JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 18, NO. 3, MARCH, 1955

Über den Primäridealquotienten im Unendlichen Algebraischen Zahlkörper

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 30. September 1954)

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir sämtliche zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ [1] gehörige Primärideale in vier Arten einteilen.[2] Vor kurzem habe ich über die Eigenschaften von Primäridealen von jeder Art, und über den Zusammenhang zwischen Primäridealen von verschiedenen Arten [3] und ferner über Produkt von Primäridealen von irgend zwei Arten [4] Untersuchungen gemacht. Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen dass, wenn $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ ist, wir es mit der Struktur von Primäridealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ und mit der Existenz von $\mathfrak{q}''$ von der Art, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, zu tun haben.

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen unendlichen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{K}_\nu \subset \mathfrak{K}_{\nu+1} \subset \cdots$ definiert wird. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so ist $\mathfrak{O}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{O}_1 \subseteqq \mathfrak{O}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{O}_\nu \subseteqq \mathfrak{O}_{\nu+1} \subseteqq \cdots$.

In § 1 wollen wir den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ und eben erwähntem $\mathfrak{q}''$ untersuchen. In § 2 lässt sich zeigen, dass jeder Primäridealquotient $\mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$ irgendeine von folgenden zwei Folgen besitzt:

$$\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} : \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \cdots\cdots,$$

$$\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1} : \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \cdots\cdots,$$

wobei $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ sind. In § 3 stelln wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass zu einem gegebenen Primärideal $\mathfrak{q}$ und einem Primäridealteiler $\mathfrak{q}'$ von $\mathfrak{q}$ ein drittes $\mathfrak{q}''$, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ genügt, existiert. Weiter

---

1) Im folgenden verstehen wir unter Primideal stets ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Primideal.

2), 3) N. Nakano; „Über die Einteilung von Primäridealen im unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 3, 1954, zitiert mit „Nakano (1)".

4) N. Nakano; „Über Produkt von Primäridealen im unendlichen algebraischen Zahlkörper", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 18, No. 2, 1954, zitiert mit „Nakano (2)".

möchte ich den Zusammenhang zwischen den gegebenen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ und dem gewünschten $\mathfrak{q}''$ erklären.

§ 1. Vorbereitende Untersuchungen

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}$ in folgende vier Arten einteilen:[5)]

(i) *Die erste Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(ii) *Die zweite Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ *unt* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(iii) *Die dritte Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist,*

(iv) *Die vierte Art heisst* $\mathfrak{q}$, *wenn* $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *ist.*

Der erste Fall ergibt sich dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, und dabei $\mathfrak{q}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist. Die anderen Fälle können sich ergeben, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ ist, und dabei $\mathfrak{q}$ keine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist.

Satz 1. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, *so gilt* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')$.

Aus $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ergibt sich $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' \supseteqq \mathfrak{q}''$, folglich erhalten wir

$$\mathfrak{q}' (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}') \supseteqq \mathfrak{q}' \mathfrak{q}''. \tag{1}$$

Andererseits erhalten wir, wegen $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{q}'$. Daraus ergibt sich nach der Definition von Idealquotienten

$$\mathfrak{q}' (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}' (\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'':\mathfrak{q}') \subseteqq \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}$.

Danach besteht die Frage, ob wir $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ erhalten können, wenn $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')$ ist. Wir können beweisen, dass aus $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')$ nicht immer $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ folgt. Zum Beweise schicken wir folgende Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei beliebige zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale, so gilt entweder* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$ *oder* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$, *oder* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$.

Jetzt nehmen wir an, dass keine von $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$ und $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ entsteht. Dann existierten zwei Elemente α, β, derart, dass

$$\alpha \notin \mathfrak{q} \text{ und } \alpha \in \mathfrak{q}' ; \quad \beta \in \mathfrak{q} \text{ und } \beta \notin \mathfrak{q}' \tag{3}$$

sind. Wenn wir den Index N hinreichend gross wählen, so ist $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_\nu$ für ν $(\nu \geqq N)$. Bezeichnen wir $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, so sind

5) „Nakano (1)", s. 327.

$$\alpha \notin \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \text{ und } \alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}; \ \beta \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \text{ und } \beta \notin \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}. \tag{4}$$

Da aber $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ Primärideale im endlichen algebraischen Zahlkörper sind, muss entweder $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \supset \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ oder $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, oder $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subset \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ entstehen. Das ist nach (4) unmöglih.

Hilfssatz 2.[6)] *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und setzen wir* $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, $\nu \geqq N$.

(i) *Dann ist immer die Vereinigungsmenge* $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu + e'_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+e'_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda + e'_\lambda}, \cdots\}$ gleich $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$.

(ii) *Auch ist* $E_\nu = e_\nu + e'_\nu$ *oder* $E_\nu = e_\nu + e'_\nu - 1$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.

(iii) *Wenn* $\mathfrak{q}$ *von zweiter Art ist und* $\mathfrak{q}'$ *von zweiter, dritter oder vierter Art ist, so gilt* $E_\nu = e_\nu + e'_\nu$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.

(iv) *Wenn* $\mathfrak{q}$ *von dritter Art ist und* $\mathfrak{q}'$ *von dritter oder vierter ist, so gilt* $E_\nu = e_\nu + e'_\nu - 1$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.

Satz 2. *Sind* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ *und* $\mathfrak{q}''$ *drei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathfrak{q}''$, *so ist dann und nur dann* $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}''$, *wenn* $\mathfrak{q}'$ *von dritter,* $\mathfrak{q}''$ *von zweiter Art und* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}''\mathfrak{p}$ *ist, oder wenn* $\mathfrak{q}'$ *von zweiter,* $\mathfrak{q}''$ *von dritter Art und* $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'\mathfrak{p}$ *ist.*

Ist $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}''$, so wird nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}''$ oder $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}''$. Zuerst nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}''$ ist. Aus $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{q}''$ ergibt sich die Existenz eines Elements α, derart, dass $\alpha \in \mathfrak{q}'$, $\alpha \notin \mathfrak{q}''$ ist. Dabei ist $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\nu \geqq N)$. Setzen wir $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ und $\mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, so ist $\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \supset \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$, weil $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\alpha \notin \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}$ ist. Also ist

$$e'_\nu < e''_\nu \text{ für alle } \nu \ (\nu \geqq N). \tag{5}$$

Andererseits setzen wir ferner $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so sind nach Hilfssatz 2 ii)

$$E_\nu = e_\nu + e'_\nu \text{ oder } E_\nu = e_\nu + e'_\nu - 1 \text{ für alle } \nu \quad (\nu \geqq N), \tag{6}$$

$$E_\nu = e_\nu + e''_\nu \text{ oder } E_\nu = e_\nu + e''_\nu - 1 \text{ für alle } \nu \quad (\nu \geqq N). \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt ohne weiteres

$$e''_\nu = e'_\nu + 1 \text{ für alle } \nu \quad (\nu \geqq N). \tag{8}$$

---

(6) (i) „Nakano (1)", Hilfssatz 5, s. 331,
(ii) „Nakano (2)", Hilfssatz 6, s. 131,
(iii) „Nakano (2)", Satz 1, s. 131,
(iv) „Nakano (2)", Satz 2, s. 132.

Daraus ergibt sich nach Hilfssatz 2 (i)

$$\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+1}, \cdots\}^{7),8)} \tag{9}$$
$$= \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e''_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e''_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e''_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}''.$$

Dabei muss $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art und $\mathfrak{q}''$ von dritter Art sein. Denn, sei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$, so ist jedes von $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}', \mathfrak{q}''$ von erster Art und eine Potenz von $\mathfrak{p}$. Danach folgt aus $\mathfrak{q}\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}\mathfrak{q}''$ immer $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}''$, entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}''$. Danach ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$. Dann wäre $\mathfrak{q}'$ von dritter oder vierter Art, und so würde $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ sein. Wegen $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \mathfrak{q}''$, erhälten wir $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}''$, entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{q}''$. Also muss $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art und folglich $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \mathfrak{q}''$ von dritter Art[9] sein.

Zweitens sei $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}''$, so können wir ebenso beweisen, dass $\mathfrak{q}''\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ ist, und folglich ist $\mathfrak{q}'$ von dritter, $\mathfrak{q}''$ von zweiter Art sein.

Die Umgekehrung ist ersichtlich.

Satz 3. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, *so ist entweder* $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ *oder* $\mathfrak{q}'' = (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\mathfrak{p}$; *oder* $\mathfrak{q}'' = (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$.

Nach Sätzen 1 und 2 ist klar, dass diese ausser $\mathfrak{q}'' = (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$ gelten können.

Es sei $\mathfrak{q}'' \supset \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$, so ist in gleicher Weise der Beweis von Satz 2 $\mathfrak{q}''\mathfrak{p} = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ erbracht. Dabei ist $\mathfrak{q}''$ von zweiter Art, also wird[10] $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}''\mathfrak{p}:\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$.

§ 2. Der Primäridealquotient

Es sei $\mathfrak{q}$ irgend ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und es sei $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\nu \geqq N$ für hinreichend grosses N. Ist $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu)$ genau durch $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}} (\mathfrak{p}_{\nu+1} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_{\nu+1})$ und ist $\mathfrak{p}_\nu$ im allgemeinen genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ teilbar, so haben wir den vorig bewiesenen folgenden

Hilfssatz 3.[11] *Wir erhalten immer*

(i) $(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$,

(ii) $(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1$ *für alle* $\lambda (\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

$(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda - 1$ *für mindestens ein* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

---

7) Das Zeichen $\{\ \}$ benutze ich im folgenden zur Bezeichung der Vereinigungsmenge.

8) N.Nakano; „Über idempotente Ideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern", Jour. of Sci. of the Hiroshima Univ. Vol. 17, No. 1, 1953, zitiert mit „Nakano (3)", s. 19, Satz 8.

9) „Nakano (1)", s. 337, Satz 20. (i) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von zweiter Art, so ist* $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ *von dritter Art.*

10) „Nakano (1)", s. 337, Satz 21. (i) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von zweiter Art, so gelten* $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\mathfrak{p}:\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \neq (\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\mathfrak{p}$.

11) „Nakano (1)", (i) s. 323, Hilfssatz 1, ii) s. 323, Satz 1 und s. 324, Satz 2, iii), s. 324, Satz 3 und s. 325, Satz 4.

(iii) $e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda > e_\lambda$ *für mindestens ein* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Andererseits ist $\mathfrak{q}'$ ein anderes zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und ist $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ und etzen wir auch $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'}$, $\nu \geqq N$, so definieren wir $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ folgendermassen:

$$\bar{\mathfrak{q}} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}'}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} : \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda'}, \cdots\}$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{q}}} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1} : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}'}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1} : \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda'}, \cdots\}.$$

Dann ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ nicht immer gleich $\bar{\mathfrak{q}}$. Im folgenden wollen wir den Zusammen-ıang zwischen dem Primäridealquotient $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ oder $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ untersuchen.

Satz 4. *Es seien* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und es sei* $\subset \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'}$. $\nu \geqq N$. *Ist*

$$(e_\nu - e_\nu') h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - e_\lambda' \quad \textit{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

ɔ *ist* $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \bar{\mathfrak{q}}$, $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e_\nu'}$ *für alle* $\nu \ (\nu \geqq N)$.

Nach Voraussetzung ist $(e_\nu - e_\nu') h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - e_\lambda'$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$, nd so erhalten wir vor allem

$$\cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e_\nu'} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - e_{\nu+1}'} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e_\lambda'} \subseteqq \cdots\cdots. \tag{10}$$

ɜtzt wollen wir beweisen $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \bar{\mathfrak{q}}$. Zum Beweise sei α ein beliebiges Element aus $:\mathfrak{q}'$, dann ist $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$, falls $\nu \geqq N$ für ein hinreichend grosses N. Aus $\alpha\mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{q}$ folgt $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$,[13] d. h. $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu'} \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}$.

Also erhalten wir $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}$.

Umgekehrt ist β ein Element aus $\bar{\mathfrak{q}}$, so ist $\beta \in \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu} : \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu'} = \mathfrak{p}_\mu^{e_\mu - e_\mu'}$ für hinreichend rosses μ $(\mu \geqq N)$. Da aber aus (10) $\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} : \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda'}$ d. h. $\beta\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda'} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ für alle λ $(\lambda > \geqq N)$ folgt, so ist $\beta\mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{q}$. Danach ist $\bar{\mathfrak{q}} \subseteqq \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$. Also muss $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ sein.

Setzen wir nun $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so ist wie leicht einzusehen

---

12) Siehe Fussnote 6), s. 259.

13) *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal und ist* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$, *so ist* $(\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu = \alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Ist β ein Element aus $(\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu$, so ist β von der Form $\beta = \alpha\gamma$, wobei $\gamma \in \mathfrak{q}$ ist. Aus $\alpha, \beta \in \mathfrak{O}_\nu$ ılgt $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha} \in \mathfrak{K}_\nu$. Da aber $\gamma \in \mathfrak{O}$ ist, erhalten wir $\gamma \in \mathfrak{O}_\nu$, folglich $\gamma \in \mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{\epsilon_\nu}$. Also ist $\beta \in \alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, ılglich $(\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu \subseteqq \alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$.

Umgekehrt ist δ ein Element aus $\alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, so ist $\delta \in \alpha\mathfrak{q}$. Da aber $\delta \in \mathfrak{O}_\nu$ ist, erhalten wir $\delta \in (\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu$, ılglich $\alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq (\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu$. Also muss $(\alpha\mathfrak{q}) \cap \mathfrak{O}_\nu = \alpha\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ sein.

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}:\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu} \quad \text{d. h.} \quad e_\nu - e'_\nu \geqq E_\nu, \tag{11}$$

weil $\bar{\mathfrak{q}}$ die Vereinigungsmenge ist. Es sei α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ teilbares Element so ist $\alpha = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}\mathfrak{c}_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ und $\alpha \in \bar{\mathfrak{q}}$, folglich $\alpha = \mathfrak{p}_\lambda^{Eh_{\nu\nu+1}h_{\nu+2}\dots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$ und ferner $\alpha \in \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}:\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda}$ für hinreichend grosses λ $(\lambda > \nu \geqq N)$. Also erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\lambda^{E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2}\dots h_\lambda} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda}, \quad \text{d. h.} \quad E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - e'_\lambda. \tag{12}$$

Andererseits sind nach Hilfssatz 3 (i)

$$e_\lambda > (e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+1} \cdots h_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

$$e'_\lambda \leqq e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Also wird
$$e_\lambda - e'_\lambda > (e_\nu - e'_\nu - 1)\, h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda. \tag{13}$$

Aus (11), (12) und (13) folgt $e_\nu - e'_\nu \geqq E_\nu > e_\nu - e'_\nu - 1$, d. h. $E_\nu = e_\nu - e'_\nu$ für alle ν $(\nu \geqq N)$, was zum bewiesen war.

Zusatz. *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal von dritter Art, so ist* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}$ *gleich der Vereinigungsmenge* $\{\cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - 1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - 1}, \cdots\cdots\} = \bar{\mathfrak{q}}$, *wobei* $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *und* $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - 1}$, $\nu \geqq N$ *sind.*

Ist $\mathfrak{q}$ von dritter Art, so wird $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, folglich ist nach Hilfssatz 3 (ii)

$$(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1 \quad \textit{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Dann setzen wir in Satz 4 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, so ist unsere Behauptung einleuchtend.

Satz 5. *Es seien* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und es sei* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\nu \geqq N$, *wennn wir für hinreichend grosses* N *einen Index* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ *so wählen können, dass* $(e_\nu - e'_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda - e'_\lambda$ *ist, so ist* $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{q}}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu + 1}$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.[14]

Zuerst erhalten wir nach Hilfssatz 3 (i)

$$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

$$(e'_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda - 1 \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

---

14) *Anmerkung:* Ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal und ist $(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda - 1$ für mindestens ein λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ und setzen wir in Satz 5 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{q}:\mathfrak{p} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{(e_\nu - 1)+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{(e_{\nu+1} - 1)+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{(e_\lambda - 1)+1}, \cdots\} = \mathfrak{q}$$

Andererseits ist $(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ und setzen wir in Satz 4 $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$, so wird in gleicher Weise $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$. Dies besagt Hilfssatz 2 (ii). Also sind die Sätze 4 und 5 die Erweiterung von Hilfssatz 2 (ii).

Also ist $(e_\nu - e'_\nu + 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - e'_\lambda + 1$ für alle λ $(\lambda > \nu \geqq N)$. Danach ist

$$\cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu + 1} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - e'_{\nu+1} + 1} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda + 1} \subseteqq \cdots$$

$$\text{d. h.} \quad \cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu + 1} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda + 1} : \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \cdots \tag{14}$$

Jetzt sei α ein Element von $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, so ist $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\nu \geqq N$ für hinreichend grosses N. Aus $\alpha\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}$, $\alpha\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1}, \cdots, \alpha\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}, \cdots\cdots$ und $(\alpha\mathfrak{q}') \frown \mathfrak{O}_\nu = \alpha\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$, so folgt

$$\alpha\mathfrak{q}' \subseteqq \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1}, \cdots\} \subseteqq \mathfrak{q}.$$

Folglich ist $\alpha \in \mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$, also erhalten wir $\bar{\bar{\mathfrak{q}}} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$.

Jetzt setzen wir $(\mathfrak{q} : \mathfrak{q}') \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, $\nu \geqq N$, so wird wegen $\bar{\bar{\mathfrak{q}}} \subseteqq \mathfrak{q} : \mathfrak{q}'$

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu + 1} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}, \quad \text{d. h.} \quad e_\nu - e'_\nu + 1 \geqq E_\nu. \tag{15}$$

Nach Voraussetzung können wir für diesen Index ν einen Index λ $(\lambda > \nu \geqq N)$ so wählen, dass

$$(e_\nu - e'_\nu)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda - e'_\lambda \tag{16}$$

ist. Andererseits aus Hilfssatz 3 (i) folgt

$$E_\lambda \leqq E_\nu\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda. \tag{17}$$

Ferner sei β ein genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda} (= (\mathfrak{q} : \mathfrak{q}') \frown \mathfrak{O}_\lambda)$ teilbares Element, so ist $\beta\mathfrak{q}' \subseteqq \mathfrak{q}$, $\beta \in \mathfrak{O}_\lambda$. Also ist $\beta\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ [15], d. h. $\beta \in \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda}$. Danach erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda} \supseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda} \quad \text{d. h.} \quad e_\lambda - e'_\lambda \leqq E_\lambda. \tag{18}$$

Aus (17) und (18) ergibt sich

$$e_\lambda - e'_\lambda \leqq E_\nu\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda. \tag{19}$$

Daraus folgt nach (16) $(e_\nu - e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda - e'_\lambda \leqq E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda$, d. h. $e_\nu - e'_\nu < E_\nu$. Wegen (15) muss $E_\nu = e_\nu - e'_\nu + 1$ sein. Danach ist

$$(\mathfrak{q} : \mathfrak{q}') \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu + 1} = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu + 1} : \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu} \text{ für alle } \nu \ (\nu \geqq N).$$

Der Beweis unseres Satzes ist hiermit abgeschlossen.

Aus den Sätzen 4 und 5 ergibt sich ohne weiteres folgender

Satz 6. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$

15) Siehe Fussnote 13) in s. 261.

und setzen wir $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}'\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, $\nu\geqq N$, *so ist*

(i) $E_\nu=e_\nu-e'_\nu$ *oder* $E_\nu=e_\nu-e'_\nu+1$.

(ii) $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\bar{\mathfrak{q}}$ *oder* $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$.

Ferner erhalten wir nach den Sätzen 3 und 6 den folgenden Satz.

Satz 7. *Sind* $\mathfrak{q}$ *und* $\mathfrak{q}'$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *so ist* $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ *oder* $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$.

Wenn $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, gilt nach Satz 3 entweder $\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ oder $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\mathfrak{p}$, oder $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$. Im erste Falle $\mathfrak{q}''=\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ ist unsere Behauptung nach Satz 6 selbstverständlich. Im zweiten Falle $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\mathfrak{p}$, ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ Primärideal von zweiter Art. Andererseits erhalten wir nach Satz 1 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')$. Danach setzen wir $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}'\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ und $(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird nach Hilfssatz 2 iii) $e_\nu=e'_\nu+E_\nu$ für alle ν $(\nu\geqq N)$. Dann ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\bar{\mathfrak{q}}$, weil $E_\nu=e_\nu-e'_\nu$ für alle ν ist. Also ist $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, damit ist unsere Behauptung einleuchtend.

Im dritte Falle $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}$, ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'$ Primärideal von dritter Art. Setzen wir auch $(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}')\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird nach Zusatz von Satz 4

$$\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu-1},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{E_{\nu+1}-1},\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda-1},\cdots\}$$

und ist ferner $\mathfrak{q}''\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu-1}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$. Andererseits ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, so erhalten wir nach Hilfssatz 2 ii)

$$e_\nu=e'_\nu+(E_\nu-1)\ \text{ oder }\ e_\nu=\{e'_\nu+(E_\nu-1)\}-1$$

$$\text{d. h. }\ E_\nu=e_\nu-e'_\nu+1\ \text{ oder }\ E_\nu=e_\nu-e'_\nu+2,$$

wobei $\mathfrak{q}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{q}'\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ ist. Da aber $E_\nu=e_\nu-e'_\nu+2$ nach Satz 6 (i) keinesweg vorkommt, so muss $E_\nu=e_\nu-e'_\nu+1$ für alle ν $(\nu\geqq N)$ sein. Daraus folgt

$$\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu+1},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-e'_{\nu+1}+1},\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-e'_\lambda+1},\cdots\}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}},$$

also ist $\mathfrak{q}''=(\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{q}}$. Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

§ 3. Multiplikativeigenschaft von Primäridealen

Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und ist $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}'$, dann existiert nicht immer ein drittes Primärideal $\mathfrak{q}''$, derart, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Da erhebt sich die Frage: Welche Bedingungen sind notwendig und hinreichend, dafür, dass $\mathfrak{q}''$ existiert? In diesem Paragraph möchte ich in dieses Problem eindringen und den Zusammenhang zwischen den gegebenen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ und dem gewünschten $\mathfrak{q}''$ klar machen.[16]

I) Fall. $\mathfrak{q}$ **ist von zweiter Art.**

In diesem Fall erhalten wir folgenden

Satz 8. *Ist* $\mathfrak{q}$ *von zweiter Art und ist* $\mathfrak{q}'$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{q}$, *so existiert dann und nur dann ein drittes* $\mathfrak{q}''$, *so dass* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ *ist, wenn* $\mathfrak{q}'$ *von zweiter Art ist.*

Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{q}$ von zweiter Art, deshalb wird $\mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, folglich ist nach Hilfssatz 3 (iii)

$$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda\,(\lambda > \nu \geqq N). \tag{20}$$

Es sei zuerst $\mathfrak{q}'$ auch von zweiter Art, dann ist

$$e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda\,(\lambda > \nu \geqq N). \tag{21}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$(e_\nu - e'_\nu)\, h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - e'_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda\,(\lambda > \nu \geqq N). \tag{22}$$

Also setzen wir $\bar{\mathfrak{q}}=\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-e'_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-e'_\lambda} \cdots\}$, so ist nach Satz 4 $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$. Dann besteht nach Hilfssatz 2 (i) zurecht, dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}'\,\bar{\mathfrak{q}} &= \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+(e_\nu-e'_\nu)}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}+(e_{\nu+1}-e'_{\nu+1})}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+(e_\lambda-e'_\lambda)}, \cdots\} \\ &= \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\} = \mathfrak{q}\end{aligned}$$

ist. Also gibt es ein drittes $\mathfrak{q}''$, so dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, und ist $\mathfrak{q}''$ wirklich gleich eben erwähntem $\bar{\mathfrak{q}}$.

Umgekehrt gibt es ein drittes $\mathfrak{q}''$ von der Art, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, dann ist $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art. Denn, wäre $\mathfrak{q}'$ von dritter oder vierter Art, so wäre

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}'\mathfrak{p})\,\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}.$$

Daraus ergibt sich der Widerspruch, dass eben $\mathfrak{q}$ nicht von zweiter Art ist. Also muss $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art sein.

Zusatz. *Ist* $\mathfrak{q}$ *von zweiter Art und ist* $\mathfrak{q}'$ *ein echter Teiler von* $\mathfrak{q}$ *und existiert* $\mathfrak{q}''$ *mit der Eigenschaft* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, *so ist*

$$\mathfrak{q}'' = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-e'_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-e'_\lambda}, \cdots\}$$

und $\mathfrak{q}''$ *ist von zweiter Art.*

Nach Beweis von Satz 8 ist klar dass

16) Diese Untersuchung ist nur eine Anwendung von den vorhergehenden Paragraphen.

$$\mathfrak{q}'' = \bar{\mathfrak{q}} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - e'_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda}, \cdots\}$$

ist. Ferner ist $\mathfrak{q}''$ von zweiter Art. Denn setzen wir $e_\nu - e'_\nu = E_\nu$, so ist $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ und aus (22) folgt $E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = E_\lambda$ für alle $\lambda (\lambda > \nu \geqq N)$. Dann ergibt sich aus Hilfssatz 3 (iii) $\bar{\mathfrak{q}} \neq \bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}$. Danach ist $\bar{\mathfrak{q}}$ von zweiter Art.

II) Fall. $\mathfrak{q}$ ist von dritter Art.

Im folgenden definieren wir $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ wie im vorigen Paragraphen folgendermassen:

$$\bar{\mathfrak{q}} = \{\cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - e'_{\nu+1}}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda}, \cdots\cdots\},$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{q}}} = \{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - e'_\nu + 1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - e'_{\nu+1} + 1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - e'_\lambda + 1}, \cdots\},$$

wobei $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\nu \geqq N$ sind. Dann erhalten wir in diesem Fall folgenden

Satz 9. *Ist $\mathfrak{q}$ von dritter Art und ist $\mathfrak{q}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$, so existiert immer ein drittes $\mathfrak{q}''$, so dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Ferner:*

(i) *Wenn $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art ist, so ist $\mathfrak{q}'' = \bar{\mathfrak{q}}$ und ist $\bar{\mathfrak{q}}$ von dritter Art.*

(ii) *Wenn $\mathfrak{q}'$ von dritter Art ist, so ist $\mathfrak{q}'' = \bar{\mathfrak{q}}$ oder $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ bzw. $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von zweiter bzw. dritter Art.*

(iii) *Wenn $\mathfrak{q}'$ von vierter Art ist, so ist $\mathfrak{q}'' = \bar{\mathfrak{q}}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art.*

Ist $\mathfrak{q}$ von dritter Art, so wird $\mathfrak{q} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, folglich ist nach Hilfssatz 3 (ii)

$$(e_\nu - 1)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1 \quad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{23}$$

Andererseits gilt immer nach Hilfssatz 3 (i)

$$(e'_\nu - 1)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \leqq e'_\lambda - 1 \quad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt

$$(e_\nu - e'_\nu)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - e'_\lambda \quad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Setzen wir $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so erhalten wir nach Satz 4

$$E_\nu = e_\nu - e'_\nu \quad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N). \tag{25}$$

Dann ist im gleicher Weise wie im Beweis von Satz 8 dargetan, dass $\mathfrak{q}'\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$ ist.

(i) Fall. $\mathfrak{q}'$ ist von zweiter Art.

Ist $\mathfrak{q}$ von dritter Art, so wird

$$(e_\nu - 1)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1 \quad \text{für alle } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Ist $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art, so wird auch

$$e'_\nu\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Danach ist $(e_\nu - e'_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - e'_\lambda - 1$ d. h. $(E_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = E_\lambda - 1$ für alle $\lambda\ (\lambda > \nu \geqq N)$. Folglich wird $\bar{\mathfrak{q}}:\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{q}}$, also muss $\bar{\mathfrak{q}}$ von dritter Art sein.

(ii) Fall. $\mathfrak{q}'$ ist von dritter Art.

Da $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ von dritter Art sind, erhalten wir

$$(e_\nu - 1)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e_\lambda - 1 \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N),$$

$$(e'_\nu - 1)\, h_{\nu+1}\, h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda - 1 \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Daraus folgt $(e_\nu - e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - e'_\lambda$ d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = E_\lambda$ für alle $\lambda (\lambda > \nu \geqq N)$. Folglich wird $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{q}}$, also muss $\bar{\mathfrak{q}}$ von zweiter Art sein. In diesem Fall ist $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ und ist $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von dritter Art, so erhalten wir $\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}} = \mathfrak{q}'(\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}) = (\mathfrak{q}'\mathfrak{p})\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}'\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$. Also existieren zwei $\mathfrak{q}''$, derart, dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist.

(iii) Fall. $\mathfrak{q}'$ ist von vierter Art.

Ist $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ von dritter bzw. vierter Art, so erhalten wir nach $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ $(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1$ für alle $\lambda\ (\lambda > \nu \geqq N)$, nach $\mathfrak{q}':\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ $(e'_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e'_\lambda - 1$ für mindestens ein $\lambda\ (\lambda > \nu \geqq N)$, daraus folgt $(e_\nu - e'_\nu)\, h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > e_\lambda - e'_\lambda$ d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > E_\lambda$ für mindestens ein $\lambda\ (\lambda > \nu \geqq N)$. Also ist $\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}$. Weiter ist nach $\mathfrak{q}:\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ $(e_\mu - 1)h_{\mu+1}h_{\mu+2}\cdots h_\tau = e_\tau - 1$ für alle $\tau\ (\tau > \mu \geqq N)$, nach $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} = \mathfrak{q}'$ $e'_\mu h_{\mu+1}h_{\mu+2}\cdots h_\tau > e'_\tau$ für mindestens ein $\tau\ (\tau > \mu \geqq N)$, daraus folgt $(e_\mu - e'_\mu - 1)h_{\mu+1}h_{\mu+2}\cdots h_\tau < e_\tau - e'_\tau - 1$ d. h. $(E_\mu - 1)h_{\mu+1}h_{\mu+2}\cdots h_\tau < E_\tau - 1$ für mindestens ein $\tau\ (\tau > \mu \geqq N)$. Also ist $\bar{\mathfrak{q}} = \bar{\mathfrak{q}}:\mathfrak{p}$. Danach muss $\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art sein.

III) Fall. $\mathfrak{q}$ ist von vierter Art.

Satz 10.1. *Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art und ist $\mathfrak{q}'$ ein echter Teiler von $\mathfrak{q}$, so existiert immer drittes $\mathfrak{q}''$, so dass $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Ferner;*

(i) *Ist $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art, so ist $\mathfrak{q}'' = \bar{\mathfrak{q}}$ und ist $\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art.*

(ii) *Ist $\mathfrak{q}'$ von dritter Art, so ist $\mathfrak{q}'' = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ uud ist $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von vierter Art.*

(i) Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art, so wird $\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, folglich

$$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda > e_\lambda \quad \text{für mindestens ein} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{26}$$

Weiter ist $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art, so wird $\mathfrak{q}'\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}'$, folglich

$$e'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda = e'_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{27}$$

Daraus folgt $(e_\nu - e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > e_\lambda - e'_\lambda$. Also setzen wir $\bar{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so gilt nach Satz 4 $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > E_\lambda$ für mindestens ein $\lambda\ (\lambda > \nu \geqq N)$. Danach erhalten wir $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{q}}$.

Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art, so wird auch $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, folglich

$$(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda-1 \text{ für mindestens ein } \lambda \ (\lambda>\nu\geqq N). \tag{28}$$

Aus (27) und (28) ergibt sich $(e_\nu-e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda-1$, d. h. $(E_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<E_\lambda-1$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Also wird $\bar{\mathfrak{q}}:\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{q}}$, so muss $\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art sein. Ferner nach Hilfssatz 2 (iii) ist einleuchtend, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\bar{\mathfrak{q}}$ ist.

(ii) Ist $\mathfrak{q}'$ von dritter, so wird $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}'$, folglich.

$$(e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e'_\lambda-1 \text{ für alle } \lambda \ (\lambda>\nu\geqq N). \tag{29}$$

Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art, so gilt auch (28). Daraus folgt

$$(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda \text{ für mindestens ein } \lambda \ (\lambda>\nu\geqq N). \tag{30}$$

Setzen wir $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\frown\mathfrak{D}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird nach Satz 5 $E_\nu=e_\nu-e'_\nu+1$. Dann ergibt sich aus (30) $(E_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<E_\lambda-1$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Also wird $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}:\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Andererseits gilt (26) auch, so folgt aus (26) und (29) $(e_\nu-e'_\nu+1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda-e'_\lambda+1$ d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>E_\lambda$ für mindestestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Folglich ist $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Also muss $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von vierter Art sein. Ferner nach Hilfssatz 2 (iv) ist klar, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ ist.

Satz 10.2. *Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale von vierter Art, so existiert immer ein drittes $\mathfrak{q}''$, so dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist. Ferner;*

(i) *Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda-e'_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so ist $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ und in diesem Falle:*

(A) *Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-e'_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so ist $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ von zweiter Art oder $\mathfrak{q}''=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von dritter Art.*

(B) *Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda-e'_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so ist $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art.*

(ii) *Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so ist $\mathfrak{q}''=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von vierter Art.*

(i) Setzen wir $\bar{\mathfrak{q}}\frown\mathfrak{D}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird nach Voraussetzung und Satz 4 $E_\nu=e_\nu-e'_\nu$ für alle ν $(\nu\geqq N)$, Daraus folgt in gleicher Weise wie im Beweis von Satz 8 $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\bar{\mathfrak{q}}$.

(A) Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda-e'_\lambda$ d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=E_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so erhalten wir $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}\neq\bar{\mathfrak{q}}$. Also ist $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ von zweiter Art. Dann wird $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von dritter Art und ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Also existieren zwei Primärideale $\mathfrak{q}''$, so dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist.

(B) Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda-e'_\lambda$ d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>E_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, so ist $\bar{\mathfrak{q}}\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{q}}$. Andererseits erhalten wir, wegen $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$,

$(e_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-1$ für misdestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ und nach Hilfssatz 3 (i) ist $e'_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e'_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$. Daraus ergibt sich $(e_\nu-e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda-1$ d. h. $(E_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<E_\lambda-1$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, folglich $\bar{\mathfrak{q}}:\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{q}}$. Danach ist $\mathfrak{q}''=\bar{\mathfrak{q}}$ von vierter Art.

(ii) Wenn $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ ist, dann ist nach Satz 5. $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-e'_\nu+1}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$. Damit ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu+(e_\nu-e'_\nu+1)},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e'_{\nu+1}+(e_{\nu+1}-e'_{\nu+1}+1)},\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e'_\lambda+(e_\lambda-e'_\lambda+1)},\cdots\}$ nach Hilfssatz 2 (i) gleich $\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$;

$$\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}=\{\cdots,\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1},\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}+1},\cdots,\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1},\cdots\}$$

Da aber diese Vereinigungsmenge $\mathfrak{q}\mathfrak{p}$ gleich ist, erhalten wir $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art, so wird $\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, daraus folgt $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$.

Dabei ist $\mathfrak{q}$ von vierter Art. Denn setzen wir $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so ist $E_\nu=e_\nu-e'_\nu+1$. Also folgt aus $(e_\nu-e'_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-e'_\lambda$

$$(E_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<E_\lambda-1 \text{ für mindestens ein } \lambda\ (\lambda>\nu\geqq N).$$

Damit wird $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}:\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Andererseits erhalten wir nach Hilfssatz 3 (i) $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda$ für alle λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ und aus $\mathfrak{q}':\mathfrak{p}=\mathfrak{q}'$ folgt

$$(e'_\nu-1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e'_\lambda-1 \text{ für mindestens ein } \lambda\ (\lambda>\nu\geqq N).$$

Daraus ergibt sich $(e_\nu-e'_\nu+1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>e_\lambda-e'_\lambda+1$, d. h. $E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda>E_\lambda$ für mindestens ein λ $(\lambda>\nu\geqq N)$, folglich $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Also muss $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von vierter Art sein.

Schliesslich fassen wir unsere Ergebnisse in diesen Paragraphen zusammen und stellen eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass zu $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ ein drittes $\mathfrak{q}''$ von der Art, dass $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$ ist, existiert. Zu diesem Zwecke nennen wir vor allem $\mathfrak{b}$ einen "*Faktor*" von $\mathfrak{a}$, wenn aus $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ die Produktdarstellung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{O}$ folgt. Dann erhalten wir folgenden wichtigen

Satz 11. *Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und ist $\mathfrak{q}\subset\mathfrak{q}'$, so gilt;*

(i) *Wenn $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ ist, so ist $\mathfrak{q}'$ immer ein Faktor von $\mathfrak{q}$.*

(ii) *Wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist und wenn $\mathfrak{q}$ von zweiter Art ist, so ist $\mathfrak{q}'$ dann und nur dann ein Faktor von $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{q}'$ von zweiter Art ist. Ist dagegen $\mathfrak{q}$ von dritter oder vierter Art, so ist $\mathfrak{q}'$ immer ein Faktor von $\mathfrak{q}$.*

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinen besten Dank aus.