JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 18, NO. 3, MARCH, 1955

Idealtheorie im Stiemkeschen Körper

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30, September 1954)

In seiner Arbeit hat Herr E. Stiemke[1] allgemeine Grundsätze für die Behandlung der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern entwickelt und die Zerlegung der Hauptideale in denjenigen Körpern untersucht, in denen jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt. Im folgenden werden wir nach Herrn W. Krull[2] diesen Körper kurz als „*Stiemkeschen Körper*" bezeichnen.

Ist $\mathfrak{K}$ ein allgemeiner unendlicher algebraischer Zahlkörper und ist $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von $\mathfrak{K}$, so sind in $\mathfrak{O}$ folgende drei Bedingungen erfüllt:

I. $\mathfrak{O}$ ist ein kommutativer Integritätsbereich mit Einselement.[3]

II. Jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal ist durch mindestens ein Primideal teilbar und alle von Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.[4]

III. $\mathfrak{O}$ ist ganzabgeschlossen im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$.[5]

Gälte danach der Teilerkettensatz in $\mathfrak{O}$, so wären die Primärideale Primidealpotenzen und jedes Ideal würde Produkt von endlich vielen Primidealen, und folglich könnten wir in $\mathfrak{O}$ die klassische Idealtheorie entwickeln.[6] Jedoch für $\mathfrak{O}$ ist der Teilerkettensatz nicht immer erfüllt. Ist unter diesen Umständen $\mathfrak{O}$ eine Hauptordnung von einem eben genannten Stiemkeschen Körper $\mathfrak{K}$, dann ist in $\mathfrak{O}$ ausser I, II und III noch folgende Bedingung erfüllt.

IV. Jedes von Nullideal verschiedene Ideal besitzt nur endlich viele Primidealteiler.

Der Zweck dieser Arbeit ist nachzuweisen, dass die Ideale aus Stiemkeschen Hauptordnung $\mathfrak{O}$ in vieler Beziehung einer von den Idealen unter Voraussetzung des Teilerkettensatzes abweichenden Verhalt zeigen.

Im ersten Paragraphen wird gezeigt, dass sich jedes Ideal eindeutig als Produkt

1) E. Stiemke; „Über unendliche algebraische Zahlkörper," Math. Zeit. Bd. 25 (1926). Diese Stiemkesche Arbeit wird unter „Stiemke" zitiert.

2) W. Krull; „Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Math. Zeit. Bd. 29 (1929), s. 42, zitiert unter „Krull."

3), 4) Siehe etwa „Stiemke", s. 20, oder „Krull," s. 44.

5) W. Krull; „Idealtheorie," Ergeb. d. Math. u. I. Grenzgeb. 1935, s. 103.

6) Van der Waerden; "Moderne Algebra" II Teil. 1940, s. 84-91.

von endlich vielen teilerfremden Primäridealen darstellen lässt, wobei das Primärideal entweder eine Potenz von $\mathfrak{p}$, oder keine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist.[7] Weiter wollen wir beweisen, dass ein Ideal $\mathfrak{a}$ dann und nur dann eine endliche Basis besitzt, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ für jede zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ gilt.

Im zweiten Pargraphen wollen wir zeigen, dass, wenn $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ist, nicht immer ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, so dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Aber ist $\mathfrak{h}$ das Produkt von einigen geeigneten idempotenten Primidealteilern von $\mathfrak{a}$ und bezeichnet $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\mathfrak{h}$, dann existiert $\mathfrak{c}$, so dass $\mathfrak{a}'=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Ähnlich ist es im allgemeinen nicht möglich, dass aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}$ folgert. Die Unmöglichkeit beruht, darauf dass $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ immer für ein zu idempotenten Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{q}$ stehen kann.[8] Sind danach $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ die Produkte von einigen geeigneten idempotenten Primidealteilern (einschl. des Einheitsideals $\mathfrak{O}$) von $\mathfrak{a}$, so folgt aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ $\mathfrak{b}\mathfrak{h}=\mathfrak{c}\mathfrak{h}'$.

Im dritten Paragraphen untersuchen wir die idempotenten Ideale in $\mathfrak{O}$. Zuerst beweisen wir, dass, wenn $\mathfrak{a}\ (\neq (0), \mathfrak{O})$ ein idempotentes Ideal ist, so muss $\mathfrak{a}$ das Radikal in $\mathfrak{O}$ sein. Daraus folgern wir den Krullsche Satz[9] $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^n=(0)$ (wobei $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}^2$ ist) usw. Im Schlussparagraphen werden wir beweisen, dass in unserer Stiemkeschen Hauptordnung $\mathfrak{O}$ der Zariskische Satz,[10] den im Noetherschen Ring mit Einselement gilt, keine Geltung mehr hat, dass aber ein einwenig veränderter Satz gilt. Ferner werden wir zeigen, dass wir den von Herrn S. Mori erweiterten Zariskischen Satz[11] $\bigcap\limits_{\sigma}(\mathfrak{a}_{\sigma}, \mathfrak{b})=\mathfrak{b}$ usw. ohne Schwierigkeit beweisen können.

§ 1. Der Fundamentalsatz der Idealtheorie und Idealbasis

Unter einem unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ verstehen wir, wie gewöhnlich, den Körper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \mathfrak{K}_3 \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \mathfrak{K}_{\nu+1} \subset \cdots\cdots$ definirt wird,

7) Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper ist ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ dann und nur dann eine Potenz von $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ ist. Wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist, ist $\mathfrak{q}$ keine Potenz von $\mathfrak{p}$.
N. Nakano; „Über idempotentes Ideal in unendlichen algebraischen Zahlkörpern", Jour. of Sci. Of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 1, 1953, zitiert unter „Nakano (1)", s. 19, Satz 8.

8) N. Nakano; „Über die Einteilung von Primäridealen im unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 3, 1954, zitiert unter „Nakano (2)", s. 330, s. 335, und s. 340-341. An diesen Stellen habe ich Beispiele von drei Arten gegeben.

9) W. Krull; „Dimensionstheorie in Stellenringen", Crelles J., 179, 1938, s. 204.
A. Weil; „Foundation of algebraic geometry," 1946, s. 48, Lemma 4.

10) O. Zariski; „Generalized semi-local rings", Summa Brasiliensis Mathematicae 1, s. 169-195, 1946.
S. Mori; „Über die Gleichung $(\mathfrak{a}\mathfrak{x}, \mathfrak{b})=\mathfrak{x}$ mit einem unbekannten Ideale $\mathfrak{x}$", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 3, s. 303, 1954.

11) S. Mori; „Über den Durchschnitt $\bigcap\limits_{\alpha}\mathfrak{a}_{\alpha}$ der Ideale $\mathfrak{a}_{\alpha}$", Kyoto Mathematical Memoirs, 1955.

wobei jedes $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade in Bezug auf den Rationalkörper $\mathfrak{K}_0$ ist. Wir bezeichnen $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\cdots, \mathfrak{K}_\nu, \mathfrak{K}_{\nu+1}, \cdots, \mathfrak{K}_\lambda \cdots\}$. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so wird $\mathfrak{O}=\{\cdots, \mathfrak{O}_\nu, \mathfrak{O}_{\nu+1}, \cdots, \mathfrak{O}_\lambda, \cdots\}$.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein unendlicher algebraischer Zahlkörper, in dem jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt. Wir nennen einen solchen Körper $\mathfrak{K}$ „Stiemkeschen Körper". Im folgenden bedeutet $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung des Stiemkeschen Körpers $\mathfrak{K}$.

Zunächst wollen wir einen Satz vorausschicken, der in dieser Arbeit eine grosse Rolle spielt.

Satz 1. *Dafür, dass ein unendlicher algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ ein Stiemkescher Körper ist, ist notwendig und hinreichend, dass für die Zerlegung einer beliebigen natürlichen Primzahl p in $\mathfrak{O}_\nu$:*

$$p\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\,\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{e_{\nu m_\nu}}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu i}, \mathfrak{p}_{\nu j})=\mathfrak{O}_\nu, \ i \neq j \tag{1}$$

m_ν mit wachsendem ν beschränkt ist.

Zuerst nehmen wir an, dass $\mathfrak{K}$ ein Stiemkescher Körper ist und m_ν in der Zerlegung (1) von $p\mathfrak{O}_\nu$ mit ν über alle Grenzen wächst. Dann besitzt ein Ideal $p\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{K}$ unendlich viele Primidealteiler.[12] Nach der Definition des Stiemkeschem Körpers ist das unmöglich. Damit muss m_ν mit ν beschränkt sein.

Umgekehrt sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in einem unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ und habe das Ideal $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{a}_\lambda$ in $\mathfrak{O}_\lambda$ die Zerlegung

$$\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{p}_{\lambda 1}^{e_{\lambda 1}}\,\mathfrak{p}_{\lambda 2}^{e_{\lambda 2}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{\lambda n_\lambda}^{e_{\lambda n_\lambda}}, \quad (\mathfrak{p}_{\lambda i}, \mathfrak{p}_{\lambda j})=\mathfrak{O}_\lambda, \ i \neq j. \tag{2}$$

Da jedes Primideal $\mathfrak{p}_{\lambda i}$ aus $\mathfrak{O}_\lambda$ ein Teiler einer rationalen Primzahl p_i ist und die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $p_i\mathfrak{O}_\lambda$ bei wachsendem λ beschränkt ist, erreicht n_λ für hinreichend grosses λ den grössten Wert n. Nehmen wir jetzt an, dass dies schon in Körper $\mathfrak{K}_1$ der Fall ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_1=\mathfrak{a}_1=\mathfrak{p}_{11}^{e_{11}}\,\mathfrak{p}_{12}^{e_{12}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{1n}^{e_{1n}}. \tag{3}$$

im allgemeinen $$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\,\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\cdots\cdots\mathfrak{p}_{\nu n}^{e_{\nu n}}.$$

Wir denken die $\mathfrak{p}_{\nu i}$ so angeordnet, dass $\mathfrak{p}_{1i}\subseteqq\mathfrak{p}_{2i}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{p}_{\nu i}\subseteqq\mathfrak{p}_{\nu+1 i}\subseteqq\cdots$ ist, und wir definieren ein Primideal $\mathfrak{p}_i$ aus $\mathfrak{O}$ folgendermassen:

$$\mathfrak{p}_i=\{\mathfrak{p}_{1i}, \mathfrak{p}_{2i}, \cdots, \mathfrak{p}_{\nu i}, \cdots\}, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

Dann besitzt ein Ideal $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{O}$ folglich sein Teiler $\mathfrak{a}$ keinen anderen Primidealteiler

12) „Stiemke", s. 31.

ausser $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$. Also ist $\mathfrak{K}$ ein Stiemkescher Körper.

Vor kurzem habe ich den folgenden Fundamentalsatz bewiesen:[13] Jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ aus einem unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ lässt sich als der Durchschnitt von seinen sämtlichen isolierten Primärkomponenten darstellen. Darauf habe ich die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ definiert als die Gesamtheit aller Elemente, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente $s(\notin \mathfrak{p})$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist.[14] Im folgenden wollen wir eine Beweisführung des Fundamentalsatzes in Stiemkescher Hauptordnung $\mathfrak{O}$ unabhängig von obigem Beweis des allgemeinen Fundamentalsatzes geben. Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ sei ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$. Wenn wir*

$$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{c}_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu, \quad \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu, \quad \nu \geqq N,$$

setzen und die Vereinigungsmenge $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\}$ *mit* $\mathfrak{q}$ *bezeichnen, so ist* $\mathfrak{q}$ *die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$.

Zunächst sei E_ν ein Exponent, so dass $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ ist, dann können wir beweisen, dass $e_\nu = E_\nu$ für alle ν ist. Denn, wegen $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu \supseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ erhalten wir sofort

$$e_\nu \geqq E_\nu. \tag{4}$$

Es sei α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ teilbares Element. Dann ist

$$\alpha \in \mathfrak{q}, \quad \alpha = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu} \mathfrak{b}_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$$

und folglich nach Struktur von $\mathfrak{q}$ $\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ für hinreichend grosses λ $(\lambda > \nu)$. Es sei $\alpha \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{b}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$, so ist $\mathfrak{p}_\lambda^{E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$. Daraus folgt

$$E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda. \tag{5}$$

Jetzt nehmen wir an, dass $e_\nu > E_\nu$, d. h. $e_\nu - 1 \geqq E_\nu$ ist. Dann folgt aus (5)

$$(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda. \tag{6}$$

Aus $\mathfrak{a} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{c}_\nu \neq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - 1} \mathfrak{c}_\nu$ folgt die Existenz eines Elementes β von der Art, dass $\beta \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - 1} \mathfrak{c}_\nu$ und $\beta \notin \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{c}_\nu$ ist. Dann ist $\beta \notin \mathfrak{a}$. Da aber aus (6)

13) N. Nakano; „Über den Fundamentalsatz der Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern," Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 15, No. 3, 1952, s. 175. Diese Note zitiere ich unter „Nakano (3)".

14) „Nakano (3)", s. 172, Satz 1.

$$\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}(\mathfrak{c}_\nu\mathfrak{O}_\lambda) \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda = \mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\lambda \subseteqq \mathfrak{a}$$

folgt, erhalten wir $\beta \in \mathfrak{a}$. Mit diesem Widerspruch ist der Beweis von $e_\nu = E_\nu$ für alle ν abgeschlossen.

Zweitens können wir leicht bestätigen, dass $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist, d. h. dass $\mathfrak{q}$ die Gesamtheit aller Elemente ist, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente $s(\notin \mathfrak{p})$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist. Zu diesen Zwecke sei γ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{q}$, dann ist $\gamma \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$, folglich $\gamma \in \mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Wegen $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$, gibt es ein Element s in $\mathfrak{c}_\nu$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\nu$. Folglich erhalten wir

$$\gamma s \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{a}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}, \quad s \notin \mathfrak{p}.$$

Umgekehrt seien δ und t zwei Elemente, so dass $\delta t \in \mathfrak{a}$, $t \notin \mathfrak{p}$ ist. Dann ist δ, $t \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$, folglich ist $\delta t \in \mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{c}_\nu \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Da aber $t \notin \mathfrak{p}$ ist, wird $t \notin \mathfrak{p}_\nu$, also muss $\delta \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{q}$ sein.

Satz 2 (Fundamentalsatz). *Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{O}$ lässt sich eindeutig in der Form*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1}\,\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_s^{e_s}\,\mathfrak{q}_{s+1}\,\mathfrak{q}_{s+2}\cdots\mathfrak{q}_t \tag{7}$$

darstellen. Dabei ist $\mathfrak{p}_i^{e_i}(i=1, 2, \cdots, s)$ die zu nicht-idempotentem Primideal $\mathfrak{p}_i(\neq \mathfrak{p}_i^2)$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{q}_j(j=s+1, s+2, \cdots, t)$ ist die zu idempotentem Primideal $\mathfrak{p}_j(=\mathfrak{p}_j^2)$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a}$ nur durch endlich viele Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_t$ teilbar, so können wir annehmen, dass die Zerlegung von jeder durch $\mathfrak{p}_i(i=1, 2, \cdots, t)$ teilbaren natürlichen Primzahl schon innerhalb $\mathfrak{K}_1$ abbricht. Also erhalten wir

$$\mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{p}_{11}^{e_{11}}\,\mathfrak{p}_{12}^{e_{12}}\cdots\mathfrak{p}_{1t}^{e_{1t}},$$

im allgemeinen
$$\mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}}\,\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}}\cdots\mathfrak{p}_{\nu t}^{e_{\nu t}}.$$

Ist dann $e_{\nu i}$, der beschränkte und höchste Wert, den dieser Exponent anninmt, gleich e_i, so wird offenbar nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{p}_i^{e_i}$ die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$. Dabei ist klar, dass $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_i^2$ ist, denn wir haben schon folgenden Satz bewiesen:[15] Ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Hauptordnung von allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörpern ist dann und nur dann idempotent, wenn $\mathfrak{p}_\nu(=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\nu)$ nach $\mathfrak{p}$ unendlich verzweigt.

15) „Nakano (1)", s. 13, Satz 1.

Ist dagegen $e_{\nu j}$ unbeschränkt, so setzen wir

$$\mathfrak{q}_j = \{\mathfrak{p}_{1j}^{e_{1j}}, \mathfrak{p}_{2j}^{e_{2j}}, \cdots, \mathfrak{p}_{\nu j}^{e_{\nu j}}, \mathfrak{p}_{\nu+1 j}^{e_{\nu+1 j}}, \cdots\cdots\}$$

Dann wird nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{q}_j$ die zu $\mathfrak{p}_j$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$. Dabei ist $\mathfrak{p}_j=\mathfrak{p}_j^2$ nach obigem Satz.

Zum Schluss ist die Zerlegung (7) auch eindeutig. Denn eine andere Darstellung von $\mathfrak{a}$ in dieser Form dürfte kein von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_t$ verschiedenes Primideal enthalten. So haben wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1' \mathfrak{q}_2' \cdots \mathfrak{q}_s' \mathfrak{q}_{s+1}' \cdots \mathfrak{q}_t',$$

wobei $\mathfrak{q}_i'$ $(i=1, 2, \cdots, s, s+1, \cdots, t)$ das zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige Primärideal ist. Ist α_1 ein beliebiges Element in $\mathfrak{p}_1^{e_1}$, und ist β_1 ein Element in $\mathfrak{p}_2^{e_2}\mathfrak{p}_3^{e_3}\cdots\mathfrak{p}_s^{e_s}\mathfrak{q}_{s+1}\cdots\mathfrak{q}_t$ aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_1$, so erhalten wir

$$\alpha_1\beta_1 \in \mathfrak{p}_1^{e_1}(\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_s^{e_s}\mathfrak{q}_{s+1}\cdots\mathfrak{q}_t) = \mathfrak{q}_1'\mathfrak{q}_2'\cdots\mathfrak{q}_t' \subseteqq \mathfrak{q}_1'.$$

Dann erhalten wir, wegen $\beta_1 \notin \mathfrak{p}_1$ $\alpha_1 \in \mathfrak{q}_1'$, also wird $\mathfrak{p}_1^{e_1} \subseteqq \mathfrak{q}_1'$. In gleicher Weise gilt auch $\mathfrak{p}_1^{e_1} \supseteqq \mathfrak{q}_1'$, folglich ist $\mathfrak{p}_1^{e_1}=\mathfrak{q}_1'$, usw.

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale in folgende vier Arten einteilen:[16)]

(i) *Primärideal von erster Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(ii) *Primärideal von zweiter Art heisst* $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(iii) *Primärideal von dritter Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(iv) *Primärideal von vierter Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist.*

Der erste Fall entsteht dann und nur dann $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist,[17)] und die anderen Fälle können vorkommen, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist.

In der Zerlegung (7) ist also $\mathfrak{p}_i^{e_i}(i=1, 2, \cdots, s)$ von erster Art und $\mathfrak{q}_j(j=s+1, s+2, \cdots, t)$ von zweiter, dritter oder vierter Art.

Um unsere Untersuchungen weiter zu entwickeln, ist folgender Hilfssatz notwendig.

Hilfssatz 2. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und setzen wir* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_\nu h_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}, \cdots, \lambda>\nu\geqq N$, *dann gilt:*[18)]

(i) $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p} \rightleftarrows e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$,

$\mathfrak{q}=\mathfrak{q}\mathfrak{p} \rightleftarrows e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > e_\lambda$ *für mindestens ein* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$,

---

16) „Nakano (2)“, s. 327.

17) „Nakano (2)“, s. 328, Satz 6. Siehe noch Fussnote 7) in Seite 272.

18) „Nakano (2)“, s. 323-325, Sätze 1, 2, 3 und 4.

(ii) $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows (e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$,

$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \rightleftarrows (e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda - 1$ *für mindestens ein* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

Satz 3. *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von erster oder zweiter Art, so hat* $\mathfrak{q}$ *eine endliche Basis. Ist dagegen* $\mathfrak{q}$ *von dritter oder vierter Art, so hat* $\mathfrak{q}$ *keine endliche Basis.*

Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal von erster Art, so ist $\mathfrak{q}$ gleich einer bestimmten Potenz von $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^e$. Dann gilt $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^e$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$.[19] Da $\mathfrak{O}$ Stiemkesch ist, erhalten wir $\mathfrak{p}_\nu^e \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^e$, $\mathfrak{p}_\nu^e \mathfrak{O}_{\nu+2} = \mathfrak{p}_{\nu+2}^e$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_\nu^e \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^e$, $\cdots$, folglich ist $\mathfrak{p}_\nu^e \mathfrak{O} = \mathfrak{q}$. Daher besitzt $\mathfrak{q}$ eine endliche Basis, Zweitens ist $\mathfrak{q}$ von zweiter Art und bezeichnet $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\nu \geqq N$, und ferner setzt $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_\nu h_{\nu+1}}$ $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_{\nu+2} = \mathfrak{p}_{\nu+2}^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2}}$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda}$, $\cdots$. Andererseits ergibt sich aus $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und Hilfssatz 2 (i) $e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$. Also wird $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_\lambda$, d. h. $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, folglich muss $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O} = \mathfrak{q}$ sein. Daher ist eine Basis von $\mathfrak{q}$ endlich.

Drittens nehmen wir an, dass ein Primärideal $\mathfrak{q}$ von dritter oder vierter Art eine endliche Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ besitzt. Dann sind alle $\alpha_i \in \mathfrak{O}_\nu$, $i = 1, 2, \cdots, n$, für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$, folglich $\alpha_i \in \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Hiermit erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_\mu = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\mu = \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu} \text{ für alle } \mu \ (\mu > \nu \geqq N). \tag{8}$$

Ist andererseits $\mathfrak{q}$ von dritter oder vierter Art d. h. $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$, so können wir nach Hilfssatz 2 (i) mindestens einen Index λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ so wählen, dass $e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda > e_\lambda$ ist. Also ist $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda} \neq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ was nach (8) unmöglich ist. Mit diesem Widerspruch kann $\mathfrak{q}$ keine endliche Basis besitzen.

Dieser Satz lässt folgende andere Fassungen zu, die für idealtheoretische Anwendungen oft bequemer sind:

Zusatz. *Ein zu einem Primideal* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal* $\mathfrak{q}$ *besitzt dann und nur dann eine endliche Basis, wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *ist.*

Satz 4. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *besitzt dann und nur dann eine endliche Basis, wenn jede isolierte Primärkomponente von erster oder zweiter Art ist.*

Besitzt $\mathfrak{a}$ eine endliche Basis $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, so ist $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\mathfrak{O}$. Dann sind alle $\alpha_i \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$, folglich wird

$$\mathfrak{a} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu \supseteqq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mathfrak{O}_\nu$$

$$\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{O} \supseteqq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \mathfrak{O} = \mathfrak{a},$$

19) „Nakano (1)“, s. 14, Satz 3.

also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\nu \mathfrak{O} = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}} \mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}} \cdots \mathfrak{p}_{\nu m}^{e_{\nu m}} \mathfrak{O} = \mathfrak{p}_{\nu 1}^{e_{\nu 1}} \mathfrak{O} \cdot \mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}} \mathfrak{O} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{p}_{\nu m}^{e_{\nu m}} \mathfrak{O}$.

Setzn wir $\mathfrak{p}_{\nu t}^{e_{\nu t}} \mathfrak{O} = \mathfrak{q}_t$ $(t=1, 2, \cdots, m)$, so hat $\mathfrak{q}_t$ eine endliche Basis und folglich muss nach Satz 3 $\mathfrak{q}_t$ ein Primärideal von erster oder zweiter Art sein. Umgekehrt nehmen wir an, dass jedes $\mathfrak{q}_i$ von erster oder zweiter Art ist. Dann hat $\mathfrak{q}_i$ eine endliche Basis, folglich hat sein Produkt $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_m = \mathfrak{a}$ auch eine endliche Basis.

§ 2. Die Hanptsätze der Idealtheorie

Wenn aus der Teilbarkeit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ die Produktdarstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{O}$ folgt, nennen wir $\mathfrak{b}$ einem „*Faktor*“ von $\mathfrak{a}$. Dann hat man bereits den folgenden grundlegenden Hilfssatz [20] bewiesen.

Hilfssatz 3. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, *so gilt:*

(i) *Wenn* $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ *ist, so ist* $\mathfrak{q}'$ *immer ein Faktor von* $\mathfrak{q}$.

(ii) *Wenn* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ *ist und wenn* $\mathfrak{q}$ *von zweiter Art ist, so ist* $\mathfrak{q}'$ *dann und nur dann ein Faktor von* $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}'$ *von zweiter Art. ist. Ist dagegen* $\mathfrak{q}$ *von dritter oder vierter Art, so ist* $\mathfrak{q}'$ *immer ein Faktor von* $\mathfrak{q}$.

In seiner Arbeit hat Herr W. Krull [21] folgenden Satz bewiesen:

Satz. 5. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *zwei Ideale aus* $\mathfrak{O}$ *und ist* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, *so besitzt* $\mathfrak{a}$ *dann und nur dann* $\mathfrak{b}$ *als Faktor, wenn jede isolierte Primärkomponente von* $\mathfrak{b}$ *Faktor der entsprechenden Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$ *ist.*

Nach Hilfssatz 3 und den Sätzen 4, 5 erhalten wir ohne weiteres folgenden

Satz 6. (i) *Ist* $\mathfrak{b}$ *ein echter Teiler von einem Ideal* $\mathfrak{a}$ *und besitzen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *endliche Basis, so ist* $\mathfrak{b}$ *ein Faktor von* $\mathfrak{a}$.

(ii) *Ist* $\mathfrak{b}$ *ein echter Teiler von einem Ideal* $\mathfrak{a}$ *und besitzt* $\mathfrak{a}$ *eine endliche Basis, aber* $\mathfrak{b}$ *keine endliche Basis, so ist* $\mathfrak{b}$ *kein Faktor von* $\mathfrak{a}$.

(i) Ist einleuchtend.

(ii) Weil $\mathfrak{b}$ keine endliche Basis besitzt, existiert nach Satz 4 mindestens eine Primärkomponente $\mathfrak{q}^{(b)}$ von dritter oder vierter Art von $\mathfrak{b}$. Dann ist ein zu $\mathfrak{q}^{(b)}$ gehöriges Primideal $\mathfrak{p}$ idempotent. Ist ferner $\mathfrak{q}^{(a)}$ die entsprechende zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{q}^{(a)}$ von zweiter Art. Denn aus der Endlichkeit der Idealbasis von $\mathfrak{a}$ ergibt sich nach Satz 4 die Tatsache, dass $\mathfrak{q}^{(a)}$ von erster oder zweiter Art ist. Andererseits kann, wegen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{q}^{(a)}$ keineswegs von erster Art sein.

20) N. Nakano; „Über den Primäridcalquotienten im unendlichen algebraischen Zahlkörper“. dieses Journal, s. 269, Satz 11. Diese Note wird unter „Nakano (4)“ zitiert.

21) „Krull“, s. 52, Satz 11.

Ist $\mathfrak{q}^{(a)}$ von zweiter Art, ist aber $\mathfrak{q}^{(b)}$ von dritter oder vierter Art, so ist $\mathfrak{q}^{(b)}$ nach Hilfssatz 3 kein Faktor von $\mathfrak{q}^{(a)}$. Also kann $\mathfrak{b}$ nach Satz 5 kein Faktor von $\mathfrak{a}$ sein.

Satz 7. *Wenn* $\mathfrak{b}$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{a}$, *aber* $\mathfrak{b}$ *kein Faktor von* $\mathfrak{a}$ *ist, so können wir einige geeignete Primidealteiler* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$ *von* $\mathfrak{a}$ *so auswählen, dass* $\mathfrak{b}$ *ein Faktor von* $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r$ *ist, d. h. dass* $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *ist.*

Da $\mathfrak{b}$ kein Faktor von $\mathfrak{a}$ ist, existieren nach Satz 5 einige Primärkompoenten von $\mathfrak{b}$, welche keine Faktoren der entsprechenden Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$ sind. Wir bezeichnen der Bequemlichkeit halber die zu diesen Primärkomponenten gehörigen Primideale mit $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$. Andererseits ergibt sich aus Hilfssatz 3 folgende Tatsache: Sind $\mathfrak{q}_i^{(a)}$, $\mathfrak{q}_i^{(b)}$ resp. die zu demselbem $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ gehörigen Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{q}_i^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}_i^{(b)}$ [22], und ist $\mathfrak{q}_i^{(b)}$ dann und nur dann kein Faktor von $\mathfrak{q}_i^{(a)}$, wenn $\mathfrak{q}_i^{(a)}$ von zweiter Art und $\mathfrak{q}_i^{(b)}$ von dritter oder vierter Art ist. Dann wird $\mathfrak{q}_i^{(a)}\mathfrak{p}_i$ von dritter Art,[23] weil $\mathfrak{q}_i^{(a)}$ von zweiter Art ist. Also ist jede Primärkomponente von $\mathfrak{b}$ Faktor der entsprechenden Primärkomponente von $\mathfrak{a}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_r = \mathfrak{a}_1$, folglich muss $\mathfrak{b}$ ein Faktor von $\mathfrak{a}_1$ sein.

Wir haben bereits den folgenden grundlegenden Hilfssatz bewiesen.[24]

Hilfssatz 4. *Sind* $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *drei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathfrak{q}''$, *so ist dann und nur dann* $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}''$, *wenn* $\mathfrak{q}'$ *von dritter*, $\mathfrak{q}''$ *von zweiter Art und* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ *ist, oder wenn* $\mathfrak{q}'$ *von zweiter*, $\mathfrak{q}''$ *von dritter Art und* $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ *ist.*

Hieraus folgt noch:

Hilfssatz 5. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu einem Primideale* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und ist* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'$, *so wird* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{O}$ *oder* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$.

Aus $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ folgt $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q}'$. Der Fall $\mathfrak{q}' = \mathfrak{O}$ ist selbstverständlich. Es sei damit $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{O}$. Dann besitzt $\mathfrak{q}'$ mindestens einen Primidealteiler. Da aber $\mathfrak{q}$ nur durch ein einziges Primideal $\mathfrak{p}$ teilbar ist, so ist $\mathfrak{q}'$ durch kein von $\mathfrak{p}$ verschiedenes Primideal teilbar. Also ist $\mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{p}$, folglich gilt

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\,\mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{q}\,\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}.$$

Danach erhalten wir $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$. Aus $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ ergibt sich $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Ferner aus $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ folgt $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$. Denn, wäre $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{p}$, so hätten wir nach Hilfssatz 4 $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. Daraus folgte $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}'$. Wegen $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{p}$ würde $\mathfrak{q}' = \mathfrak{O}$, entgeegn der zu $\mathfrak{q}'$ gemachten Voraussetzung.

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}$, *so ist* $\mathfrak{b}\mathfrak{h} = \mathfrak{c}\mathfrak{h}'$, *wobei* $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ *resp. das Produkt geeigneter idem-*

22) N. Nakano: „Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 16, No. 3, 1953, s. 434, Hilfssatz 2 (i). Diese Note wird unter „Nakano (5)" zitiert.

23) „Nakano (2)" s. 337, Satz 20 (i).

24) „Nakano (4)," s. 259, Satz 2.

potenter Primidealteiler (einschl. des Einheitsideals $\mathfrak{O}$) von $\mathfrak{a}$ bedeutet.

Sind $\mathfrak{p}_i \not\supseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{b}$, so wird $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{c}$. Denn ist γ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{c}$ und ist α ein Element in $\mathfrak{a}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_i$, so ist $\gamma\alpha \in \mathfrak{ac} = \mathfrak{ab} \subseteq \mathfrak{p}_i$, folglich $\gamma \in \mathfrak{p}_i$. Also ist $\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{c}$. Ist $\mathfrak{q}_i^{(ab)}$, $\mathfrak{q}_i^{(b)}$, $\mathfrak{q}_i^{(ac)}$, $\mathfrak{q}_i^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{c}$, so erhalten wir, wegen $\mathfrak{p}_i \not\supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}_i^{(ab)} = \mathfrak{q}_i^{(b)}$ und $\mathfrak{q}_i^{(ac)} = \mathfrak{q}_i^{(c)}$ [25], danach ist

$$\mathfrak{q}_i^{(b)} = \mathfrak{q}_i^{(c)}. \tag{9}$$

Sind zweitens $\mathfrak{p}_j \supseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_j \not\supseteq \mathfrak{b}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{q}_j^{(ab)} = \mathfrak{q}_j^{(a)},\ \mathfrak{q}_j^{(ac)} = \mathfrak{q}_j^{(a)} \mathfrak{q}_j^{(c)}\ {}^{25)},\ \text{folglich}\ \mathfrak{q}_j^{(a)} = \mathfrak{q}_j^{(a)} \mathfrak{q}_j^{(c)},$$

wobei $\mathfrak{q}_j^{(ab)}$, $\mathfrak{q}_j^{(a)}$, $\mathfrak{q}_j^{(ac)}$, $\mathfrak{q}_j^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}_j$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{c}$ ist. Aus $\mathfrak{q}_j^{(a)} = \mathfrak{q}_j^{(a)} \mathfrak{q}_j^{(c)}$ ergibt sich nach Hilfssatz 5

$$\mathfrak{q}_j^{(c)} = \mathfrak{O} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q}_j^{(c)} = \mathfrak{p}_j. \tag{10}$$

Sind drittens $\mathfrak{p}_\kappa \supseteq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_\kappa \supseteq \mathfrak{b}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{q}_\kappa^{(ab)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(a)} \mathfrak{q}_\kappa^{(b)},\ \mathfrak{q}_\kappa^{(ac)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(a)} \mathfrak{q}_\kappa^{(c)},\ \text{folglich}\ \mathfrak{q}_\kappa^{(a)} \mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(a)} \mathfrak{q}_\kappa^{(c)},$$

wobei $\mathfrak{q}_\kappa^{(ab)}$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(a)}$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(b)}$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}_\kappa$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ist. Dabei ist $\mathfrak{p}_\kappa \not\supseteq \mathfrak{c}$, so denken wir $\mathfrak{q}_\kappa^{(c)} = \mathfrak{O}$, danach erhalten wir nach Hilfssatz 5

$$\mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{p}_\kappa. \tag{11}$$

Ferner ist $\mathfrak{p}_\kappa \supseteq \mathfrak{c}$, so wird nach Hilfssatz 4

$$\mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(c)},\ \mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{p}_\kappa \mathfrak{q}_\kappa^{(c)}\ \text{oder}\ \mathfrak{p}_\kappa \mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(c)} \tag{12}$$

Schliesslich kann offenbar $\mathfrak{q}_j^{(c)} = \mathfrak{p}_j$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{p}_\kappa$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(c)}$, $\mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{p}_\kappa \mathfrak{q}_\kappa^{(c)}$, $\mathfrak{p}_\kappa \mathfrak{q}_\kappa^{(b)} = \mathfrak{q}_\kappa^{(c)}$ resp. nur dann vorkommen, wenn jedes Primideal idempotent ist. Nach (9), (10) (11) und (12) ist unser Satz bewiesen.

Zusatz 1. *Sind $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$ und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{O}$, so ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{h}$, wobei $\mathfrak{h}$ das Produkt geeigneter idempotenter Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ ist.*

Dies folgt ohne weiteres aus der Tatsache, dass, wenn in dem Beweise dieses Satzes 8 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{O}$ ist, kann nur (9) und (10) vorkommen.

Zusatz 2. *Sind $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ac}$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{O}$, und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}) = \mathfrak{O}$, so ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.*

25) Vgl. „Nakano (5)", s. 435, Hilfssätze 3 und 4.

§ 3. Idempotentes Ideal

Ist $\mathfrak{h}$ ein Ideal aus $\mathfrak{O}$ und besitzt der Restklassenring $\mathfrak{O}/\mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element, so heisst $\mathfrak{h}$ *ein Radikal* (oder *Halbprimideal*). Fassen wir alle nilpotente Elemente in Bezug auf ein Ideal $\mathfrak{a}$ als eine Menge $\mathfrak{h}$ zusammen, so bildet $\mathfrak{h}$ ein Radikal, und wir nennen $\mathfrak{h}$ *das zu* $\mathfrak{a}$ *gehörige Radikal*, $\mathfrak{a}$ *das zu Radikal* $\mathfrak{h}$ *gehörige Ideal*. Nach dieser Definition des Radikals können wir ohne weiteres folgende Hilfssätze 6 und 7 beweisen.

Hilfssatz 6. *Jedes Radikal ist als Durchschnitt (d. h. Produkt) von endlich vielen verschiedenen Primidealen darstellbar und umgekehrt.*

Hilfssatz 7. *Ist* $\mathfrak{a}$ *das zu Radikal* $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1 \frown \mathfrak{p}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{p}_n$ *gehörige Ideal, so ist* $\mathfrak{a}$ *nur durch* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ *teilbar und umgekehrt.*

Wir haben bereits folgende zwei Sätze im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper bewiesen:

(i) Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}(\neq(0),\mathfrak{O})$ ist dann und nur dann idempotent, wenn jede isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ idempotent ist.[26]

(ii) Ist ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ idempotent, so ist $\mathfrak{q}$ gleich $\mathfrak{p}$.[27]

Aus (i) und (ii) ergibt sich; Ein Ideal $\mathfrak{a}(\neq(0),\mathfrak{O})$ ist dann und nur dann idempotent, wenn seine sämtlichen Primärkomponenten gleich idempotente Primideale sind. Ist daher ein Ideal $\mathfrak{a}(\neq(0),\mathfrak{O})$ idempotent, so muss $\mathfrak{a}$ ein Radikal in $\mathfrak{O}$ sein. Das gewonnene Ergebnis möge seiner Wichtigkeit halber als Satz formuliert werden:

Satz 9. *Ist* $\mathfrak{a}(\neq(0),\mathfrak{O})$ *ein idempotentes Ideal, so ist* $\mathfrak{a}$ *das Radikal in* $\mathfrak{O}$.[28]

Satz 10 (Krullscher Satz). *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges nicht idempotentes Ideal, so ist* $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^n=(0)$.

Nun ziehen wir zunächst den Fall in Betracht, dass $\mathfrak{a}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges nicht-idempotentes Primärideal $\mathfrak{q}$ gleich ist. In diesem Fall ist der folgende Satz grundlegend: Sind $\mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q}''$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und sind $a \notin \mathfrak{q}'$, $b \notin \mathfrak{q}''$, so ist $ab \notin \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$.[29] Jetzt setzen wir $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}^n=\mathfrak{d}$, so ist $\mathfrak{d}$ ein Primideal. Denn seien α, β zwei Elemente ausserhalb von $\mathfrak{d}$, so ergibt sich die Existenz der natürlichen Zahlen n, m, derart, dass $\alpha \notin \mathfrak{q}^n$ und $\beta \notin \mathfrak{q}^m$ sind. Daraus folgt nach dem eben besprochenen Satz $\alpha\beta \notin \mathfrak{q}^{n+m}$, folglich $\alpha\beta \notin \mathfrak{d}$. Aus $\alpha \notin \mathfrak{d}$, $\beta \notin \mathfrak{d}$, muss damit $\alpha\beta \notin \mathfrak{d}$ folgen, also ist $\mathfrak{d}$ ein Primideal. Da aber in unendlichen algebraischen

26) „Nakano (1)" s. 20, Satz 10.

27) „Nakano (1)", s. 16, Satz 6.

28) Es ist klar, dass die Umkehrung von Satz 9 nicht immer gilt.

Zahlkörpern jedes von (0) verschiedene Primideal teilerlos ist, so erhalten wir $\mathfrak{d}=(0)$. Also gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}^n=(0)$, wenn $\mathfrak{q}$ nicht idempotent ist.[30]

Zweitens ist $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_r$ eine Darstellung durch seine isolierten Primärkomponenten, so ist nach Satz 9 mindestens eines der $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_r$ etwa $\mathfrak{q}_1$, keinesweg idempotent. Nach dem soeben gewonnenen Ergebnisse wird damit $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}_1^n=(0)$. Infolgedessen erhalten wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_1^n (\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r)^n \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_1^n = (0),$$

Damit ist $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^n=(0)$ bewiesen.

Satz 11. *Ist* $\mathfrak{a}\,(\neq(0))$ *ein gegebenes Ideal aus* $\mathfrak{O}$ *und ist* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{b}$ *idempotent.*

Aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ergibt sich $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}(\mathfrak{b}\mathfrak{a})=\mathfrak{b}^2\mathfrak{a}$, folglich $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{b}^2$. In gleicher Weise erhalten wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2\,\mathfrak{a} = \cdots = \mathfrak{b}^n\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{n+1}\,\mathfrak{a} = \cdots$$

d. h.

$$\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b},\ \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^2,\ \cdots,\ \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^n,\ \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^{n+1}, \cdots,$$

also $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}^2\cap\cdots\cap\mathfrak{b}^n\cap\cdots$. Wäre $\mathfrak{b}\neq\mathfrak{b}^2$, so würde nach Satz 10 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{b}^n=(0)$. Daraus folgte $\mathfrak{a}=(0)$, was ein Widerspruch wäre. Also muss $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2$ sein.

Umgekehrt, ist $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Radikal und ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2$, dann erhebt sich die Frage, ob wir $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\mathfrak{a}$ erhalten oder nicht? Betreffs dieser Frage können wir ohne Mühe zeigen, dass aus $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2$ nicht immer $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\mathfrak{a}$ folgt. Denn, wenn eine Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ von zweiter Art ist, dann sind $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. Infolgedessen erhalten wir $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{h}\mathfrak{a}$, trotzdem ist $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2$. Ferner die Frage, wodurch $\mathfrak{a}\mathfrak{h}=\mathfrak{a}$ ausgezeichnet ist, wird durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 12. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein gegebenes zu Radikal* $\mathfrak{h}$ *gehöriges Ideal, so ist dann und nur dann* $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\mathfrak{a}$, *wenn jede Primärkomponente von* $\mathfrak{a}$ *entweder von dritter oder vierter Art ist.*

Ist $\mathfrak{q}_i$ eine Primärkomponente von $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_r$, so folgt aus $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\mathfrak{a}$ nach der Eindeutigkeit der isolierten Komponentenideale $\mathfrak{q}_i=\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i$ für alle i, folglich ist $\mathfrak{q}_i$ von dritter oder vierter Art und umgekehrt.

Hilfssatz 8. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{q}'$ *und weiter ist* $\mathfrak{q}$ *nicht idempotent, so können wir n so gross wählen, dass* $\mathfrak{q}^n\subset\mathfrak{q}'$ *ist.*

Da $\mathfrak{q}$ nicht idempotent ist, so wird nach Satz 10 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}^n=(0)$. Wäre $\mathfrak{q}^n\supseteqq\mathfrak{q}'$ für alle n, so würde $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{q}^n\supseteqq\mathfrak{q}'$ sein. Damit sollte $\mathfrak{q}'=(0)$ sein. Daraus folgte aber

29) „Nakano (2)“, s. 331, Hilfssatz 6.

30) Vgl. „Nakano (1)“, s. 15, Satz 15.

der Widerspruch, dass jedes Element aus $\mathfrak{p}$ nilpotent wäre, weil $\mathfrak{q}'$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal ist. Also muss $\mathfrak{q}^n \supsetneqq \mathfrak{q}'$ für hinreichend grosses n sein. Da aber $\mathfrak{q}^n$ und $\mathfrak{q}'$ zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale sind, so entsteht entweder $\mathfrak{q}^n \supset \mathfrak{q}'$ oder $\mathfrak{q}^n = \mathfrak{q}'$ oder $\mathfrak{q}^n \subset \mathfrak{q}'$.[31] Danach erhllten wir $\mathfrak{q}^n \subset \mathfrak{q}'$ für hinreichend grosses n.

Auf Grund des Hilfssatzes 8 gilt nun der folgende dem Satz 11 ähnliche Satz:

Satz 13. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *gegebene Ideale aus* $\mathfrak{O}$ *und ist* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ *und ferner* $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{b}$ *idempotent.*

Aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{b} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}^2$. In gleicher Weise ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}^3 = \cdots = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}^n = \cdots$. Für den Fall $\mathfrak{b} = \mathfrak{O}$ ist der Satz klar, also nehmen wir $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{O}$ an. Dann ist $\mathfrak{b}$ durch mindestens ein Primideal teilbar. Nun sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$ sämtliche Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{q}_i^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}_i^{(b)}$ ist die zu $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1^{(a)} \cap \mathfrak{q}_2^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(a)} \cap \mathfrak{q}_{r+1}^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(a)}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(b)},$$

wobei $\mathfrak{q}_j^{(a)} (j = r+1, r+2, \cdots, s)$ eine zu $\mathfrak{p}_j$ (ausser $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$) gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ ist. Wegen $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i \subseteqq \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ für alle $i (i = 1, 2. \cdots, r)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} = \mathfrak{a}:\mathfrak{p}_i &= (\mathfrak{q}_1^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(a)}):\mathfrak{p}_i \\ &= \mathfrak{q}_1^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i-1}^{(a)} \cap (\mathfrak{q}_i^{(a)}:\mathfrak{p}_i) \cap \mathfrak{q}_{i+1}^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(a)}. \end{aligned}$$

Dann gilt nach der Eindeutigkeit[32] der isolierten Komponentenideale

$$\mathfrak{q}_i^{(a)}:\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i^{(a)} \text{ für alle } i \ (i = 1, 2, \cdots, r),$$

also

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^2 \text{ für alle } i \ (i = 1, 2, \cdots, r).^{33)} \tag{13}$$

Jetzt nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}_i^{(b)} \neq \mathfrak{p}_i$ für mindestens ein i $(1 \leqq i \leqq r)$ ist. Dann können wir nach Hilfssatz 8 n so gross wählen dass

$$(\mathfrak{q}_i^{(b)})^n \subset \mathfrak{q}_i^{(a)} \tag{14}$$

ist. Nun bezeichnen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_i^{(a)} \cap \mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_i^{(b)} \cap \mathfrak{b}_i$, wobei $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{q}_1^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i-1}^{(a)} \cap \mathfrak{q}_{i+1}^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(a)}$ und $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{i-1}^{(b)} \cap \mathfrak{q}_{i+1}^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(b)}$ sind. Dann gilt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}^n = (\mathfrak{q}_i^{(a)} \cap \mathfrak{a}_i):(\mathfrak{q}_i^{(b)}\mathfrak{b}_i)^n = \{(\mathfrak{q}_i^{(a)} \cap \mathfrak{a}_i):(\mathfrak{q}_i^{(b)})^n\}:\mathfrak{b}_i^n.$$

Da aber aus (14) $\mathfrak{q}_i^{(a)}:(\mathfrak{q}_i^{(b)})^n = \mathfrak{O}$ folgt, so erhalten wir

$$\mathfrak{a} = \{\mathfrak{a}_i:(\mathfrak{q}_i^{(b)})^n\}:\mathfrak{b}_i^n = \mathfrak{a}_i:(\mathfrak{q}_i^{(b)}\mathfrak{b}_i)^n = \mathfrak{a}_i:\mathfrak{b}^n \supseteqq \mathfrak{a}_i,$$

31) „Nakano (4)" s. 258, Hilfssatz 1.

32) Diese „Eindeutigkeit" ist im Sinne von Satz 1.

33) Ist $\mathfrak{q}_i^{(a)}:\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i^{(a)}$, so ist $\mathfrak{q}_i^{(a)}$ von zweiter oder vierter Art. Danach muss $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^2$ sein. Vgl. „Nakano (2)", s. 328, Satz 6.

d. h. $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{a}_i$. Das ist unmöglich. Deshalb muss $\mathfrak{q}_i^{(b)} = \mathfrak{p}_i$ für alle $i\,(i=1, 2, \cdots, r)$ sein, folglich $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$ sein. Ferner aus (13) folgt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$.

Danach erhebt sich wieder die Frage, ob wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{h}$ erhalten oder nicht, wenn $\mathfrak{h}$ das zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ gehörige Radikal und $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^2$ ist? Betreffs dieser Frage können wir auch ohne weiteres zeigen, dass aus $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^2$ nicht immer $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{h}$ folgt. Wir erhalten darüber folgenden

Satz 14. *Ist $\mathfrak{a}$ ein gegebenes zu Radikal $\mathfrak{h}$ gehöriges Ideal, so ist dann und nur dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{h}$, wenn jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ von zweiter oder vierter Art ist.*

Sind $\mathfrak{h} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r$, so erhalten wir $\mathfrak{a} : \mathfrak{h} \supseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_i \supseteqq \mathfrak{a}$ für alle $i\,(i=1, 2, \cdots, r)$. Aus $\mathfrak{a} : \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_i = \mathfrak{a}$. Danach ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_i = (\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_r) : \mathfrak{p}_i$ $= \mathfrak{q}_1 \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_i : \mathfrak{p}_i) \frown \mathfrak{q}_{i+1} \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_r = \mathfrak{a}$. Also gilt nach der Eindeutigkeit der isolierten Komponentenideale $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ für alle $i\ (i=1, 2, \cdots, n)$. Hiermit muss jede Pimärkomponente von $\mathfrak{a}$ von zweiter oder vierter Art sein.

Umgekehrt aus $\mathfrak{q}_i : \mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_i &= (\mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_r) : \mathfrak{p}_i = (\mathfrak{q}_1 : \mathfrak{p}_i) \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_i : \mathfrak{p}_i) \frown \cdots \frown (\mathfrak{q}_r : \mathfrak{p}_i) \\ &= \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_i \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_r = \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{h} = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r = (\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_1) : \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \cdots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \cdots \mathfrak{p}_r$, in gleicher Weise ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \cdots \mathfrak{p}_r = \mathfrak{a} : \mathfrak{p}_3 \cdots \mathfrak{p}_r$ usw. Danach erhalten wir $\mathfrak{a} : \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$.

Fassen wir unsere Sätze 13 und 14 zusammen, so erhalten wir folgenden

Zusatz. *Ist $\mathfrak{a}$ ein gegebenes zu Radikal $\mathfrak{h}$ gehöriges Ideal, so ist dann und nur dann $\mathfrak{a}\mathfrak{h} = \mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{h}$, wenn jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ von vierter Art ist.*

§ 4. Der Zariskische Satz

In seiner Arbeit hat Herr O. Zariski den folgenden interessanten Satz bewiesen: *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale aus einem Noetherschen Ring mit Einheitselement und sind $\mathfrak{q}_{s+1}, \mathfrak{q}_{s+2}, \cdots, \mathfrak{q}_r$ alle Primärkomponenten von $\mathfrak{b}$, für die $(\mathfrak{q}_j, \mathfrak{a}) = (1)$ $(j = s+1, s+2, \cdots, r)$ gelten, so ist*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \frown \mathfrak{q}_2 \frown \cdots \frown \mathfrak{q}_s.$$

In diesem Paragraphen wollen wir beweisen, dass in unserer Stiemkeschen Hauptordnung $\mathfrak{O}$ der Zariskische Satz nicht mehr gilt, aber dafür ein ein wenig veränderter Satz gilt. Im folgenden bezeichen wir die zu demselbem $\mathfrak{p}_i$ gehörige Primärkomponente von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{q}_i^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}_i^{(b)}$.

Satz 15. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ irgend zwei Ideale in $\mathfrak{O}$ und sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_r$ sämtliche*

Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ *und sind* $\mathfrak{q}_{s+1}^{(b)}, \mathfrak{q}_{s+2}^{(b)}, \cdots \mathfrak{q}_r^{(b)}$ *alle Primärkomponenten von* $\mathfrak{b}$, *für die* $(\mathfrak{q}_j^{(b)}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{O}$ $(j=s+1, s+2, \cdots, r;\ 1 \leqq s \leqq r)$ *gelten und ferner, ist*[34] *irgendeines von* $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_i^2$ *und* $\mathfrak{q}_i^{(a)} \neq \mathfrak{p}_i (= \mathfrak{p}_i^2)$ *und* $\mathfrak{q}_i^{(a)} = \mathfrak{q}_i^{(b)} = \mathfrak{p}_i (= \mathfrak{p}_i^2)$ *für alle* i $(i=1, 2, \cdots s)$, *dann gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)}.$$

Setzen wir $\mathfrak{q}_1^{(a)} \cap \mathfrak{q}_2^{(a)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(a)} = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)} = \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{q}_{s+1}^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(b)} = \mathfrak{b}_2$, so wird $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$. Dann gilt zunächst $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1$.

Denn, es ist klar dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \supseteqq \mathfrak{b}_1$ ist. Daher wollen wir beweisen: $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq \mathfrak{b}_1$. Setzen wir $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q}_1^{(b)} \mathfrak{q}_2^{(b)} \cdots \mathfrak{q}_i^{(b)} \cdots \mathfrak{q}_s^{(b)} = \mathfrak{q}_i^{(b)} \mathfrak{c}_i$, so können wir nach Voraussetzung Hilfssatz 8 n $(\geqq 2)$ so gross wählen, dass

$$(\mathfrak{q}_i^{(a)})^{n-1} \subseteqq \mathfrak{q}_i^{(b)}, \text{ folglich } (\mathfrak{q}_i^{(a)})^n \subseteqq \mathfrak{q}_i^{(b)} \mathfrak{q}_i^{(a)} \tag{15}$$

ist, weil irgendeines von $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_i^2$ und $\mathfrak{q}_i^{(a)} \neq \mathfrak{p}_i (= \mathfrak{p}_i^2)$ und $\mathfrak{q}_i^{(a)} = \mathfrak{q}_i^{(b)} = \mathfrak{p}_i (= \mathfrak{p}_i^2)$ gilt.

Daraus folgt

$$(\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq ((\mathfrak{q}_i^{(a)})^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq (\mathfrak{q}_i^{(b)} \mathfrak{q}_i^{(a)}, \mathfrak{q}_i^{(b)} \mathfrak{c}_i) = \mathfrak{q}_i^{(b)} (\mathfrak{q}_i^{(a)}, \mathfrak{c}_i).$$

Wegen $(\mathfrak{q}_i^{(a)}, \mathfrak{c}_i) = \mathfrak{O}$, erhalten wir

$$(\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq \mathfrak{q}_i^{(b)} \text{ für alle } i \ (i = 1, 2, \cdots, s). \tag{16}$$

Damit ist immer $(\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq \mathfrak{b}_1$ für hinreichend grosses n. Daraus folgt $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \subseteqq \mathfrak{b}_1$.

Danach erhalten wir

$$\mathfrak{b}_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1) \supseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}) \supseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}). \tag{17}$$

Da aber $(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{O}$ ist, ergibt sich

$$(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) \supseteqq (\mathfrak{a}^n \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}^n \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1 \text{ für alle } n. \tag{18}$$

Also gilt
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{b}_1. \tag{19}$$

Aus (17) und (19) erhalten wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)}.$$

Satz 16 (Zariskischer Satz). *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *irgend zwei Ideale in* $\mathfrak{O}$ *und sind* $\mathfrak{q}_{s+1}^{(b)}, \mathfrak{q}_{s+2}^{(b)}, \cdots, \mathfrak{q}_r^{(b)}$ *alle Primärkomponenten von* $\mathfrak{b}$, *für die* $(\mathfrak{q}_j^{(b)}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{O}$ $(j=s+1, s+2, \cdots, r)$

34) Dafür dass wir die Zariskische Schliessung in unserer Hauptordnung $\mathfrak{O}$ folgern, ist diese Voraussetzung notwendig.

gelten, und ist ferner $\mathfrak{q}_i^{(a)}=\mathfrak{p}_i(=\mathfrak{p}_i^2)$ $(i=t+1,t+2,\cdots,s)$, *dann erhalten wir*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1^{(b)}\cap\mathfrak{q}_2^{(b)}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t^{(b)}\cap\mathfrak{p}_{t+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_s.$$

Zum Beweise setzen wir $\mathfrak{q}_1^{(b)}\cap\mathfrak{q}_2^{(b)}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t^{(b)}=\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{q}_{t+1}^{(b)}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_s^{(b)}=\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{q}_{s+1}^{(b)}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_r^{(b)}=\mathfrak{b}_3$. d. h. $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2\cap\mathfrak{b}_3=\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3$ und weiter $\mathfrak{q}_1^{(a)}\cap\mathfrak{q}_2^{(a)}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t^{(a)}=\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{p}_{t+1}\cap\mathfrak{p}_{t+2}\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_s=\mathfrak{h}$, d. h. $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{h}\cap\mathfrak{a}_3=\mathfrak{a}_1\mathfrak{h}\mathfrak{a}_3$, wobei $\mathfrak{a}_3$ der Faktor von $\mathfrak{a}$ und durch Primideale ausser $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_t, \cdots, \mathfrak{p}_s, \cdots\mathfrak{p}_r$ teilbar ist.
Dann können wir zuerst

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$$

beweisen. Denn nach Satz 15 erhalten wir $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{h})=\mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$. Da aber $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)$ $\subseteqq\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{h})$ ist, erhalten wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \subseteqq \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}. \tag{20}$$

Andererseits erhalten wir in gleicher Weise [35] wie im Beweise in Satz 15

$$(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supseteqq \mathfrak{b}_1\mathfrak{h} \text{ für alle } n, \text{ d. h. } \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) \supseteqq \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}. \tag{21}$$

Aus (20) und (21) folgt $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$.

Danach erhalten wir, wegen $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^2=\cdots=\mathfrak{h}^n$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})\subseteqq\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b})\subseteqq\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}. \tag{22}$$

Andererseits erhalten wir ohne weiteres [36]

$$(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{b}_1 \text{ für alle } n,$$

also ist $(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b})\supseteqq(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b}\mathfrak{h})\supseteqq\mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$, d. h. $(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b})\supseteqq\mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$ für alle n. Daher erhalten wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) ergibt sich

---

35) Da $(\mathfrak{a}_1^n,\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{O}$ ist, so wird $(\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\supseteqq(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1(\mathfrak{a}_1^n, \mathfrak{b}_2)=\mathfrak{b}_1$. Daraus folgt $(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\supseteqq$ $(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{h}) \supseteqq \mathfrak{b}_1\mathfrak{h}$, weil $\mathfrak{h}$ idempotent ist.

36) Wegen $(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)=\mathfrak{O}$, erhalten wir $(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b}) \supseteqq (\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{a}_3^n\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1(\mathfrak{a}_1^n\mathfrak{a}_3^n, \mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_3)=\mathfrak{b}_1$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{a}^n, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1\mathfrak{h} = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_t^{(b)} \cap \mathfrak{p}_{t+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s.$$

Aus den oben gewonnenen Ergebnissen können wir schliessen: In der Stiemkeschen Hauptordnung $\mathfrak{O}$ gilt nicht immer der Zariskische Satz, aber dafür gilt ein wenig veränderter Satz mit Rücksicht auf die Tatsache, dass ein Primideal idempotent sein kann.

Zum Schluss wollen wir in diesem Paragraph einen Satz beweisen, welcher die von Prof. S. Mori aufgestellte Erweiterung des Zariskischen Satzes ist.

Satz 17. *Sind* $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)} \cap \mathfrak{q}_{s+1}^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(b)}$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)}$ *und* $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{q}_{s+1}^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r^{(b)}$ *und ist* $\bigcap_{\sigma} \mathfrak{a}_\sigma$ *der Durchschnitt von sämtlichen Idealen* $\mathfrak{a}_\sigma$, *so dass* $\mathfrak{a}_\sigma \subseteqq \mathfrak{p}_i (i=1, 2, \cdots, s)$ *ist, aber* $\mathfrak{a}_\sigma \not\subseteqq \mathfrak{p}_j$ $(j=s+1, s+2, \cdots, r)$ *ist, dann gilt*

$$\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)}.$$

Setzen wir zuerst $\mathfrak{a}_\sigma = \mathfrak{a}'_\sigma \cap \mathfrak{a}''_\sigma = \mathfrak{a}'_\sigma \mathfrak{a}''_\sigma$, wobei $\mathfrak{a}'_\sigma = \mathfrak{q}_1^{(\sigma)} \cap \mathfrak{q}_2^{(\sigma)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(\sigma)}$ und $(\mathfrak{a}''_\sigma, \mathfrak{b}) = \mathfrak{O}$ sind, so ist

$$\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) \subseteqq \bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1).$$

Dabei ist $\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1$. Denn, es ist klar, dass $\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1) \supseteqq \mathfrak{b}_1$ ist. Andererseits sei $\mathfrak{h}$ das zu $\mathfrak{a}'_\sigma$ gehörige Radikal, so ist $\mathfrak{b}_1^n$ für alle n ein zu $\mathfrak{h}$ gehöriges Ideal, so wird

$$\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1) \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathfrak{b}_1{}^n, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1.$$

Daher muss $\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1$ sein. Daraus folgt

$$\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) \subseteqq \bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}'_\sigma, \mathfrak{b}_1) = \mathfrak{b}_1. \tag{24}$$

Zweitens erhalten wir, wegen $(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{O}$, $(\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2) = \mathfrak{b}_1$. Dann gilt, wegen $(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) \supseteqq (\mathfrak{a}_\sigma \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b})$, $(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{b}_1$ für alle σ. Danach wird

$$\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) \supseteqq \mathfrak{b}_1. \tag{25}$$

Aus (24) und (25) erhalten wir $\bigcap_{\sigma}(\mathfrak{a}_\sigma, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{q}_1^{(b)} \cap \mathfrak{q}_2^{(b)} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_s^{(b)}$.

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinem besten Dank aus.