown\mathfrak{q}_n$ unverkürzbar, so folgt aus dem Beweise von Satz 7, dass die Anzahl der zu $\mathfrak{a}$ gehörigen Primideale gleich n ist. Für irgendwelches Element r gilt $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(r)=(\mathfrak{q}_1:(r))\frown\cdots\frown(\mathfrak{q}_n:(r))$, und dabei ist $\mathfrak{q}_i:(r)$ ein zu $\mathfrak{p}_i$ gehöriges schwaches Primärideal, oder $\mathfrak{R}$, je nachdem $(r)\mathfrak{R}\notin\mathfrak{q}_i$ oder $(r)\mathfrak{R}\in\mathfrak{q}_i$ ist. Damit sollen die allen zu $\mathfrak{a}_1$ gehörigen Primideale identisch mit einem aus $\mathfrak{p}_1, \cdots \mathfrak{p}_n$ sein. Daraus ergibt sich die folgende Tatsache:

Für jeden aus $\mathfrak{a}$ erzeugten Idealquotient $\mathfrak{a}:(r_1r_2\cdots r_k)$ ist jedes von den zu ihm gehörigen Primidealen stets gleich einem aus $\mathfrak{p}_1,\cdots\mathfrak{p}_n$, wobei $\mathfrak{p}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ alle zu $\mathfrak{a}$ gehörige Primideale bedeuten.

Wir betrachten schliesslich eine Kette $\mathfrak{p}_0\subset\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset\cdots$ von Primidealen $\mathfrak{p}_i$ und bilden daraus ein Ideal

$$\mathfrak{a}=(p_1\mathfrak{p}_2\,,\ p_1p_3\mathfrak{p}_4\,,\ p_1p_3p_5\mathfrak{p}_6\,,\ p_1p_3p_5p_7\mathfrak{p}_8\,,\cdots)\,,$$

wobei p_i ein durch $\mathfrak{p}_{i-1}$ unteilbares Element aus $\mathfrak{p}_i$ bedeutet. Demnach gilt

$$\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}:(p_1)\supseteqq(\mathfrak{p}_2\,,\ p_3\mathfrak{p}_4\,,\ p_3p_5\mathfrak{p}_6\,,\ p_3p_5p_7\mathfrak{p}_8\,,\cdots)\supset\mathfrak{p}_2\,.$$

Wäre $\mathfrak{a}_1 \not\subseteq \mathfrak{p}_3$, so würde für ein durch $\mathfrak{p}_3$ unteilbares Element a_1' aus $\mathfrak{a}_1$

$$p_1 a_1' = p_1 p_2' + p_1 p_3 p_4' + p_1 p_3 p_5 p_6' + \cdots.$$

Da aber $p_1 \notin \mathfrak{p}_0$ ist, folgte daraus $a_1' \equiv p_2' + p_3 p_4' + p_3 p_5 p_6' + \cdots (\mathfrak{p}_0)$ und ein Widerspruch $a_1' \in \mathfrak{p}_3$. Es gilt damit $\mathfrak{p}_3 \supseteqq \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{p}_2$. Wendet man das obige Verfahren wieder auf $\mathfrak{a}_1$ an, so ist

$$\mathfrak{p}_5 \supseteqq \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 : (p_3) = \mathfrak{a} : (p_1 p_3) \supset \mathfrak{p}_4.$$

Durch Wiederholung desselben Prozesses haben wir im allgemeinen

$$\mathfrak{p}_{2n+1} \supseteqq \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n-1} : (p_{2n-1}) = \mathfrak{a} : (p_1 p_3 \cdots p_{2n-1}) \supset \mathfrak{p}_{2n}.$$

Auf Grund dieses Ergebnisses können wir sagen, dass mindestens ein zu $\mathfrak{a}_n$ gehöriges Primideal zwischen $\mathfrak{p}_{2n}$ und $\mathfrak{p}_{2n+1}$ liegt. Wenn die Länge der Kette $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \cdots$ unendlich wäre, so hätten die aus $\mathfrak{a}$ gebildeten Idealquotienten $\mathfrak{a} : (p_1 p_2 \cdots p_{2n-1})$ unendlich viele verschiedene zugehörige Primideale im Widerspruch zum früher Bewiesenen. Das vollendet den Beweis.

Wir kommen schliesslich zur Beschreibung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass jedes Ideal in einen Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen zerlegbar ist.

Wenn in $\mathfrak{R}$ die obig ausgesprochene Zerlegung von Ideal möglich ist, so folgt zuerst nach Satz 10, dass jede Teilerkette von Primidealen im Endlichen abbrechen muss. Zweitens ist es offenbar, dass jedes Halbprimideal als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist. Nach Satz 1 besteht also, dass die Teilerketten-bedingung für Halbprimideale eine notwendige Bedingung ist. Danach können wir das Gesamtresultat unserer Untersuchung über die Zerlegbarkeit des Ideals unter Beachtung der Sätze 6 und 9 in dem folgenden Hauptsatze zusammenfassen:

Hauptsatz 2. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kommutativer Ring ohne irgendwelche Bedingung. Jedes Ideal ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar, wenn in $\mathfrak{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Jede Teilerkette von Halbprimidealen bricht im Endlichen ab.*

2. *Jede Kette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : (b) \subset \mathfrak{a} : (b^2) \subset \cdots$ für beliebiges Element b bricht im Endlichen ab, und der letzte Idealquotient $\mathfrak{r}_1$ heisst ein Grenzideal von $\mathfrak{a}$. Wenn wir wieder die Kette $\mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_1 : (b_1) \subset \mathfrak{r}_1 : (b_1^2) \subset \cdots$ für ein Element b_1 bilden, so gewinnen wir auch ein Grenzideal $\mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{r}_1$. Nachdem wir in solcher Weise eine Teilerkette $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{r}_1 \subset \mathfrak{r}_2 \subset \cdots$ von Grenzidealen $\mathfrak{r}_i$ erzeugen, liegt die Länge der Kette unterhalb einer mit $\mathfrak{a}$ fest gegebenen Schranke.*

Wir können auch den aufgestellten Hauptsatz 2 in der folgenden Form umschreiben.

Hauptsatz 2'. *Es sei* $\mathfrak{R}$ *ein kommutativer Ring ohne irgend-welche Bedingungen. Jedes Ideal aus* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar, wenn* $\mathfrak{R}$ *die folgenden Eigenschaften hat:*

1. *Jede Teilerkette von Primidealen bricht im Endlichen ab.*

2. *Jede Kette* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}:(b) \subset \mathfrak{a}:(b^2) \subset \cdots$ *für beliebiges Element* b *bricht im Endlichen ab. Wenn wir den letztesten Idealquotient ein Grenzideal von* $\mathfrak{a}$ *heissen, so ist die Anzahl der Grenzideale von* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{a}$ *fest gegeben und endlich.*

Denn aus der soeben ausgesprochenen Eigenschaft 2 folgt leicht die Eigenschaft 2 in dem Hauptsatz 2, und weiter, dass jedes Halbprimideal als Durchschnitt von endlich vielen Primidealen darstellbar ist.

Daraus folgt wegen des Hauptsatzes 2, dass jedes Ideal als Durchschnitt von endlich vielen schwachen Primäridealen darstellbar ist.

Aus dem Betrachteten in den Beweisen der Sätze 9 und 10 folgt unmittelbar, dass die Bedingungen auch notwendig sind.