JOURNAL SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 18, No. 3, JANUALY, 1956

Über die Multiplikativeigenschaft der Ideale in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Oktober, 1955)

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_\nu, \cdots$ definiert wird, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper $\mathfrak{K}_0$ ist und $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ enthalten ist. Wir bezeichnen diesen Körper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so ist offenbar $\mathfrak{O}=\{\mathfrak{O}_\nu\}$.

Dann ist die folgende Frage idealtheoretisch sehr interessant: Welche Bedingungen sind dafür notwendig und hinreichend, dass für zwei gegebene Ideale $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{O}$ ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, so dass es der Gleichung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ genügt? Die Untersuchung dieser Probleme ist das Ziel dieser Note. In seiner Arbeit [1] hat Herr W. Krull die bewertungstheoretische Behandlung der Idealtheorie in $\mathfrak{O}$ entwickelt und die Untersuchung dieser Probleme in der Methode von der Topologisierung des Bewertungsringraumes gemacht. Seine Untersuchung [2] beshäftigt sich mit dem Fall, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die genannten "*überall endlichen Ideale*" [3] sind.

Im folgenden ersten Paragraphen schicken wir als Vorbereitung einige Hilfssätze voraus, deren manche ich schon bewiesen habe. Im zweiten Paragraphen wollen wir die Untersuchung dieser Probleme für "*überall endliche Ideale*" in der idealtheoretischen Methode machen. Im dritten Paragraphen wird meine Untersuchung noch verallgemeinert. Zu diesen Zwecken schicken wir folgende Annahme über die zugrunde gelegten Ideale voraus: *Es sei $\mathfrak{q}$ die zu einem beliebigen Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente (kurz mit I.P.K.) von einem Ideal $\mathfrak{a}$ und sei N ein hinreichend grosser Index, so muss $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu$ die zu $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu$ für alle ν $(\nu\geqq N)$ sein und N für alle $\mathfrak{p}$ beschränkt sein.* Wenn $\mathfrak{K}$ ein Stiemkescher Körper [4] ist, dann

1) "Krull [2]". Über den im folgenden benutzten Arbeiten siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

2) "Krull [2]". Satz 25, s. 552.

3) Siehe dieser Note s. 443.

4) Es sei $\mathfrak{K}$ ein unendlicher algebraischer Zahlkörper, in dem jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt. Wir nennen einen solchen Körper $\mathfrak{K}$ "Stiemkeschen Körper".

ist diese Annahme unnötig; das ist bewiesen [5].

§ 1. Vorbereitende Untersuchungen

Früher habe ich Untersuchungen über die Eigenschaften von Primäridealen in $\mathfrak{O}$ gemacht und die folgenden Hilfssätze 1, 2 und 3 bewiesen.

Hilfssatz 1. (*Grundsatz von Primäridealen*) [6]

Es sei $\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{q}$ *ein Primideal bzw. ein zu* $\mathfrak{p}$ *gehöriges Primärideal in* $\mathfrak{O}$ *und setzen wir* $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\nu \geqq N$. *Ist* $\mathfrak{p}_\nu$ *genau durch* $\mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}$, $(\mathfrak{p}_{\nu+1} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_{\nu+1})$, *teilbar und ist* $\mathfrak{p}_\nu$ *im allgemeinen genau durch* $\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}$, $(\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda)$, *für alle* $\lambda (\lambda > \nu \geqq N)$ *teilbar, so erhalten wir*

(i) $(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda \leqq e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N)$.

(ii) $(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda - 1$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q} : \mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

$(e_\nu - 1)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda < e_\lambda - 1$ *für mindestens ein* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q} : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

(iii) $e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda = e_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

$e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda > e_\lambda$ *für mindestens ein* $\lambda (\lambda > \nu \geqq N) \rightleftarrows \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Hilfssatz 2. (*Satz über das Produkt der Primärideale*) [7]

Sind $\mathfrak{q}^{(a)}$ *und* $\mathfrak{q}^{(b)}$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und setzen wir* $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$ *und* $\mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, *so ist*

(i) $E_\nu = e_\nu + f_\nu$ *oder* $E_\nu = e_\nu + f_\nu - 1$ *für alle* ν $(\nu \geqq N)$.

(ii) *Ist* $\mathfrak{q}^{(a)}$ *von zweiter Art* [8], *aber* $\mathfrak{q}^{(b)}$ *von zweiter, dritter oder vierter Art, so gilt*

$$E_\nu = e_\nu + f_\nu \quad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N).$$

Hilfssatz 3. (*Satz über den Primäridealquotienten*) [9]

Sind $\mathfrak{q}^{(a)}$ *und* $\mathfrak{q}^{(b)}$ *zwei zu demselben* $\mathfrak{p}$ *gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}^{(a)} \subset \mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda$, $\lambda > \nu \geqq N$ *und definieren wir* $\bar{\mathfrak{q}}$ *und* $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ *folgendermassen:*

$$\bar{\mathfrak{q}} = \{\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - f_{\nu+1}},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda},\ \cdots\},$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{q}}} = \{\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu + 1},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - f_{\nu+1} + 1},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda + 1},\ \cdots\},$$

so ist dann und nur dann

---

5) "Nakano [8]", Hilfssatz 1, s. 274.

6) "Nakano [5]", (i) s. 323, Hilfssatz 1, (ii) s. 323, Satz 1 und s. 324, Satz 2, (iii) s. 324, Satz 3 und s. 325, Satz 4.

7) "Nakano [6]", s. 131, (i) Hilfssatz 6, (ii) Satz 1.

8) Über die Einteilung von Primäridealen siehe § 2 in dieser Note.

9) "Nakano [7]", § 2, s. 261, Satz 4 und s. 262 Satz 5.

$$\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}=\bar{\mathfrak{q}},\quad \bar{\mathfrak{q}}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-f_\nu}\quad \textit{für alle}\quad \nu(\nu\geqq N),$$

wenn $(e_\nu-f_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda-f_\lambda$ *für alle* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ *ist.*

Dagegen ist dann und nur dann

$$\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}},\quad \bar{\bar{\mathfrak{q}}}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-f_\nu+1}\quad \textit{für alle}\quad \nu(\nu\geqq N),$$

wenn $(e_\nu-f_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda<e_\lambda-f_\lambda$ *für mindestes ein* λ $(\lambda>\nu\geqq N)$ *ist.*

Jetzt werden wir diesen Hilfssätzen drei andere Hilfssätze hinzufügen, welche in dieser Note grundlegend sind.

Hilfssatz 4. (i) *Ist* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ *und setzen wir* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{b}_\nu$ *und ist*

$$\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_{\nu+1}:\mathfrak{b}_{\nu+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda\subseteqq\cdots,\ \lambda>\nu\geqq N,$$

so ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\ \mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu,\ \mathfrak{a}_{\nu+1}:\mathfrak{b}_{\nu+1},\ \cdots,\ \mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda,\ \cdots\}$ *gleich* $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ *und ferner ist* $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu$ *für alle* ν $(\nu\geqq N)$.

(ii) *Setzen wir* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{c}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{c}_\nu$ *und ist*

$$\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{b}_\nu:\mathfrak{c}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_{\nu+1}\mathfrak{b}_{\nu+1}:\mathfrak{c}_{\nu+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{b}_\lambda:\mathfrak{c}_\lambda\subseteqq\cdots,\ \lambda>\nu\geqq N,$$

so ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\ \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{b}_\nu:\mathfrak{c}_\nu,\ \mathfrak{a}_{\nu+1}\mathfrak{b}_{\nu+1}:\mathfrak{c}_{\nu+1},\ \cdots,\ \mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{b}_\lambda:\mathfrak{c}_\lambda,\ \cdots\}$ *durch* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$ *teilbar.*

(i) Habe ich vor kurzem bewiesen. [10]

(ii) Es sei α ein Element von $\{\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{b}_\nu:\mathfrak{c}_\nu\}$, so ist $\alpha\in\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{b}_\lambda:\mathfrak{c}_\lambda$ für hinreichend grosses λ $(\lambda\geqq\nu\geqq N)$. Daraus folgt $\alpha\mathfrak{c}_\lambda\subseteqq\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{b}_\lambda$. Da aber $\mathfrak{a}_\lambda\mathfrak{b}_\lambda:\mathfrak{c}_\lambda\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{b}_\mu:\mathfrak{c}_\mu\subseteqq\cdots$, $\mu>\lambda$ ist, erhalten wir $\alpha\mathfrak{c}_{\lambda+1}\subseteqq\mathfrak{a}_{\lambda+1}\mathfrak{b}_{\lambda+1}$, $\cdots$, $\alpha\mathfrak{c}_\mu\subseteqq\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{b}_\mu$, $\cdots$, folglich ist $\alpha\mathfrak{c}\subseteqq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Damit muss $\{\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{b}_\nu:\mathfrak{c}_\nu\}\subseteqq\mathfrak{a}\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$ sein.

Hilfssatz 5. *Ist* $\mathfrak{q}$ *eine zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{a}$ *und ist* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ *bzw.* $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ *eine zu* $\mathfrak{p}_\nu$ *bzw.* $\mathfrak{p}_\lambda$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$ *bzw.* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{a}_\lambda$, *so ist dann und nur dann*

$$\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\subsetneqq\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda},\ \lambda>\nu\geqq N,$$

wenn $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{O}_\nu$ *und* $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\lambda\neq\mathfrak{p}'\cap\mathfrak{O}_\lambda$ *für einen von* $\mathfrak{p}$ *verschiedenen Primidealteiler* $\mathfrak{p}'$ *von* $\mathfrak{a}$ *sind.*

Setzen wir $\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{p}_{\nu2}^{e_{\nu2}}\cdots\mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{e_{\nu m_\nu}}$ und $\mathfrak{a}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\mathfrak{p}_{\lambda2}^{e_{\lambda2}}\cdots\mathfrak{p}_{\lambda m_\lambda}^{e_{\lambda m_\lambda}}$ so ist

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{p}_{\nu2}^{e_{\nu2}}\cdots\mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{e_{\nu m_\nu}}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\mathfrak{p}_{\lambda2}^{e_{\lambda2}}\cdots\mathfrak{p}_{\lambda m_\lambda}^{e_{\lambda m_\lambda}}. \tag{1}$$

Dann ist klar, dass jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}_\lambda$ in (1) ein Teiler von einer

10) "Nakano [9]", s. 247, Hilfssatz 1.

geeigneten Primärkomponente von $\mathfrak{a}_\nu$ ist. Dagegen aus $\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq\!\!\!\!/\; \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ folgt

$$\mathfrak{p}_{\nu 2}^{e_{\nu 2}} \cdots \mathfrak{p}_{\nu m_\nu}^{e_{\nu m_\nu}} \subseteqq\!\!\!\!/\; \mathfrak{p}_{\lambda 2}^{e_{\lambda 2}} \cdots \mathfrak{p}_{\lambda m_\lambda}^{e_{\lambda m_\lambda}}. \tag{2}$$

Also muss mindestens eine von $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ verschiedene Primärkomponente von $\mathfrak{a}_\lambda$, etwa $\mathfrak{p}_{\lambda i}^{e_{\lambda i}} (2 \leqq i \leqq m_\lambda)$, ein Teiler von $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ sein.
Dann ist

$$\mathfrak{p}_{\lambda i} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\lambda \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu, \quad \mathfrak{p}_{\lambda i} \neq \mathfrak{p}_\lambda .$$

Setzen wir $\mathfrak{p}_{\lambda i} = \mathfrak{p}'_\lambda = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda$, so ist unsere Behauptung richtig.

Umgekehrt sei $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ die zu $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$ $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}')$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ und es sei $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda \neq \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}'_\lambda$, $\lambda > \nu \geqq N$, so ist $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subset \mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ und ist $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\nu \subset \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}$, weil $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ eine zu $\mathfrak{p}_\nu$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}_\nu$ ist. Dann erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \cap \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}, \quad (\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}'_\lambda) = \mathfrak{O}_\lambda \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda} .$$

Also muss $\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq\!\!\!\!/\; \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}$, folglich $\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq\!\!\!\!/\; \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ sein.

Hilfssatz 6. (i) *Es sei* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ *und es sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler vcn* $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{q}^{(a)}$ *bzw.* $\mathfrak{q}^{(b)}$ *bezeichne die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$, *dann ist* $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(b)}$ [11].

(ii) *Es seien* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *beliebige Ideale in* $\mathfrak{O}$ *und* $\mathfrak{p}$ *sei ein gemeinsamer Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *und bezeichnen wir die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *resp. mit* $\mathfrak{q}^{(ab)}$, $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, *so gilt* $\mathfrak{q}^{(ab)} = \mathfrak{q}^{(a)} \mathfrak{q}^{(b)}$ [12].

(iii) *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$, *aber kein Teiler von* $\mathfrak{b}$ *und bezeichnen wir die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörigen I.P.K. von* $\mathfrak{ab}$ *bzw.* $\mathfrak{a}$ *mit* $\mathfrak{q}^{(ab)}$ *bzw.* $\mathfrak{q}^{(a)}$, *so ist* $\mathfrak{q}^{(ab)} = \mathfrak{q}^{(a)}$.

§ 2. Die Multiplikativeigenschaft der speziellen Ideale

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper können wir die zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale $\mathfrak{q}$ in folgende vier Arten einteilen: [13]

(i) Die erste Art heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{qp} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ ist.

(ii) Die zweite Art heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{qp} \neq \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ ist.

(iii) Die dritte Art heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{qp} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ ist.

(iv) Die vierte Art heisst $\mathfrak{q}$, wenn $\mathfrak{qp} = \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{q} : \mathfrak{p}$ ist.

Ein Ideal, dessen jede isolierte Primärkomponente (kurz mit I.P.K.) von

11) "Nakano [9]", s. 242, Satz 3.
12) "Nakano [9]", s. 242, Satz 4. (i) (ii).
13) "Nakano [5]" s. 327. Der erste Fall (i) ergibt sich dann und nur dann, wenn $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ ist, und dabei $\mathfrak{q}$ eine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist. Die anderen Fälle (ii) (iii) und (iv) können sich ergeben, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2$ ist, und dabei $\mathfrak{q}$ keine Potenz von $\mathfrak{p}$ ist.

erster oder zweiter Art ist, heisst nach Herrn W. Krull [14)] *"überall endlich"*. In den folgenden Paragraphen wollen wir mit Hilfe von einer Annahme eine notwendige und hinreichende Bedingung [15)] dafür aufgestellten dass für zwei gegebene "überall endliche" Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, so dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gilt. Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Satz voraus.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein "überall endliches" Ideal in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ sei ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$. Wenn wir für hinreichend grosses N*

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu,\quad (\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{a}'_\nu)=\mathfrak{O}_\nu,\quad \mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu,\quad \nu\geqq N,$$

setzen und die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda},\ \cdots\}$ mit $\mathfrak{q}$ bezeichnen, so ist $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$.

Ich habe schon bewiesen dass, wenn $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{O}$ ist, die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu},\ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}},\ \cdots,\ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda},\ \cdots\}=\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ ist. [16)] Also wollen wir im folgenden beweisen, dass $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle $\nu(\nu\geqq N)$ ist.

Setzen wir $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird $\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}\supseteqq\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, d.h.

$$E_\nu\leqq e_\nu \quad \text{für alle } \nu\ (\nu\geqq N). \tag{1}$$

Wenn $E_\nu=e_\nu$ für alle $\nu(\nu\geqq N)$ ist, dann ist der Satz richtig. Jetzt nehmen wir an, dass $E_\nu<e_\nu$ ist. Es sei α ein genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ teilbares Element, so ist

$$\alpha\in\mathfrak{q},\quad \alpha=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}\mathfrak{b}_\nu,\quad (\mathfrak{p}_\nu,\ \mathfrak{b}_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$$

und folglich nach Struktur von $\mathfrak{q}$ können wir M so gross wählen, dass

$$\alpha\in\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}\quad \text{für alle } \lambda\ (\lambda\geqq M>\nu)$$

ist. Es sei $\alpha\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{b}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda,\ \mathfrak{b}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$, so ist $\mathfrak{p}_\lambda^{E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$. Daraus folgt

$$E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda\geqq e_\lambda. \tag{2}$$

Da aber $\mathfrak{a}$ nach Voraussetzung überall endlich ist, so muss $\mathfrak{q}$ von erster oder zweiter Art sein. Dann folgt aus $\mathfrak{q}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ nach Hilfssatz 1 (iii)

$$E_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=E_\lambda\quad \text{für alle } \lambda\ (\lambda>\nu\geqq N), \tag{3}$$

wobei $\mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda}=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\lambda$ ist. Aus (2) und (3) ergibt sich

14) "Krull [2]". Über die Idealtheoretische Bedeutung von der Krullschen bewertungstheoretischen Einteilung von Primäridealen siehe "Nakano [5]" s. 325–327.

15) Vgl. "Krull [2]", s. 552, Satz 25.

16) "Nakano [9]", s. 240, Satz 1.

$$E_\lambda \geqq e_\lambda \quad \text{für alle } \lambda \ (\lambda \geqq M > \nu). \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt ohne weiteres $E_\lambda = e_\lambda$ für alle λ $(\lambda \geqq M)$. Dabei wird $M = N$, $\lambda = \nu$ angenommen, was natürlich keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Damit ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

In diesem Satz kann N für alle Primideale $\mathfrak{p}$ nicht immer beschränkt sein. Im folgenden wollen wir also eine Annahme machen: *In Satz 1 muss N für alle Primidealteiler von* $\mathfrak{a}$ *beschränkt sein.*

Satz 2. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *überall endliche Ideale und genügt* $\mathfrak{c}$ *der Gleichung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, *so muss* $\mathfrak{c}$ *auch ein überall endliches Ideal sein* [17].

Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und es sei $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so ist nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$, wobei $\mathfrak{q}^{(a)}$ und $\mathfrak{q}^{(b)}$ erster oder zweiter Art sind. Wenn $\mathfrak{q}^{(a)}$ und $\mathfrak{q}^{(b)}$ von erster Art sind. dann ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}^2$ und muss $\mathfrak{q}^{(c)}$ von erster Art sein. Wenn diese von zweiter Art sind, dann kann $\mathfrak{q}^{(c)}$ keinesweg von dritter oder vierter Art sein, sondern $\mathfrak{q}^{(c)}$ muss von zweiter Art sein, weil nach den Multiplikationsregeln [18] *2te Art* $\times$ *2te Art* $=$ *2te Art*, *2te Art* $\times$ *3te Art* $=$ *3te Art* und *2te Art* $\times$ *4te Art* $=$ *4te Art* sind. Danach muss $\mathfrak{c}$ ein überall endliches Ideal sein.

Hilfssatz 7. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *überall endliche Ideale und genügt* $\mathfrak{c}$ *der Gleichung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *und bezeichnen wir* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{b}_\nu$, *dann gilt:*

(i) *Es gibt kein Primideal* $\mathfrak{p}$, *so dass*

$$\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu (= \mathfrak{p}_\nu), \quad \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda (= \mathfrak{p}_\lambda), \quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist.

(ii) *Es gibt keinesweg solche Primideale* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$, *dass*

$$\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu; \quad \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda, \quad \mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda;$$

$$\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda, \quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist.

(i) Denn nehmen wir an, dass ein solches Primideal $\mathfrak{p}$ existiert. Dann folgt aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu = (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \cap \mathfrak{O}_\nu \supseteqq \mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_\nu, \quad \text{folglich ist} \quad \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \supseteqq \mathfrak{c}_\nu.$$

In gleicher Weise erhalten wir $\mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \supseteqq \mathfrak{c}_\lambda$. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{p}_\lambda \supset \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$, folglich $\mathfrak{p}_\lambda \supset \mathfrak{c}_\lambda$. Daraus folgt

17) "Krull [2]", s. 541, Satz 13.

18) "Nakano [6]", s. 133, Satz 5; s. 134, Satz 6; s. 135, Satz 8.

$$\mathfrak{p}_\lambda \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu \supset \mathfrak{c}_\lambda \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{c}_\nu, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{p}_\nu \supset \mathfrak{c}_\nu . \tag{5}$$

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ergibt sich $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}_\nu \subseteqq \mathfrak{c}_\nu$. Danach erhalten wir $\mathfrak{p}_\nu \supset \mathfrak{a}_\nu$. Ist $\mathfrak{a}_\nu$ genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbar, so muss, wegen $\mathfrak{p}_\nu \not\supset \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu$ genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbar sein. Ist $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(c)}$, resp. die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so erhalten wir nach $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und Hilfssatz 6 $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$. Dann ist nach Satz 1 $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Setzen wir $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(c)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so ist nach Satz 1 $\mathfrak{b}_\nu$ genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$ teilbar, also erhalten wir $e_\nu = f_\nu$. Nach Voraussetzung sind $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$ von erster oder zweiter Art, deshalb gilt nach Hilfssatz 2 (ii) $e_\nu = f_\nu + E_\nu$. Da aber $e_\nu = f_\nu$ ist, so ist $E_\nu = 0$, d.h. $\mathfrak{c}_\nu \not\subset \mathfrak{p}_\nu$, im Widerspruch zu (5). Mit diesem Widerspruch aber ist unsere Behauptung als richtig bewiesen.

(ii) Jetzt nehmen wir an, dass solche Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ existieren. Ist $\mathfrak{q}'^{(a)}$, $\mathfrak{q}'^{(b)}$, $\mathfrak{q}'^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}'$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und setzten wir $\mathfrak{q}'^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$, $\mathfrak{q}'^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f'_\nu}$, $\mathfrak{q}'^{(c)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E'_\nu}$, so erhalten wir, wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{q}'^{(a)} = \mathfrak{q}'^{(b)}\mathfrak{q}'^{(c)}$ und folglich nach Hilfssatz 2 (ii)

$$e'_\nu = f'_\nu + E'_\nu \quad \text{d.h.} \quad E'_\nu = e'_\nu - f'_\nu \quad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N).$$

Andererseits ist $\mathfrak{c}$ nach Satz 2 ein überall endliches Ideal und $\mathfrak{p}_\nu^{E'_\nu}$ nach Satz 1 die zu $\mathfrak{p}_\nu$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{c}_\nu$. Also können wir festlegen, dass

$$\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E'_\nu}\mathfrak{c}'_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu - f'_\nu}\mathfrak{c}'_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu \tag{6}$$

ist. Aus $\mathfrak{b}_\lambda\mathfrak{c}_\lambda \subseteqq (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ und $\mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}_\lambda$ folgt $\mathfrak{c}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$, wobei $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ die zu $\mathfrak{p}_\lambda (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda)$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}_\lambda$ ist. Danach erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu - f'_\nu}\mathfrak{c}'_\nu = \mathfrak{c}_\nu \subset \mathfrak{c}_\lambda \subset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu - f'_\nu} \subset \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}.$$

Also ist

$$(e'_\nu - f'_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda . \tag{7}$$

Ist $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ die zu $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu)$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}_\nu$, so wird $e_\nu = e'_\nu$, weil $\mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu}$ auch nach Satz 1 die zu $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\nu)$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}_\nu$ ist. Ferner ist klar, dass $f'_\nu \geqq 1$ ist. Daraus folgt ohne weiteres

$$(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq (e'_\nu - f'_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda \geqq e_\lambda .$$

Das ist aber unmöglich, denn nach Hilfssatz 1 (i) erhalten wir $(e_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots h_\lambda < e_\lambda$. Mit diesem Widerspruch ist die Richtigkeit unseres Hilfssatzes dargetan.

Satz 3. *Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ überall endliche Ideale und ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so gibt es dann und nur* *dann ein* $\mathfrak{c}$ *von der Art, dass* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *ist, wenn*

$$\cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{b}_{\nu+1} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subseteqq \cdots\cdots$$

ist, wobei $\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu=\mathfrak{b}\frown\mathfrak{O}_\nu$, $\nu\geqq N$ *ist.*[19)]

Es sei α ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}$ und ist $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$, $\nu\geqq N$, so wird $\alpha\in\mathfrak{a}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{b}_\nu(\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu)$. Die Vereinigungsmenge $\{\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\}$ ist nach Voraussetzung und Hilfssatz 4 (i) gleich $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Damit gilt $\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, folglich

$$\alpha\in\mathfrak{b}_\nu(\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu)\subseteqq\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}),$$

also erhalten wir $\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$. Da aber offenbar $\mathfrak{a}\supseteqq\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ ist, so muss $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ sein, nämlich gibt es $\mathfrak{c}$, derart, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gilt, und setzen wir

$$\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu=\mathop{/\!/}_i \mathfrak{p}_{\nu i}^{e_{\nu i}-f_{\nu i}}\mathop{/\!/}_j \mathfrak{p}_{\nu j}^{e_{\nu j}},\quad \mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda=\mathop{/\!/}_k \mathfrak{p}_{\lambda k}^{e_{\lambda k}-f_{\lambda k}}\mathop{/\!/}_l \mathfrak{p}_{\lambda l}^{e_{\lambda l}},\quad \lambda>\nu\geqq N, \tag{8}$$

so existiert zuerst nach Hilfssatz 7 (i) kein Primideal $\mathfrak{p}$, so dass

$$\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\not\subset\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\nu(=\mathfrak{p}_\nu),\quad \mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda\subset\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\lambda(=\mathfrak{p}_\lambda),\quad \lambda>\nu\geqq N$$

ist. Ist $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(c)}$ resp. nun die zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, so ist nach $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und Hilfssatz 6 $\mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$. Setzen wir $\mathfrak{q}^{(a)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$ und $\mathfrak{q}^{(c)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so können wir nach Satz 1 aussagen, dass

$$\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu,\ (\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{a}'_\nu)=\mathfrak{O}_\nu,\ \mathfrak{b}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}\mathfrak{b}'_\nu,\ (\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{b}'_\nu)=\mathfrak{O}_\nu\quad \text{für alle } \nu\ (\nu\geqq N)$$

ist. Da aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die überall endlichen Ideale sind, so sind $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$ und $\mathfrak{q}^{(c)}$ von erster Art, wenn $\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}^2$ ist und sind diese von zweiter Art, wenn $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ ist. Also erhalten wir nach $\mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}^{(b)}$ und Hilfssatz 1 (iii)

$$e_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=e_\lambda\quad \text{für alle } \lambda\ (\lambda>\nu\geqq N),$$

$$f_\nu h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda=f_\lambda\quad \text{für alle } \lambda\ (\lambda>\nu\geqq N),$$

so wird

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-f_\nu}\subseteqq\mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-f_{\nu+1}}\subseteqq\cdots\cdots\subseteqq\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-f_\lambda}\subseteqq\cdots\cdots. \tag{9}$$

Danach ist zweitens jedes $\mathfrak{p}_{\lambda k}^{e_{\lambda k}-f_{\lambda k}}$ in (8) ein Teiler von geeignetem $\mathfrak{p}_{\nu i}^{e_{\nu i}-f_{\nu i}}$, und umgekehrt, wenn $\mathfrak{p}_{\nu i}=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{p}_{\lambda k}=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{O}_\lambda$ und $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{b}\supset\mathfrak{a}$ ist.

Drittens existieren nach Hilfssatz 7 (ii) keinesweg solchen Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$, so dass

19) "Krull [2]", s. 552, Satz 25.

$$\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}'\cap\mathfrak{O}_\nu;\quad \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\lambda,\quad \mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\lambda;$$

$$\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p}'\cap\mathfrak{O}_\lambda,\quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist. Wenn $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}\not\supset\mathfrak{b}$ ist, dann gibt es damit kein Primideal $\mathfrak{p}$ von der Art, dass $\mathfrak{p}_\nu(=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu)\supset\mathfrak{b}_\nu\supset\mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{p}_\lambda(=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\lambda)\not\supseteqq\mathfrak{b}_\lambda$, $\lambda>\nu\geqq N$, für hinreichend grosses N. Danach ist in diesem Falle jedes $\mathfrak{p}_{\lambda l}^{e_{\lambda l}}$ in (8) ein Teiler von geeignetem $\mathfrak{p}_{\nu j}^{e_{\nu j}}$, und umgekehrt, wobei $\mathfrak{p}_{\nu j}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{p}_{\lambda l}=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\lambda$ und $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}\not\supset\mathfrak{b}$ ist.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so ist die Richtigkeit unseres Satzes dargetan.

§ 3. Die Multiplikativeigenschaft der allgemeineren Ideale

In diesem Paragraphen wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür suchen, dass für zwei "allgemeinere" Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{O}$ ein drittes Ideal $\mathfrak{c}$ existiert, von der Art, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Zu diesem Zwecke wollen wir im folgenden einige vorbereitende Untersuchungen anstellen.

Satz 4. *Sind $\mathfrak{q}^{(a)}$ und $\mathfrak{q}^{(b)}$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und ist* $\mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$, *so ist* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}$ [20].

Aus $\mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ folgt $\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}\supseteqq\mathfrak{q}$, dann ist

$$\mathfrak{q}^{(a)}\supseteqq\mathfrak{q}^{(b)}(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\supseteqq\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^{(a)},\quad \text{d.h.}\quad \mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}).$$

Aus $\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^{(b)}(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})$ ergibt sich entweder $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}$ oder $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}):\mathfrak{p}$ [21].

Erstens nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\mathfrak{p}(\neq\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})$ ist. Dann ist $\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)}$ ein Primärideal von zweiter Art und $(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\mathfrak{p}$ von dritter Art. Danach setzen wir $\mathfrak{q}^{(a)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$ und $(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird, wegen $\mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})$ und Hilfssatz 3 (ii)

$$e_\nu=f_\nu+E_\nu,\quad \text{d.h.}\quad E_\nu=e_\nu-f_\nu\quad \text{für alle } \nu\ (\nu\geqq N).$$

Daraus folgt $\mathfrak{q}^{a)}:\mathfrak{q}^{(b)}=\bar{\mathfrak{q}}$ [22] und ist $\bar{\mathfrak{q}}$ von zweiter Art, also erhalten wir

$$(e_\nu-f_\nu)h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots\cdots h_\lambda=e_\lambda-f_\lambda\quad \text{für alle } \nu\ (\nu\geqq N). \tag{10}$$

Andererseits ist $\mathfrak{q}=(\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{q}^{(b)})\mathfrak{p}=\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Also wird $\mathfrak{q}^{(a)}=\mathfrak{q}^{(b)}\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, wobei $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ von dritter Art ist. Wäre $\mathfrak{q}^{(a)}$ von zweiter Art, so würde $\mathfrak{q}^{(b)}$ von dritter oder vierter Art sein. Denn wäre $\mathfrak{q}^{(b)}$ von zweiter Art, so würde 2te Art $=$ 2te Art $\times$ 3te Art sein,

20) Vgl. "Nakano [7]", s. 264, Satz 7.
21) "Nakano [7]" s. 259, Satz 2 und s. 260, Satz 3.
22) Im folgenden definieren wir $\bar{\mathfrak{q}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ wie wir im Hilfssatz 3 in dieser Note sahen.

entgegen den Multiplikationsregeln.[23] Dann würde $\mathfrak{q}^{(b)}$ kein Faktor[24] von $\mathfrak{q}^{(a)}$, folglich $\mathfrak{q}^{(a)} \neq \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ sein.[25] Auf Grund dieses Widespruchs muss $\mathfrak{q}^{(a)}$ von dritter oder vierter Art sein. Dann gilt $\mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^{(a)}$ und Hilfssatz 2 (iii)

$$e_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda > e_\lambda \quad \text{für mindestens ein } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N). \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt $f_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < f_\lambda$. Das ist aber nach Hilfssatz 2 (i) unmöglich. Somit steht fest, dass es keinesweg sein kann dass $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)})\mathfrak{p}$ $(\neq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)})$ ist.

Zweitens nehmen wir an, dass $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) : \mathfrak{p} (\neq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)})$ ist. Dann ist $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$ von dritter Art und $(\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) : \mathfrak{p}$ von zweiter Art. Setzen wir auch $(\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird

$$\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) : \mathfrak{p} = \{ \cdots\cdots, \ \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu - 1}, \ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{E_{\nu+1}-1}, \ \cdots\cdots, \ \mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda - 1}, \ \cdots\cdots \}$$

und ist ferner $\mathfrak{q} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu - 1}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$[26].

Wir erhalten andererseits $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}$ ist von zweiter Art. Setzen wir $\mathfrak{q}^{(a)} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ und $\mathfrak{q}^{(b)} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, so ist nach Hilfssatz 3 (ii)

$$e_\nu = f_\nu + (E_\nu - 1) \quad \text{d.h.} \quad E_\nu = e_\nu - f_\nu + 1 \quad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N).$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \{ \cdots\cdots, \ \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu + 1}, \ \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1} - f_{\nu+1} + 1}, \ \cdots\cdots, \ \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda + 1}, \ \cdots\cdots \} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}.$$

Also erhalten wir nach Hilfssatz 3

$$(e_\nu - f_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < e_\lambda - f_\lambda, \quad \text{d.h.}$$

$$(E_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda < E_\lambda - 1 \quad \text{für mindestens ein } \lambda \ (\lambda > \nu \geqq N).$$

Dann muss $(\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) : \mathfrak{p} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$, nämlich $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$ von zweiter oder vierter Art sein, entgegen unserer Annahme. Daraus ersehen wir auch, dass keinesweg $\mathfrak{q} = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) : \mathfrak{p}$ sein kann. Nach dem obig gewonnenen Resultat muss $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$ sein.

Wir haben neulich den folgenden Satz in der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ vom al-

---

23) "Nakano [6]", s. 134, Satz 6.

24) Wenn aus $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ die Produktdarstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{O}$ folgt, nennen wir $\mathfrak{b}$ einen "*Faktor*" von $\mathfrak{a}$.

25) Vgl. "Nakano [7]", s. 269, Satz 11. Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und ist $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, so ist $\mathfrak{q}'$ dann und nur dann kein Faktor von $\mathfrak{c}$, wenn $\mathfrak{q}$ von zweiter Art und $\mathfrak{q}'$ von dritter oder vierter Art ist.

26) "Nakano [7]", s. 262. Zusatz von Satz 4.

lgemeinen unendlichen algebraischer Zahlkörper $\mathfrak{K}$ bewiesen: Es sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{p}$ sei ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und setzen wir

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{a}'_\nu, \ (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu, \ \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu, \ \nu \geqq N$$

für hinreichend grosses N und bezeichnen wir die Vereinigungsmenge $\{\cdots\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \cdots\cdots\}$ mit $\mathfrak{q}$, so ist $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$. Aber ist nicht immer $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$[27] und ist nicht immer N für alle $\mathfrak{p}$ beschränkt. Deshalb wollen wir im folgenden eine Annahme über die zugrund gelegte Ideal machen:

Es sei $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von einem Ideal $\mathfrak{a}$, so muss $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu$ die zu $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu$ für alle ν $(\nu \geqq N)$ sein und muss N für alle $\mathfrak{p}$ beschränkt sein.

Mit Hilfe dieser Annahme können wir folgende Hilfssätze beweisen.

Hilfssatz 8. *Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ und sei $\mathfrak{h}$ der Durchschnitt von sämtlichen Primideale $\mathfrak{p}$, derart, dass $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$[28] ist und ferner sei*

$$\cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{h}_{\nu+1} \mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{b}_{\nu+1} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subseteqq \cdots\cdots,$$

wobei $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{O}_\nu$ ist. Ist $\mathfrak{q}$ dann die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, so ist

(i) $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}$, *wenn* $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$ *ist,*

(ii) $\mathfrak{q} \supset \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, *wenn* $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$ *ist.*

Falls $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$ ist, und sei α ein beliebiges Element von $\mathfrak{q}$, so existiert ein Element t von der Art, dass

$$\alpha t \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \ \ t \notin \mathfrak{p}$$

ist, weil $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ ist. Sind α, $t \in \mathfrak{O}_\nu$, $\nu \geqq N$, so wird

$$\alpha t \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}, \ \text{folglich} \ \alpha t \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu \text{ [29]}$$

$$\text{d.h.} \quad \alpha t \in \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu . \tag{12}$$

Setzen wir $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, so können wir nach unserer Annahme festlegen

---

27) Im Stiemkeschen Körper gilt immer $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$ und N ist beschränkt. Siehe "Nakano [8]", s. 274, Hilfssatz 1. Wie wir im Satz 1, s. 443 in dieser Note sahen, gilt nur dieser, wenn $\mathfrak{a}$ ein überall endliches Ideal ist.

28) Über $\mathfrak{q}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, siehe Hilfssatz 3 in dieser Note.

29) Aus $\alpha \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a}$ und $\alpha \in \mathfrak{O}_\nu$ folgt $\alpha \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu$. —— Über diesen Beweis siehe Fussnote 20) in "Nakano [9]", s. 247.

$$\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu; \quad \mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}\mathfrak{b}'_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu. \tag{13}$$

Dann folgt aus (12) $\alpha t \in \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}$. Wegen $t \notin \mathfrak{p}_\nu$ erhalten wir $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}$, also wird $\alpha \in \bar{\mathfrak{q}} = \{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}\}$. Danach ist zunächst $\mathfrak{q} \subseteqq \bar{\mathfrak{q}}$.

Ist aber β umgekehrt ein Element von $\bar{\mathfrak{q}}$, so wird $\beta \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}$, $\nu \geqq N$, wegen $\bar{\mathfrak{q}} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}$. Daraus folgt $\beta\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$. Andererseits können wir wie in (13) setzen. Danach ist

$$\beta\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}\mathfrak{b}'_\nu\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}_\nu \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{b}'_\nu\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}_\nu$$

$$\text{d.h.} \quad \beta\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu\mathfrak{b}'_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu. \tag{14}$$

Da aber nach Voraussetzung $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$ ist, so wird $\mathfrak{p}_\nu \not\supset \mathfrak{h}_\nu$, $\nu \geqq N$ für hinreichend grosses N. Es gibt damit ein Element s von der Art, dass

$$s \in \mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}_\nu, \quad s \notin \mathfrak{p}_\nu.$$

Dann ist nach (14) $\beta s\mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu$. Daraus folgt $\beta s \in \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$. Wegen $\mathfrak{h}_\nu\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{h}_{\nu+1}\mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{b}_{\nu+1} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\lambda\mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subseteqq \cdots$, erhalten wir nach Hilfssatz 4 (ii) $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{h} : \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, nämlich, dass

$$\beta s \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \quad s \notin \mathfrak{p}$$

ist. Also muss $\beta \in \mathfrak{q}$, d.h. $\bar{\mathfrak{q}} \subseteqq \mathfrak{q}$ sein. Danach erhalten wir in diesem Fall $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}$.

Falls $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$ ist, ist nach Voraussetzung $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Es sei γ ein Element von $\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ und es sei $\gamma \in \mathfrak{O}_\nu$, so wird

$$\gamma \in \bar{\bar{\mathfrak{q}}} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu + 1} \quad \text{d.h.} \quad \gamma\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu + 1}, \tag{15}$$

wobei $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} = \mathfrak{q}^{(a)} \frown \mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu} = \mathfrak{q}^{(b)} \frown \mathfrak{O}_\nu$ sind. Dann können wir auch $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$; $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}\mathfrak{b}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$; $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{p}_\nu\mathfrak{h}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{h}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ setzen, so erhalten wir nach (15)

$$\gamma\mathfrak{b}_\nu\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}'_\nu = \gamma\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}\mathfrak{b}'_\nu\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}'_\nu \subseteqq \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu \cdot \mathfrak{p}_\nu\mathfrak{h}'_\nu \cdot \mathfrak{b}'_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu.$$

Da aber $\mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}'_\nu \not\subset \mathfrak{p}_\nu$ ist, gibt es damit ein Element u, derart, dass $u \in \mathfrak{a}'_\nu\mathfrak{h}'_\nu$, $u \notin \mathfrak{p}_\nu$ ist. Danach erhalten wir

$$\gamma u\mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu \quad \text{d.h.} \quad \gamma u \in \mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu : \mathfrak{b}_\nu.$$

Dann ergibt sich in gleicher Weise wie oben: $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{h}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{h} : \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, also ist

$$\gamma u \in \mathfrak{a} : \mathfrak{b}, \quad u \notin \mathfrak{p}.$$

Hiermit muss $\gamma \in \mathfrak{q}$, d.h. $\bar{\bar{\mathfrak{q}}} \subseteqq \mathfrak{q}$ sin.

Hilfssatz 9. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei Ideale in* $\mathfrak{O}$ *und genügt* $\mathfrak{c}$ *der Gleichung* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ *und ist* $\mathfrak{h}$ *der Durchschnitt von sämtlichen Primidealen* $\mathfrak{p}$, *derart, dass* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ *für die zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige I.P.K.* $\mathfrak{q}^{(a)}$ *bzw.* $\mathfrak{q}^{(b)}$ *von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{b}$ *sind und setzen wir* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{h}_\nu$. *Dann gilt:*

(i) *Wenn zwei Primideale* $\mathfrak{p}$ *und* $\mathfrak{p}'$ *existieren, von der Art, dass* $\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\nu$; $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda$; $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda$, $\mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda$, $\lambda > \nu \geqq N$ *sind, so ist die zu* $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\nu)$ *gehörige I.P.K. von* $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ *durch das Produkt der zu* $\mathfrak{p}_\lambda (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda)$ *und* $\mathfrak{p}'_\lambda (= \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda)$ *gehörigen I.P.K. von* $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ *teilbar.*

(ii) *Es gibt kein Primideal* $\mathfrak{p}$, *so dass*

$$\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu \quad \textit{und} \quad \mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda, \quad \lambda > \nu \geqq N$$

ist.

(i) Nehmen wir an, dass solche Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ existieren und es sei $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(c)}$ resp. die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, dann folgt aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ nach Hilfssatz 6 (ii) $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$ und daraus ergibt sich nach Satz 4 $\mathfrak{q}^{(c)} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$. Danach setzen wir $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(c)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, $\nu \geqq N$, so wird nach Hilfssatz 3

$$E_\nu = e_\nu - f_\nu \qquad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N), \tag{16}$$

$$\text{oder} \quad E_\nu = e_\nu - f_\nu + 1 \qquad \text{für alle } \nu \ (\nu \geqq N). \tag{17}$$

Andererseits sei $\mathfrak{p}'^{e'_\lambda}_\lambda$ die zu $\mathfrak{p}' \cap \mathfrak{O}_\lambda$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}_\lambda$, so ist

$$\mathfrak{b}_\lambda \mathfrak{c}_\lambda \subseteqq \mathfrak{b}\mathfrak{c} \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p}'^{e'_\lambda}_\lambda.$$

Da aber $\mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}'_\lambda$ ist, so ist $\mathfrak{c}_\lambda \subset \mathfrak{p}'^{e'_\lambda}_\lambda$. Nach unserer Annahme können wir $\mathfrak{c}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}\mathfrak{c}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}, \mathfrak{c}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ setzen. Danach erhalten wir

$$\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}\mathfrak{c}'_\nu = \mathfrak{c}_\nu \subseteqq \mathfrak{c}_\lambda \subset \mathfrak{p}'^{e'_\lambda}_\lambda. \tag{18}$$

Wegen $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{c}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ erhalten wir $(\mathfrak{p}'_\lambda, \mathfrak{c}'_\nu) = \mathfrak{O}_\lambda$. Dann folgt aus (18)

$$\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu} \subset \mathfrak{p}'^{e'_\lambda}_\lambda \quad \text{d.h.} \quad E_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e'_\lambda. \tag{19}$$

Wäre nun $E_\nu = e_\nu - f_\nu$, so wäre $(e_\nu - f_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e'_\lambda$. Da aber klar ist, dass $e_\nu = e'_\nu$, $f_\nu > 1$ ist, so hätten wir $(e'_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e'_\lambda$, entgegen dem

Hilfssatz 1 (i). Deshalb muss $E_\nu = e_\nu - f_\nu + 1$ für alle ν ($\nu \geqq N$) sein. Dann erhalten wir aus (19)

$$(e_\nu - f_\nu + 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e'_\lambda.$$

Da aber nach Hilfssatz 1 (i) $e'_\lambda > (e'_\nu - 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda$ ist, so wird $e_\nu - f_\nu + 1 > e'_\nu - 1$. Aus $e'_\nu = e_\nu$ folgt $f_\nu < 2$ und ferner ist $f_\nu \neq 0$, weil $\mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p}_\nu$ ist. Also ist $f_\nu = 1$ für alle ν ($\nu \geqq N$), folglich muss $E_\nu = e_\nu$ für alle ν ($\nu \geqq N$) sein.[30]

Danach $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ ist durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu+1-f_\nu} = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ teilbar und $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ ist auch durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda+1-f_\lambda} = \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ teilbar. Dabei ist $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}$ klar. Andererseits $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ ist durch $\mathfrak{p}_\nu'^{e'_\nu} (= \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu})$ teilbar und $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ ist nach $\mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}'_\lambda$, $\mathfrak{h}_\lambda \not\subset \mathfrak{p}'_\lambda$ genau durch $\mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}$ teilbar. Dabei ist klar dass $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}$ ist. Danach muss $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} (= \mathfrak{p}_\nu^{e'_\nu})$ durch das Produkt $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}$ teilbar sein.

(ii) Jetzt nehmen wir an, dass solches Primideal $\mathfrak{p}$ existiert. Falls $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$ ist, wegen $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$, setzen wir auch $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{a}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$; $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu} \mathfrak{b}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$ für alle $\nu (\nu \geqq N)$, so wird nach unserer Annahme $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$. Danach erhalten wir sofort

$$(e_\nu - f_\nu + 1) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - f_\lambda + 1. \tag{20}$$

Dann ist $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ genau durch $\mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda + 1}$ teilbar und auch nach Voraussetzung ist $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ durch $\mathfrak{p}_\lambda$ teilbar, also ist $e_\lambda - f_\lambda + 1 \neq 0$, folglich nach (20) $e_\nu - f_\nu + 1 \neq 0$. Da aber $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu + 1}$ teilbar ist, so muss $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ durch $\mathfrak{p}_\nu$ teilbar sein. Das ist nach Voraussetzung unmöglich.

Falls $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$ ist, wäre $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$, so hätten wir in gleicher Weise wie oben Beweis

$$(e_\nu - f_\nu) h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e_\lambda - f_\lambda. \tag{21}$$

Aus $e_\lambda - f_\lambda \neq 0$ folgt $e_\nu - f_\nu \neq 0$ und $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ wäre genau durch $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu}$ teilar. Also wäre $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ durch $\mathfrak{p}_\nu$ teilbar, das ist auch unmöglich.

Danach muss $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ sein. Dann, wegen $\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{p}_\nu$, setzen wir $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{a}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu$, so ist $\mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{p}_\nu$, weil $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p}_\nu$ ist. Ist $\mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$ die zu $\mathfrak{p}_\nu$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{b}_\nu$ und ist $\mathfrak{b} = \bigcap_\tau \mathfrak{q}^{(b)}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}$, wobei $\mathfrak{J}$ eine Menge endlicher oder unendlicher Indexe bedeutet. Danach erhalten wir

$$\mathfrak{b} \cap \mathfrak{O}_\nu = \bigcap_\tau (\mathfrak{q}^{(b)}_{(\tau)} \cap \mathfrak{O}_\nu) = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu} \mathfrak{b}'_\nu, \quad (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{b}'_\nu) = \mathfrak{O}_\nu.$$

30) Daraus folgt $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(c)}$ und $\mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(c)} \mathfrak{p} = \mathfrak{q}^{(a)} \mathfrak{p}$.

Also gibt es in der Menge $\mathfrak{q}^{(b)}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}$ eine zu $\mathfrak{p}'$ gehörige I.P.K. $\mathfrak{q}'^{(b)}$ von $\mathfrak{b}$, derart, dass $\mathfrak{q}'^{(b)} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu'^{f_\nu}$ ist. Dann ist für hinreichend grosses λ $(\lambda > \nu \geqq N)$

$$\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\lambda (=\mathfrak{p}_\lambda), \quad \mathfrak{b}_\lambda \not\subset \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\lambda ; \quad \mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p}' \frown \mathfrak{O}_\lambda = \mathfrak{p}'_\lambda ,$$

aber $\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}' \frown \mathfrak{O}_\nu$. Danach erhalten wir in gleicher Weise wie Beweis von (i)

$$E'_\nu h_{\nu+1} h_{\nu+2} \cdots\cdots h_\lambda \geqq e_\lambda ; \quad E'_\nu = e'_\nu - f'_\nu \quad \text{oder} \quad e'_\nu - f'_\nu + 1 .$$

Dabei ist $E'_\nu = e'_\nu - f'_\nu$ unmöglich, wie in Beweis von (i). Wäre dann $E'_\nu = e'_\nu - f'_\nu + 1$, so würde $e'_\nu - f'_\nu + 1 = E'_\nu = 0$, weil $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p}_\nu$ wäre. Also muss $e_\lambda = 0$ sein, das ist nach $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{p} \frown \mathfrak{O}_\lambda$ unmöglich.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so besteht unsere Behauptung zurecht.

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und sei $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ die zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, und sei $\mathfrak{h}$ der Durchschnitt von sämtlichen Primidealen, derart, dass $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ ist, so gibt es dann und nur dann $\mathfrak{c}$ von der Art, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ genügt, wenn für jede zwei entsprechende $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$ ein drittes $\mathfrak{q}^{(c)}$ existiert, derart, dass $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$ ist und ferner*

$$\cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{h}_{\nu+1} \mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{b}_{\nu+1} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subseteqq \cdots\cdots$$

ist, wobei $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b} \frown \mathfrak{O}_\nu$, $\mathfrak{h}_\nu = \mathfrak{h} \frown \mathfrak{O}_\nu$, $\nu \geqq N$ ist.

Wir erhalten nach der Definition des Idealquotienten $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$. Ist $\mathfrak{p}$ damit ein Primidealteilar von $\mathfrak{a}$, so ist klar, dass $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Ist $\mathfrak{p}$ dagegen kein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so wird, wegen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$ und wird, wegen $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$, also ist $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ keinesweg durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Danach hat $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ keinen Primidealteiler ausser dem von $\mathfrak{a}$.

Bezeichnen wir nun die zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörigen I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ resp. mit $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}$. Es sei zunächst $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$, dann ist $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\mathfrak{q}}$. Da aber $\mathfrak{q}^{(c)}$ existiert, derart, dass $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$ ist, so wird nach Satz 4 $\mathfrak{q}^{(c)} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$. Danach ist $\mathfrak{q}^{(c)} = \bar{\mathfrak{q}}$, folglich $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\bar{\mathfrak{q}}$. Da aber $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ist, so ist nach Hilfssatz 8 (i) $\mathfrak{q} = \bar{\mathfrak{q}}$. Also muss $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ sein, wobei $\mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ nach Hilfssatz 6 die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ ist.

Es sei zweitens $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$, so ist $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Aus $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$ folgt nach Satz 4 $\mathfrak{q}^{(c)} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}$, folglich $\mathfrak{q}^{(c)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Also erhalten wir $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\bar{\bar{\mathfrak{q}}}$. Da aber nach Hilfssatz 8 (ii) $\mathfrak{q} \supseteqq \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$ ist, so wird $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$. Andererseits folgt nach Hilfssatz 6 (i), (ii) aus $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ $\mathfrak{q}^{(a)} \supseteqq \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$. Danach muss auch $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}$ sein.

Es sei drittens $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{b}$, so muss auch die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ gleich $\mathfrak{q}^{(a)}$ sein. Denn, erhalten wir nach $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ ohne weiteres $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}$. Umgekehrt ist α ein Element von $\mathfrak{q}$, so existiert ein Element t von der Art, dass

$$\alpha t \in \alpha : \mathfrak{b}, \quad t \notin \mathfrak{p}$$

ist. Da aber $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{p}$ ist, so existiert ein Element s, derart, dass $s \in \mathfrak{b}$, $s \notin \mathfrak{p}$ ist. Dann ist $\alpha t s \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}^{(a)}$, $ts \notin \mathfrak{p}$. Also muss $\alpha \in \mathfrak{q}^{(a)}$, d.h. $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)}$ sein.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so haben $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ ganz dieselben Primidealteiler und jede der beiden haben die gleichen I.P.K., also muss $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ sein, nämlich gibt es $\mathfrak{c}$ von der Art, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist.

Umgekehrt nehmen wir an, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ gilt und setzen wir

$$\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu = \prod_i \mathfrak{p}_{\nu i}^{e_{\nu i} - f_{\nu i} + 1} \prod_j \mathfrak{p}_{\nu j}^{e_{\nu j} - f_{\nu j}} \prod_k \mathfrak{p}_{\nu k}^{e_{\nu k}},$$

$$\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda = \prod_l \mathfrak{p}_{\lambda l}^{e_{\lambda l} - f_{\lambda l} + 1} \prod_m \mathfrak{p}_{\lambda m}^{e_{\lambda m} - f_{\lambda m}} \prod_n \mathfrak{p}_{\lambda n}^{e_{\lambda n}}, \quad \lambda > \nu \geqq N, \tag{22}$$

so existiert zuerst nach Hilfssatz 9 (ii) kein Primideal $\mathfrak{p}$, derart, dass

$$\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\nu (= \mathfrak{p}_\nu) \quad \text{und} \quad \mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\lambda (= \mathfrak{p}_\lambda)$$

ist.

Wenn $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ ist, dann bezeichnen wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. mit $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, $\mathfrak{q}^{(c)}$, so erhalten wir nach $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und Hilfssatz 6 (ii) $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)}\mathfrak{q}^{(c)}$. Setzn wir $\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(b)} \cap \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{f_\nu}$, $\mathfrak{q}^{(c)} \cap \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so wird: Ist $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{h}$, dann erhalten wir $E_\nu = e_\nu - f_\nu$ und $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\mathfrak{q}}$, also ist

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda}, \quad \lambda > \nu \geqq N. \tag{23}$$

Ist $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{h}$, dann erhalten wir $E_\nu = e_\nu - f_\nu + 1$ und $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \bar{\bar{\mathfrak{q}}}$, also ist

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - f_\nu + 1} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda - f_\lambda + 1}, \quad \lambda > \nu \geqq N. \tag{24}$$

Wenn $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \not\supseteqq \mathfrak{b}$ ist, dann gilt:
Ist $\mathfrak{p}_\nu \not\supseteqq \mathfrak{b}_\nu$ für alle ν $(\nu \geqq N)$, so wird ohne weiteres

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \quad \lambda > \nu \geqq N \tag{25}$$

Ist $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\nu) \supset \mathfrak{b}_\nu \supset \mathfrak{a}_\nu$ und $\mathfrak{p}_\lambda (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\lambda) \not\supset \mathfrak{b}_\lambda$, so muss in gleicher Weise wie in Beweis von Hilfssatz 9 (ii) ein Primideal $\mathfrak{p}'$ existieren von der Art, dass $\mathfrak{a}_\nu \subset \mathfrak{b}_\nu \subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{D}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{p}_\nu)$ und $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{D}_\lambda (= \mathfrak{p}'_\lambda)$ ist. Dann ist nach Hilfssatz 9 (i) die zu $\mathfrak{p}_\nu (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\nu = \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{D}_\nu)$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu$ durch das Produkt der zu $\mathfrak{p}_\lambda (= \mathfrak{p} \cap \mathfrak{D}_\lambda)$ und $\mathfrak{p}'_\lambda (= \mathfrak{p}' \cap \mathfrak{D}_\lambda)$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda$ teilbar:

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda} \mathfrak{p}_\lambda'^{e'_\lambda}. \tag{26}$$

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen; Es gibt kein Primideal $\mathfrak{p}$, derart, dass $\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{b}_\nu \not\subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\nu$ und $\mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{O}_\lambda$ ist, und es besteht nach (23), (24), (25) und (26) die Tatsache, dass jedes von $\mathfrak{p}_{\nu i}^{e_{\nu i}-f_{\nu i}+1}$, $\mathfrak{p}_{\nu j}^{e_{\nu j}-f_{\nu j}}$, $\mathfrak{p}_{\nu k}^{e_{\nu k}}$ in (22) durch geeignete $\mathfrak{p}_{\lambda l}^{e_{\lambda l}-f_{\lambda l}+1}$, $\mathfrak{p}_{\lambda m}^{e_{\lambda m}-f_{\lambda m}}$, $\mathfrak{p}_{\lambda n}^{e_{\lambda n}}$ teilbar ist, und umgekehrt. Also muss

$$\mathfrak{h}_\nu \mathfrak{a}_\nu ; \mathfrak{b}_\nu \subseteqq \mathfrak{h}_{\nu+1} \mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{b}_{\nu+1} \subseteqq \cdots\cdots \subseteqq \mathfrak{h}_\lambda \mathfrak{a}_\lambda : \mathfrak{b}_\lambda \subseteqq \cdots\cdots$$

sein.

Schliesslich ist klar, dass nach $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und Hilfssatz 6 (ii), (iii) für jedes $\mathfrak{q}^{(a)}$ und $\mathfrak{q}^{(b)}$ ein drittes $\mathfrak{q}^{(c)}$ von der Art existiert, dass $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(b)} \mathfrak{q}^{(c)}$ ist.

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinem besten Dank aus.

Literatur

1. E. STIEMKE; *Über unendliche algebraische Zahlkörper* (kurz *u.a.Z.*), Math. Zeit. **25** (1926), s. 9–39, zitiert mit "Stiemke".
2. W. KRULL; *Idealtheorie in u.a.Z.*, Math. Zeit. **29** (1929), s. 42–54, zitiert mit "Krull [1]".
3. ———; *Idealtheorie in u.a.Z.* (II), Math. Zeit. **31** (1930), s. 527–557, zitiert mit "Krull [2]".
4. ———; *Idealtheorie*, Ergeb. d. Math. u. I. Grenzgeb., (1935), zitiert mit "Krull [3]".
5. N. NAKANO; *Über den Fundamentalsatz der Idealtheorie in u.a.Z.*, Jour. Sci. of Hiroshima Univ. **15** (1952), s. 171–175, zitiert mit "Nakano [1]",
6. ———; *Idealtheorie in einem speziellen u.s.Z.*, loc. cit., **16** (1953), s. 425–439, zitiert mit "Nakano [2]".
7. ———; *Über idempotente Ideale in u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1953), s. 11–20, zitiert mit "Nakano [3]".
8. ———; *Über die kürzeste Darstellung der Ideale im u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1953) s. 21–25, zitiert mit "Nakano [4]".
9. ———; *Über die Einteilung von Primäridealen im u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1954) s. 321–343, zitiert mit "Nakano [5]".
10. ———; *Über das Produkt von Primäridealen im u.a.Z.*, loc. cit., **18** (1954) s. 129–136, zitiert mit "Nakano [6]".
11. ———; *Über den Primäridealquotienten im u.a.Z.*, loc. cit., **18** (1955) s. 257–269, zitiert mit "Nakano [7]".
12. ———; *Idealtheorie im Stiemkeschen Körper*, loc. cit., **18** (1955), s. 271–287, zitiert mit "Nakano [8]".
13. ———; *Über die Produkte und Quotienten von Idealen in u.a.Z.*, loc. cit., **19** (1955), s. 239–253, ztliert mit "Nakano [9]".