Journal of Science of the Hiroshima University, Ser. A, Vol. 19, No. 2, November, 1955

Über die Produkte und Quotienten von Idealen in Unendlichen Algebraischen Zahlkörpern

Von

Noboru NAKANO

(Eingegangen am 31, Mai 1955)

Wenn $\mathfrak{K}$ ein allgemeiner unendlicher algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von $\mathfrak{K}$ ist, so gelten in $\mathfrak{O}$ die folgenden Bedingungen:

I. $\mathfrak{O}$ ist kommutativer Integritätsbereich mit Einselement.

II. Jedes von $\mathfrak{O}$ verschiedene Ideal ist durch mindestens ein Primideal teilbar und alle von Nullideal verschiedenen Primideale sind teilerlos.[1)]

III. $\mathfrak{O}$ ist ganz-abgeschlossen im Quotientenkörper $\mathfrak{K}$.[2)]

In $\mathfrak{O}$ ist aber der Teilerkettensatz nicht immer gültig. Danach kann ein von Einheits- und Null-ideal verschiedenes Ideal $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{O}$ idempotent sein und $\mathfrak{a}$ kann nicht immer endlich viele Primidealteiler besitzen. Unter diesen Umständen haben wir oft $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, obwohl $\mathfrak{a}$ ein von Nullideal verschiedenes Ideal und $\mathfrak{b}$ ein von $\mathfrak{O}$ verschiedener Teiler von $\mathfrak{a}$ ist. Danach erhebt sich die Frage: Welche Bedingungen sind dafür notwendig und hinreichend dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ ist? Die Untersuchung dieser Probleme ist das Ziel dieser Arbeit.

Vor kurzem[3)] habe ich das soeben besprochene Problem im *Stiemkeschen* Körper,[4)] in dem jedes Ideal nur endlich viele Primidealteiler besitzt, untersucht und folgendes Resultat erhalten: Wenn $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ im Stiemkeschen Körper gilt, muss $\mathfrak{b}$ idempotent sein, usw.

In einem *speziellen* unendlichen algebraischen Zahlkörper, in dem kein idempotentes Primideal ausser Einheits- und Null-ideal existiert, habe ich auch bewiesen,[5)] dass es keinesweg geschehen kann, dass $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ist, und $\mathfrak{p}\supset\bigcap_{\tau}\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ für $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ notwendig und hinreichend ist, wobei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ ist und $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ alle von $\mathfrak{p}$ verschiedene Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ sind.

---

1). Für *I* und *II* siehe etwa „Stiemke“, s. 20 oder „Krull [1]“, s. 44. —— Über den im folgenden benutzten Arbeiten siehe Literaturverzeichnis am Ende dieser Note.

2). „Krull [3]“, s. 103.

3). „Nakano [8]“, s. 281-284, §3. Idempotentes Ideal.

4). „Stiemke“ und „Krull (1)“, s. 42.

Im *allgemeinen* unendlichen algebraischen Zahlkörpern sind die Bedingungen für $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ fast gleich wie im Stimkeschen Körper, dagegen für $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ ziemlich verschieden wie folgt: Es sei $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$, so muss entweder $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ oder $\mathfrak{p}\supset\bigcap_{\tau}\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ sein, und sei im allgemeinen Fall $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, so muss entweder $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^2$ oder $\mathfrak{a}'\supset\mathfrak{a}''$ sein, wobei $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'\cap\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'=\bigcap_{t=1}^{n}\mathfrak{q}_{(t)}$, $\mathfrak{a}''=\bigcap_{\kappa}\mathfrak{q}_{(\kappa)}$ ist und $\mathfrak{q}_{(t)}$, $t=1, 2, \cdots, n$, $\mathfrak{q}_{(\kappa)}$, $\kappa\in\mathfrak{J}$ in gleicher weise wie beim Satz 16 [6] in dieser Note definiert werden soll.

§ 1. Primärkomponente eines Ideales

Im folgenden bedeutet $\mathfrak{K}$ einen algebraischen Zahlkörper, welcher als der Vereinigungskörper von abzählbar unendlich vielen algebraischen Zahlkörpern $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_\nu, \ldots$ definiert wird, wobei jeder $\mathfrak{K}_\nu$ von endlichem Grade über dem Rationalkörper $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_\nu$ in $\mathfrak{K}_{\nu+1}$ enthalten ist. Wir bezeichnen diesen Körper $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}=\{\mathfrak{K}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_\nu$ resp. die Hauptordnung aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_\nu$, so ist offenbar: $\mathfrak{O}=\{\mathfrak{O}_\nu\}$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $\mathfrak{O}$ und setzen wir $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, so ist $\mathfrak{p}_\nu$ ein Primideal in $\mathfrak{O}_\nu$. Ferner ist $\mathfrak{q}$ ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal, so können wir $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}$ setzen. Andererseits setzen wir nacheinander $\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_{\nu+1}=\mathfrak{p}_{\nu+1}^{h_{\nu+1}}\mathfrak{c}_{\nu+1}$, $(\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{c}_{\nu+1})=\mathfrak{O}_{\nu+1}$, $\mathfrak{p}_\nu\mathfrak{O}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda^{h_{\nu+1}h_{\nu+2}\cdots h_\lambda}\mathfrak{c}_\lambda$, $(\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{c}_\lambda)=\mathfrak{O}_\lambda$ für $\lambda>\nu\geqq N$.

Vor allem wollen wir den Zusammenhang zwischen einer zu $\mathfrak{p}$ gehörigen isolierten Primärkomponente (kurz mit I. P. K.) von $\mathfrak{a}$ und einer zu $\mathfrak{p}_\nu$ gehörigen I. P. K. von $\mathfrak{a}_\nu$ $(=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu)$ untersuchen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal in $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{q}$ eine zu einem Primideal $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$, und setzt man*

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu,\ (\mathfrak{p}_\nu, \mathfrak{a}'_\nu)=\mathfrak{O}_\nu,\ \mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu,\quad \nu\geqq N$$

und bezeichnet mit $\mathfrak{q}'$ die Vereinigungsmenge $\{\ldots\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}}, \ldots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda}, \ldots\}$, so ist $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$.

Setzen wir $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$, so ist die Vereinigungsmenge $\{\ldots, \mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{E_{\nu+1}}, \ldots, \mathfrak{p}_\lambda^{E_\lambda}, \ldots\}$ gleich $\mathfrak{q}$. Aus $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{q}$ folgt

$$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu\subseteqq\mathfrak{q}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu},$$

also wird $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\subseteqq\mathfrak{p}_\nu^{E_\nu}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$.

5) „Nakano [2]“, s. 433, Satz 8 und s. 434, Hilfssatz 2, (ii) und Satz 9.

6) Dieses Journal s. 251.

Damit erhalten wir, wegen $\mathfrak{q}'=\{\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\}$, $\mathfrak{q}'\subseteqq\mathfrak{q}$. Umgekehrt sei α ein beliebiges Element von $\mathfrak{q}$, so existiert nach Definition [7] von der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K. von $\mathfrak{a}$ ein Element t von der Art, dass

$$\alpha t\in\mathfrak{a},\quad t\notin\mathfrak{p}$$

ist. Dann ist α, $t\in\mathfrak{O}_\nu$ für hinreichend grosses ν $(\nu\geqq N)$. Danach erhalten wir

$$\alpha\, t\in\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}_\nu'\subseteqq\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu},\quad t\notin\mathfrak{p}_\nu,$$

also wird $\alpha\in\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\subseteqq\mathfrak{q}'$, d. h. $\mathfrak{q}\subseteqq\mathfrak{q}'$. Damit muss $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}'$ sein.

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ erhalten wir folgenden Fundamentalsatz: [8] Jedes Ideal $\mathfrak{a}$ lässt sich als Durchschnitt von seinen sämtlichen I. P. K. darstellen; $\mathfrak{a}=\bigcap_\iota\mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$, wobei $\mathfrak{J}$ eine Menge endlicher oder unendlicher Indexe bedeutet. Danach sei $\mathfrak{p}$ ein fester Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und seien $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ die anderen Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, so ist es möglich, $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)}$ [9] ist, während sämtliche $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd sind. Danach erhalten wir folgenden

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\cap(\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)})$ die Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch seine sämtlichen I. P. K., wobei $\mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$ die zu Primidealen $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehören, dann sind die folgenden zwei Eigenschaften gleichbedeutend:*

$$\text{(i)}\quad \mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)},\qquad \text{(ii)}\quad \mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}.$$

Erstens, aus $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)}$, ergibt sich sofort $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$, weil $\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$ ist.

Zweitens nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$ ist. Ist β ein Element aus $\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)}$, so ist $\beta\in\mathfrak{O}_\nu$, $\nu\geqq N$. Aus $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$ folgt

$$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu\supseteqq(\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)})\cap\mathfrak{O}_\nu=\bigcap_\tau(\mathfrak{q}_{(\tau)}\cap\mathfrak{O}_\nu).\text{[10]}$$

Da aber jedes $\mathfrak{q}_{(\tau)}\cap\mathfrak{O}_\nu$ ein Primäridealteiler von $\mathfrak{a}_\nu$ ist, können wir mindestens

7) „Nakano [1]", s. 172. Satz 1. Ist $\mathfrak{q}$ die Gesamtheit aller Elemente, deren Produkt mit einem geeignet gewählten Elemente $t\notin\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, so ist $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$.

8) Vgl. „Krull [1]", s. 47, Satz 5, „Nakano [1]" s. 175, Hauptsatz.

9) Wenn $\mathfrak{p}_\nu$ $(=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu)$ in mindestens zwei teilerfremde Primärfaktoren beim Übergang von $\mathfrak{O}_\nu$ zu $\mathfrak{O}_{\nu+1}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$ zerfällt (in diesem Falle sagen wir wie folgt: „$\mathfrak{p}_\nu$ *zerfällt nach* $\mathfrak{p}$ *unendlich*"), dann erhalten wir $\mathfrak{p}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{J}$, und umgekehrt. Vgl. „Nakano [2]", s. 429, Satz 1 und „Nakno [4], §2, s. 23∼25.

Wenn $\mathfrak{p}_\nu$ $(\nu\geqq N)$ dagegen „*nach* $\mathfrak{p}$ *unendlich verzweigt*" ist, dann erhnaten wir $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$, und umgekehrt. Vgl. „Nakano [3]," s. 13, Satz 1.

10) Vgl. „Nakano [2]", s. 428, Hilfssatz 1. Ist $\mathfrak{a}_{(\iota)}$, $\iota\in\mathfrak{J}$ ein Ideal in $\mathfrak{O}$ und ist $\mathfrak{J}$ eine endliches oder unendliches Menge von Indexen, so ist $(\bigcap_\iota\mathfrak{a}_{(\iota)})\cap\mathfrak{O}_\nu=\bigcap_\iota(\mathfrak{a}_{(\iota)}\cap\mathfrak{O}_\nu)$.

ein $\mathfrak{q}_{(\kappa)} \cap \mathfrak{O}_\nu$ aus $\mathfrak{q}_{(\tau)} \cap \mathfrak{O}_\nu$, $\tau \in \mathfrak{T}$ wählen, dass

$$\mathfrak{p}_\nu \supseteqq \mathfrak{q}_{(\kappa)} \cap \mathfrak{O}_\nu, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_{(\kappa)} \cap \mathfrak{O}_\nu$$

ist. Danach erhalten wir

$$\beta \in (\bigcap_\tau \mathfrak{p}_{(\tau)}) \cap \mathfrak{O}_\nu = \bigcap_\tau (\mathfrak{p}_{(\tau)} \cap \mathfrak{O}_\nu) \subseteqq \mathfrak{p}_{(\kappa)} \cap \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu \subseteqq \mathfrak{p}.$$

Daraus ergibt sich $\mathfrak{p} \supset \bigcap_\tau \mathfrak{p}_{(\tau)}$.

Über den Zusammenhang zwischen den zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K. $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$ und $\mathfrak{q}^{(ab)}$ von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ resp. können wir folgende zwei einfache Sätze beweisen, welche in dieser Arbeit eine grosse Rolle spielen.

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ und sei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ bezeichne die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, dann ist $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(b)}$.*

Ist α ein Element aus $\mathfrak{q}^{(a)}$, so existiert nach Definition der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K. von $\mathfrak{a}$ ein Element t, derart, dass

$$\alpha t \in \mathfrak{a}, \quad t \notin \mathfrak{p}$$

ist. Wegen $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, wird $\alpha t \in \mathfrak{b}$, $t \notin \mathfrak{p}$. Daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{q}^{(b)}$, also erhalten wir $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(b)}$.

Satz 4. *Es seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ beliebige Ideale in $\mathfrak{O}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\mathfrak{p}$ ein gemeinsamer Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, und bezeichnen wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K.* von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *resp. mit $\mathfrak{q}^{(ab)}$, $\mathfrak{q}^{(a)}$, $\mathfrak{q}^{(b)}$, so gilt $\mathfrak{q}^{(ab)} = \mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)}$.*

(ii) *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, aber kein Teiler von $\mathfrak{b}$ und bezeichnen wir die zu $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K.* von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *resp. mit $\mathfrak{q}^{(ab)}$, $\mathfrak{q}^{(a)}$, so ist $\mathfrak{q}^{(ab)} = \mathfrak{q}^{(a)}$.*

(i) Es ist klar, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)}$ ist. Da aber $\mathfrak{q}^{(ab)}$ gleich dem Durchschnitt aller der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primäridealteiler von $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist,[11] erhalten wir

$$\mathfrak{q}^{(ab)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)}\,\mathfrak{q}^{(b)}.$$

Umgekehrt sei α ein Element aus $\mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)}$, dann ist α von der Form $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \beta_i$, wobei α_i bzw. β_i $(i = 1.\ 2, \cdots, r)$ die Elemente aus $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ bedeutet. Aus $\alpha_i \in \mathfrak{q}^{(a)}$ folgt die Existenz eines Elementes s_i von der Art, dass

$$\alpha_i\, s_i \in \mathfrak{a}, \quad s_i \notin \mathfrak{p}$$

ist. Ebenso folgt aus $\beta_i \in \mathfrak{q}^{(b)}$ die Existenz eines t_i, derart, dass

$$\beta_i\, t_i \in \mathfrak{b}, \quad t_i \notin \mathfrak{p}$$

11) „Nakano [1]“, s. 172, Beweis von Satz 1. Dort haben wir bewiesen: Eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}$ ist gleich dem Durchschnitt aller der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Primärideale die Teiler von $\mathfrak{a}$ sind.

ist. Daraus folgt

$$\alpha_i \beta_i s_i t_i \in \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad s_i t_i \notin \mathfrak{p}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Deshalb ergibt sich $\alpha_i \beta_i \in \mathfrak{q}^{(ab)}$, und ferner $\alpha \in \mathfrak{q}^{(ab)}$. Also muss $\mathfrak{q}^{(ab)} \supseteqq \mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)}$, folglich $\mathfrak{q}^{(ab)} = \mathfrak{q}^{(a)}\mathfrak{q}^{(b)}$ sein.

(ii) Aus $\mathfrak{a} \supseteqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ folgt nach Satz 3 $\mathfrak{q}^{(a)} \supseteqq \mathfrak{q}^{(ab)}$. Ist α umgekehrt ein Element aus $\mathfrak{q}^{(a)}$, so existiert ein Element t von der Art, dass

$$\alpha t \in \mathfrak{a}, \quad t \notin \mathfrak{p}$$

ist. Aus $\mathfrak{b} \not\subseteq \mathfrak{p}$ folgt die Existenz eines Elements β, derart, dass $\beta \in \mathfrak{b}$, $\beta \notin \mathfrak{p}$ ist. Also erhalten wir

$$\alpha \beta t \in \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}, \quad \beta t \notin \mathfrak{p}.$$

Daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{q}^{(ab)}$, und ist damit $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(ab)}$. Also muss $\mathfrak{q}^{(a)} = \mathfrak{q}^{(ab)}$ sein.

§ 2. Bedingungen für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$

Früher haben wir folgende zwei Sätze im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper bewiesen :

(i) Ein beliebiges Ideal $\mathfrak{a}$ $(\neq (o), \mathfrak{O})$ ist dann und nur dann idempotent, wenn jede I. P. K. von $\mathfrak{a}$ idempotent ist.[12)]

(ii) Ist ein zu $\mathfrak{p}$ gehöriges Primärideal $\mathfrak{q}$ idempotent, so ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} (= \mathfrak{p}^2)$.[13)]
Aus (i) und (ii) ergibt sich sofort folgender

Satz 5. *Ein Ideal* $\mathfrak{a}$ $(\neq (o), \mathfrak{O})$ *ist dann und nur dann idempotent, wenn seine sämtlichen I. P. K. den idempotente Primideale gleich sind.*

Danach wollen wir in diesem Paragraphen auf folgende Probleme antworten : Ob $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ notwendig und hinreichend ist oder nicht, dafür, dass $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{O}$, $\mathfrak{a} \neq (o)$ ist? Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Krullschen Satz voraus.

Satz 6 (Krullscher Satz). *Es sei* $\mathfrak{a}$ *ein beliebiges nicht idempotentes Ideal, dann erhalten wir* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (o)$.

Ist $\mathfrak{a} = \bigcap_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ eine Darstellung durch seine sämtlichen I. P. K., so ist nach Satz 5 mindestens eines der $\mathfrak{q}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$, etwa $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, keinesweg idempotent. Dann muss $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{(\tau)}^n = (o)$ sein. Zum Beweise ist der folgende Satz[14)] grundlegend :

12) „Nakano [3]", s. 20, Satz 10.
13) „Nakano [3]", s. 16, Satz 6.
14) „Nakano [5]", s. 331, Hilfssatz 6.

Sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und sind $a \notin \mathfrak{q}$, $b \notin \mathfrak{q}'$, so ist $ab \notin \mathfrak{q}\mathfrak{q}'$. Jetzt setzen wir $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{n} = \mathfrak{d}$ und seien α, β zwei Elemente ausserhalb von $\mathfrak{d}$, so existieren zwei natürlichen Zahlen n, m, derart, dass $\alpha \notin \mathfrak{q}_{(\tau)}^{n}$ und $\beta \notin \mathfrak{q}_{(\tau)}^{m}$ sind. Daraus folgt nach dem oben besprochenen Satz $\alpha\beta \notin \mathfrak{q}_{(\tau)}^{n+m}$, folglich $\alpha\beta \notin \mathfrak{d}$. Aus $\alpha \notin \mathfrak{d}$ und $\beta \notin \mathfrak{d}$ muss damit $\alpha\beta \notin \mathfrak{d}$ folgen, also ist $\mathfrak{d}$ ein Primideal. Da aber in unendlichen algebraischen Zahlkörpern jedes von (o) verschiedene Primideal teilerlos ist, so erhalten wir $\mathfrak{d} = (o)$. Also gilt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{n} = (o)$. Danach erhalten wir

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^{n} \subseteqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{n} = (o).$$

Damit muss $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^{n} = (o)$ sein.

Nach diesem Krullschem Satz 6 können wir ohne weiteres folgenden Satz beweisen.

Satz 7. *Es sei* $\mathfrak{a} = \bigcap\limits_{\iota} \mathfrak{q}_{(\iota)}^{(a)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ *ein von Nullideal verschiedenes Ideal und* $\mathfrak{b}$ $(\neq \mathfrak{O})$ *ein Teiler von* $\mathfrak{a}$, *so erhalten wir dann und nur dann* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{2}$ [15] *und* $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{J}'$ *ist, wobei* $\mathfrak{J}'$ *eine Teilmenge von* $\mathfrak{J}$ *ist und* $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}'$ *sämtliche Primidealteiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

Aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ ergibt sich $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(\mathfrak{b}\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}^{2}\mathfrak{a}$, folglich $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^{2}$. In gleicher Weise erhalten wir

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{2}\,\mathfrak{a} = \cdots = \mathfrak{b}^{n}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{n+1}\,\mathfrak{a} = \cdots,$$

d. h. $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^{2}, \cdots, \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^{n}, \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}^{n+1}, \cdots$, also ist $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}^{2} \cap \cdots \cap \mathfrak{b}^{n} \cap \mathfrak{b}^{n+1} \cap \cdots$. Wäre $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^{2}$, so würde nach Satz 6 sich $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}^{n} = (o)$ ergeben. Daraus folgte ein Widerspruch $\mathfrak{a} = (o)$. Also muss $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{2}$ sein.

Nach $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{2}$ und Satz 5 erhalten wir die Darstellung $\mathfrak{b} = \bigcap\limits_{\tau} \mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}'$, wobei $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ idempotent ist. Ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(ba)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, so erhalten wir nach Satz 4 $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(ba)} = \mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$. Andererseits ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(ba)}$, wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$. Also muss $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ für alle $\tau \in \mathfrak{J}'$ sein.

Umgekehrt hat $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ keinen Primidealteiler ausser dem von $\mathfrak{a}$. Denn gäbe es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von der Art, dass $\mathfrak{b}\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$ aber $\mathfrak{a} \not\subseteqq \mathfrak{p}$ ist. So hätten wir $\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$, folglich einen Widerspruch $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{p}$. Sind $\mathfrak{p}_{(\iota)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$ dann sämtliche Primide-

15) Vgl. „Nakano [5]", s. 328, Satz 6 und Zusatz. Wir erhalten nur dann $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$, wenn $\mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{p}_{(\tau)}^{2}$ ist. Also ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{2}$ nicht notwendig.

alteiler von $\mathfrak{a}$ und ist $\mathfrak{q}_{(\iota)}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}_{(\iota)}^{(ba)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\iota)}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{ba}$, so erhalten wir nach Satz 4: Wenn $\mathfrak{p}_{(\kappa)} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_{(\kappa)} \not\supseteqq \mathfrak{b}$ ist, dann ist $\mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(ba)}$, und ferner wenn $\mathfrak{p}_{(\tau)} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ ist, dann ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(ba)} = \mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$, weil aus $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ wie oben $\mathfrak{b} = \bigcap_{\tau} \mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}'$, $\mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{p}_{(\tau)}^2$ folgt und nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_{(\tau)} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ ist.

Danach hat $\mathfrak{ba}$ keinen Primidealteiler ausser einen Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und erhalten wir, dass stets $\mathfrak{q}_{(\iota)}^{(ba)} = \mathfrak{q}_{(\iota)}^{(a)}$ ist für alle $\iota \in \mathfrak{J}$. Also muss $\mathfrak{a} = \mathfrak{ba}$ sein.

§ 3. Bedingungen für $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$

Im allgemeinen unendlichen algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ ist es möglich, dass $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ ist, während $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ ist. In diesem Paragraphen wollen wir nicht nur die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ gilt, sondern auch die Eigenschaften der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K. von $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ untersuchen.

Satz 8. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und es sei $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}$,*[16] *so ist $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$.*

Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ folgt nach Satz 3 $\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}$. Andererseits erhalten wir $\mathfrak{a} : \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$, wegen $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)}$. Da aber $\mathfrak{q}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I.P.K. von $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$.[17] Also wird

$$\mathfrak{q}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}.$$

Da aber kein echtes Zwischenideal zwischen $\mathfrak{q}^{(a)}$ und $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$ existiert,[18] erhalten wir sofort $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$.

Satz 9. *Sind $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ zwei verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{a}$ und ist $\mathfrak{q}'^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}'$ die zu $\mathfrak{p}'$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}$,* so ist $\mathfrak{q}'^{(a)} = \mathfrak{q}'$.

Aus $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ folgt $\mathfrak{q}'^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}'$. Umgekehrt ist α ein Element von $\mathfrak{q}'$, so existiert ein Element t von der Art, dass

$$\alpha t \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p}, \quad t \notin \mathfrak{p}'$$

ist. Aus $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ folgt die Existenz eines Elementes π in $\mathfrak{p}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}'$. Dann ergibt sich aus $\alpha t \mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{a}$

$$\alpha t \pi \in \mathfrak{a}, \quad t \pi \notin \mathfrak{p}'.$$

Also ist $\alpha \in \mathfrak{q}'^{(a)}$, d. h. $\mathfrak{q}'^{(a)} \supseteqq \mathfrak{q}'$. Damit muss $\mathfrak{q}'^{(a)} = \mathfrak{q}'$ sein.

16) Im folgenden nehmen wir an, dass $\mathfrak{p}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ ist.
17) Siehe Fussnote 11) in dieser Note.
18) „Nakano [5]", s. 335, Satz 16 und Zusatz.

Satz 10. *Es sei* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\frown(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)})$ *die Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *durch seine sämtliche I. P. K., wobei* $\mathfrak{q}$ *bzw.* $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{T}$ *zu* $\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ *gehört, und es sei* $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$, *dann muss entweder* $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ *oder* $\mathfrak{p}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{p}_{(\tau)}$ *sein.*

Aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ ergibt sich

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}\frown(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)})):\mathfrak{p}=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\frown((\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}):\mathfrak{p})$$

$$=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\frown(\underset{\tau}{\frown}(\mathfrak{q}_{(\tau)}:\mathfrak{p}))=(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\frown(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)})=\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\frown(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)})$$

Setzen wir somit $\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}=\mathfrak{a}'$, so wird $(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\frown\mathfrak{a}'=\mathfrak{q}\frown\mathfrak{a}'$. Wenn $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ ist, dann ist klar, dass die Gleichung gilt. Danach nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$ ist. Dann erhalten wir

$$(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\,\mathfrak{a}'\subseteqq(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\frown\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{q},$$

also ist

$$\mathfrak{a}'\subseteqq\mathfrak{q}:(\mathfrak{q}:\mathfrak{p}). \tag{1}$$

Andererseits folgt aus $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}\neq\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{q}:(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\neq\mathfrak{O}. \tag{2}$$

Da aber nach Definition von Idealquotienten $\mathfrak{p}(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})\subseteqq\mathfrak{q}$ ist, so wird

$$\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}:(\mathfrak{q}:\mathfrak{p}). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) ergibt sich $\mathfrak{q}:(\mathfrak{q}:\mathfrak{p})=\mathfrak{p}$. Damit erhalten wir

$$\mathfrak{a}'\subseteqq\mathfrak{p},\quad \text{d. h.}\quad \underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}\subset\mathfrak{p}.$$

Nach Satz 2 erhalten wir, wegen $\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}\subset\mathfrak{p}$, $\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{p}_{(\tau)}\subset\mathfrak{p}$ und ferner wegen $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. Damit ist unsere Behauptung einleuchtend.

Es sei umgekehrt $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$ oder $\mathfrak{p}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{p}_{(\tau)}$, dann erhebt sich die Frage, ob wir $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ erhalten oder nicht.

Diese Frage ersetzen wir durch die etwas stärkere [19]

$$\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\quad\text{oder}\quad\mathfrak{q}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)},$$

dann erhalten wir folgenden

Satz 11. *Es sei* $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\frown(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)})$ *die Darstellung von* $\mathfrak{a}$ *durch seine sämtliche I. P. K., wobei* $\mathfrak{q}$ *bzw.* $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, $\tau\in\mathfrak{T}$, *zu* $\mathfrak{p}$ *bzw.* $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ *gehört, und sei* $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ *oder* $\mathfrak{q}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}$, *dann ist*

19) Aus $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ folgt $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}^2$. Siehe „Nakano [5]", s. 328, Satz 6 und Zusatz. Aus $\mathfrak{q}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}$ folgt $\mathfrak{p}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{q}_{(\tau)}$, dann ist nach Satz 2 $\mathfrak{p}\supset\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{p}_{(\tau)}$.

$\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{q}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$, so wird nach Satz 8 und 9 ohne weiteres $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$. Jetzt nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}\supset\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$, d. h. $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}\cap(\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)})=\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$ ist. Setzen wir $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{c}$, so wird $\mathfrak{c}\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{a}=\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}$, d. h. $\mathfrak{c}\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}$ für alle $\tau\in\mathfrak{J}$. Wegen $(\mathfrak{p},\mathfrak{q}_{(\tau)})=\mathfrak{O}$ erhalten wir $\mathfrak{q}_{(\tau)}:\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_{(\tau)}$. Daraus folgt

$$\mathfrak{c}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}\quad\text{für alle}\quad\tau\in\mathfrak{J},\quad\text{d. h.}\quad\mathfrak{c}\subseteqq\bigcap_\tau\mathfrak{q}_{(\tau)}=\mathfrak{a}.$$

Also muss $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}\subseteqq\mathfrak{a}$, folglich $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}=\mathfrak{a}$ sein.

Zum Abschluss dieses Paragraphen werden wir noch einen Satz hinzufügen, welcher den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{p}_\nu$, und den zwischen der zu $\mathfrak{p}$ gehörigen I. P. K. von $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{p}$ $(\neq\mathfrak{q}^{(a)})$ erklärt. Zu diesem Zwecke schicken wir folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 1. *Ist* $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ *und setzen wir* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{b}_\nu$, *und ist*

$$\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_{\nu+1}:\mathfrak{b}_{\nu+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda\subseteqq\cdots,\quad\nu\geqq N,$$

so ist die Vereinigungsmenge $\{\cdots,\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu,\mathfrak{a}_{\nu+1}:\mathfrak{b}_{\nu+1},\cdots,\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda,\cdots\}$ *gleich* $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ *und ferner ist* $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu$ *für alle* ν $(\nu\geqq N)$.

Es sei α ein Element von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, so wird $\alpha\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$. Ist $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$, $\nu\geqq N$, so ist damit $\alpha\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_\nu$,[20] d. h. $\alpha\in\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu$. Daraus folgt $\{\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\}\supseteqq\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Es sei umgekehrt β ein Element von $\{\mathfrak{a}_\nu;\mathfrak{b}_\nu\}$, so ist $\beta\in\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda$ für hinreichend grosses λ $(\lambda\geqq\nu)$. Daraus folgt $\beta\mathfrak{a}_\lambda\subseteqq\mathfrak{b}_\lambda$. Da aber $\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{b}_\lambda\subseteqq\mathfrak{a}_{\lambda+1}:\mathfrak{b}_{\lambda+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\mu:\mathfrak{b}_\mu\subseteqq\cdots$, $\mu>\lambda$ ist, wird $\beta\mathfrak{b}_{\lambda+1}\subseteqq\mathfrak{a}_{\lambda+1},\cdots,\beta\mathfrak{b}_\mu\subseteqq\mathfrak{a}_\mu,\cdots$, folglich $\beta\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$. Damit ist $\{\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\}\subseteqq\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, folglich $\{\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\}=\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$.

Danach ist klar, dass $\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu\subseteqq(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu$, ist. Umgekehrt ist γ ein Element von $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu$ so ist $\gamma\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$, $\gamma\in\mathfrak{O}_\nu$. Dann ist $\gamma\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_\nu$,[20] d. h. $\gamma\in\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu$. Also muss $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{b}_\nu$ sein.

Satz 12. *Es sei* $\mathfrak{q}^{(a)}$ *bzw.* $\mathfrak{q}$ *eine zu* $\mathfrak{p}$ *gehörige I. P. K. von* $\mathfrak{a}$ *bzw.* $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}$ *und man setze* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_\nu$, $\nu\geqq N$, *und sei* $\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\nu:\mathfrak{p}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_{\nu+1}:\mathfrak{p}_{\nu+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathfrak{a}_\lambda:\mathfrak{p}_\lambda\subseteqq\cdots$, *so ist* $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{p}\,(\neq\mathfrak{q}^{(a)})$.

Ist α ein beliebiges Element von $\mathfrak{q}^{(a)}:\mathfrak{p}$, so ist $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$, $\nu\geqq N$. Nun setzen wir $\mathfrak{a}_\nu=\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu}\mathfrak{a}'_\nu$, $(\mathfrak{p}_\nu,\mathfrak{a}'_\nu)=\mathfrak{O}_\nu$, so ist

20) Es sei $\alpha\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}$, $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$, so wird $\alpha\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{a}_\nu$, wobei $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{a}_\nu$, $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{b}_\nu$ ist. Ist β ein Element aus $(\alpha\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu$, so ist β von der Form $\beta=\alpha\gamma$, wobei $\gamma\in\mathfrak{b}$ ist. Aus α, $\beta\in\mathfrak{O}_\nu$ folgt $\gamma=\beta/\alpha\in\mathfrak{K}_\nu$. Da aber $\gamma\in\mathfrak{O}$ ist, erhalten wir $\gamma\in\mathfrak{O}_\nu$, folglich $\gamma\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{O}_\nu$. Also ist $\beta\in\alpha\mathfrak{b}_\nu$, folglich $(\alpha\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu\subseteqq\alpha\mathfrak{b}_\nu$.

Umgekehrt ist δ ein Element aus $\alpha\mathfrak{b}_\nu$, so ist $\delta\in\alpha\mathfrak{b}$. Da aber $\delta\in\mathfrak{O}_\nu$ ist, erhalten wir $\delta\in(\alpha\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu$, folglich $\alpha\mathfrak{b}_\nu\subseteqq(\alpha\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu$. Also muss $(\alpha\mathfrak{b})\cap\mathfrak{O}_\nu=\alpha\mathfrak{b}_\nu$ sein.

$$\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu} \mathfrak{a}'_\nu : \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu - 1} \mathfrak{a}'_\nu .$$

Im gleicher Weise erhalten wir

$$\mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1} = \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1} \mathfrak{a}'_{\nu+1}, \quad (\mathfrak{p}_{\nu+1}, \mathfrak{a}'_{\nu+1}) = \mathfrak{O}_{\nu+1}.$$

Aus $\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu \subseteqq \mathfrak{a}_{\nu+1} : \mathfrak{p}_{\nu+1}$ folgt $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1} \mathfrak{a}'_\nu \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1} \mathfrak{a}'_{\nu+1}$. Dabei ist $\mathfrak{a}'_\nu \not\subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}$ wegen $\mathfrak{a}'_\nu \not\subseteqq \mathfrak{p}_\nu$. Hiermit erhalten wir $\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1}$. Dann ist in gleicher Weise

$$\mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1} \subseteqq \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1} \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-1} \subseteqq \cdots, \qquad \lambda > \nu \geqq N.$$

Danach ist nach Hilfssatz 1 die Vereinigungsmenge $\{\cdots, \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}, \mathfrak{p}_{\nu+1}^{e_{\nu+1}-1}, \cdots, \mathfrak{p}_\lambda^{e_\lambda-1}, \cdots\}$ gleich $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$ $(\neq \mathfrak{q}^{(a)})$ und ist $(\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}) \frown \mathfrak{O}_\nu = \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}$ für alle ν $(\nu \geqq N)$.

Daraus folgt $\alpha \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1}$. Es sei t damit ein Element in $\mathfrak{a}'_\nu$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_\nu$, so wird

$$\alpha t \in \mathfrak{p}_\nu^{e_\nu-1} \mathfrak{a}'_\nu = \mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu . \quad t \notin \mathfrak{p}_\nu .$$

Nach Voraussetzung und Hilfssatz 1 ist $\mathfrak{a}_\nu : \mathfrak{p}_\nu \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$, folglich erhalten wir

$$\alpha t \in \mathfrak{a} : \mathfrak{p}, \quad t \notin \mathfrak{p}.$$

Dann ist $\alpha \in \mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q} \supseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$. Da aber nach Satz 8 entweder $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)}$ ist, muss $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{p}$ $(\neq \mathfrak{q}^{(a)})$ sein.

§ 4. Bedingungen für $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$

In diesem Paragraphen wollen wir die Bedingungen dafür untersuchen, dass $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ist. Zu diesem Zwecke werden wir zuerst die Frage beantworten, ob wir die Bedingung in ähnlicher Weise wie beim Satz 7 ausdrücken können oder nicht.

Satz 13. *Es sei* $\mathfrak{a} = \frown_\iota \mathfrak{q}_{(\iota)}^{(a)}$, $\iota \in \mathfrak{J}$, *ein von Nullideal verschiedenes Ideal und es sei* $\mathfrak{b}$ $(\neq \mathfrak{O})$ *ein Teiler von* $\mathfrak{a}$, *so erhalten wir* $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, *wenn* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$[21] *und* $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} : \mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ *für alle* $\tau \in \mathfrak{J}'$ *ist, wobei* $\mathfrak{J}'$ *eine Teilmenge von* $\mathfrak{J}$ *ist und* $\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}'$ *sämtliche Primidealteiler von* $\mathfrak{b}$ *sind.*

Aus $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ folgt $\mathfrak{b} = \frown_\tau \mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{p}_{(\tau)}^2$, $\tau \in \mathfrak{J}'$. Ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige

21). Vgl. „Nakano [5]", s. 328, Satz 6 und Zusatz. Wir erhalten nur dann $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} : \mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$, wenn $\mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{p}_{(\tau)}^2$ ist. Also ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ wie in Satz 7 unnötig.

I. P. K. von $\mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Denn, sonst gäbe es ein Element α in $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_{(\tau)}$. Wäre $\alpha\in\mathfrak{O}_\nu$, so würde, wegen $\alpha\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$

$$(\alpha\,\mathfrak{b})\frown\mathfrak{O}_\nu=\alpha\,\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}}$$

sein. Setzen wir damit $\mathfrak{b}_\nu=(\underset{\tau}{\frown}\mathfrak{p}_{(\tau)})\frown\mathfrak{O}_\nu=\underset{\tau}{\frown}(\mathfrak{p}_{(\tau)}\frown\mathfrak{O}_\nu)=\mathfrak{p}_{\tau\nu}\mathfrak{b}_\nu'$, $(\mathfrak{p}_{\tau\nu},\ \mathfrak{b}_\nu')=\mathfrak{O}_\nu$, so würde

$$\alpha\,\mathfrak{p}_{\tau\nu}\,\mathfrak{b}_\nu'\subseteqq\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}},\quad\text{d. h.}\quad\alpha\,\mathfrak{b}_\nu'\subseteqq\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}-1}$$

sein. Aus $\alpha\mathfrak{b}_\nu'\subseteqq\!\!\!\!\!/\ \mathfrak{p}_{\tau\nu}$ folgte $e_{\tau\nu}=1$ für alle ν $(\nu\geqq N)$. Also hälten wir $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}=\mathfrak{p}_{(\tau)}$. Dann würde, wegen Voraussetzung $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}:\mathfrak{p}_{(\tau)}=\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$, $\mathfrak{p}_{(\tau)}:\mathfrak{p}_{(\tau)}=\mathfrak{p}_{(\tau)}$. Das ist aber unmöglich. Deshalb muss $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ sein.

Sind $\mathfrak{p}_{(\kappa)}$, $\kappa\in\mathfrak{J}''$, wobei $\mathfrak{J}''=\mathfrak{J}-\mathfrak{J}'$ ist, die Primidealteiler von $\mathfrak{a}$, aber nicht von $\mathfrak{b}$, so ist jedes $\mathfrak{p}_{(\kappa)}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$. Denn sonst gäbe es ein Element β in $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, aber ausserhalb von $\mathfrak{p}_{(\kappa)}$. Dann hätten wir

$$\beta\,\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{p}_{(\kappa)},\quad\beta\notin\mathfrak{p}_{(\kappa)},\quad\mathfrak{b}\subseteqq\!\!\!\!\!/\ \mathfrak{p}_{(\kappa)},$$

entgegen der Definition des Primideals. Also muss $\mathfrak{p}_{(\kappa)}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ sein. Danach hat $\mathfrak{a}$ zuerst keinen Primidealteiler ausser dem von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$.

Nun bezeichnen wir die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{(\tau)}$ mit $\mathfrak{q}_{(\tau)}'$, so ist nach Satz 8 $\mathfrak{q}_{(\tau)}'=\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}:\mathfrak{p}_{(\tau)}$ oder $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$. Da aber nach Voraussetzung $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}:\mathfrak{p}_{(\tau)}=\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{q}_{(\tau)}'=\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ für alle $\tau\in\mathfrak{J}'$. Ist $\mathfrak{q}_{(\tau)}$ dann die zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, so ist, wegen $\mathfrak{a}:\mathfrak{p}_{(\tau)}\subseteqq\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ und Satz 3,

$$\mathfrak{q}_{(\tau)}'\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)},\quad\text{d. h.}\quad\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}\qquad\text{für alle }\tau\in\mathfrak{J}'.\tag{1}$$

Es sei γ umgekehrt ein Element aus $\mathfrak{q}_{(\tau)}$, so existiert ein Element s, derart, dass $\gamma s\in\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, $s\notin\mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\gamma,s\in\mathfrak{O}_\nu$ ist. Aus $\gamma s\mathfrak{b}\subseteqq\mathfrak{a}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ folgt $\gamma s\mathfrak{b}_\nu\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}\frown\mathfrak{O}_\nu=\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}}$. Setzen wir wie obig

$$\mathfrak{b}_\nu=\mathfrak{p}_{\tau\nu}\,\mathfrak{b}_\nu',\quad(\mathfrak{p}_{\tau\nu},\ \mathfrak{b}_\nu')=\mathfrak{O}_\nu,$$

so wird $\gamma s\mathfrak{p}_{\tau\nu}\mathfrak{b}_\nu'\subseteqq\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}}$, $s\,\mathfrak{b}_\nu'\subseteqq\!\!\!\!\!/\ \mathfrak{p}_{\tau\nu}$. Daraus folgt $\gamma\mathfrak{p}_{\tau\nu}\subseteqq\mathfrak{p}_{\tau\nu}^{e_{\tau\nu}}$ für alle ν $(\nu\geqq N)$. Danach erhalten wir

$$\gamma\,\mathfrak{p}_{(\tau)}\subseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}\quad\text{d. h.}\quad\gamma\in\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}:\mathfrak{p}_{(\tau)}=\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)},$$

also wird

$$\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}\supseteqq\mathfrak{q}_{(\tau)}\quad\text{für alle }\tau\in\mathfrak{J}'.\tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich zweitens

$$\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\tau)} \text{ für alle } \tau \in \mathfrak{J}'. \tag{3}$$

Drittens sei $\mathfrak{p}_{(\kappa)} \supseteqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_{(\kappa)} \not\supseteqq \mathfrak{b}$, $\kappa \in \mathfrak{J}''$, wobei $\mathfrak{J}'' = \mathfrak{J} - \mathfrak{J}'$ ist und sei $\mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}_{(\kappa)}$ die zu $\mathfrak{p}_{(\kappa)}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, so ist offenbar $\mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)} \subseteqq \mathfrak{q}_{(\kappa)}$. Umgekehrt, ist δ ein Element aus $\mathfrak{q}_{(\kappa)}$. so existiert ein Element t, derart, dass $\delta t \in \mathfrak{a}:\mathfrak{b}$, $t \notin \mathfrak{p}_{(\kappa)}$ ist. Aus $\delta t \mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)}$ und $t \notin \mathfrak{p}_{(\tau)}$, $\mathfrak{b} \not\subseteqq \mathfrak{p}_{(\tau)}$ folgt $\delta \in \mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)}$. Also erhalten wir $\mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)} \supseteqq \mathfrak{q}_{(\kappa)}$, d. h.

$$\mathfrak{q}_{(\kappa)}^{(a)} = \mathfrak{q}_{(\kappa)} \text{ für alle } \kappa \in \mathfrak{J}''. \tag{4}$$

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so haben $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}$ die ganz dieselben Primidealteiler und jeder der beiden gleiche I. P. K. haben, also muss $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ sein.

In diesem Satz 13 ist die Bedingung $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ und $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} : \mathfrak{p}_{(\tau)} = \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ für alle $\tau \in \mathfrak{J}'$ eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ist. Dann erhebt sich die Frage: Welche Bedingung ist nowendig? Um auf dieses Problem zu antworten, wollen wir vor allem zwei einfache Fälle in Betracht ziehen.

Satz 14. *Es seien $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei zu demselben $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale und es sei* $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$, *so ist* $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$ $(= \mathfrak{p}^2)$.

Zum Beweise nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}'$ nicht idempotent ist. Dann können wir n so gross wählen, dass $(\mathfrak{q}')^n \subset \mathfrak{q}$ wird.[22] Daraus ergibt sich $\mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^n = \mathfrak{O}$. Da aber $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$ ist, gilt $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = (\mathfrak{q}:\mathfrak{q}'):\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^2$ und ebenso $\mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^3$, usw. Dann erhalten wir

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}:\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^2 = \mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^3 = \cdots = \mathfrak{q}:(\mathfrak{q}')^n = \mathfrak{O}.$$

Das ist unmöglich. Also wird $\mathfrak{q}' = (\mathfrak{q}')^2$, folglich $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p} (= \mathfrak{p}^2)$.

Satz 15. *Es sei $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ und es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ und es sei $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ und es sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}^{(a)} \cap (\bigcap_\tau \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)})$, $\tau \in \mathfrak{J}$ die Darstellung von $\mathfrak{a}$ durch seine sämtlichen I. P. K., wobei $\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}$ zu $\mathfrak{p}_{(\tau)}$ gehört. Wenn $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ ist, erhalten wir $\mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{p} (= \mathfrak{p}^2)$ oder $\mathfrak{p} \supset \bigcap_\tau \mathfrak{p}_{(\tau)}$.*[23]

Aus $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a}:\mathfrak{q}^{(b)} \supseteqq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}:\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ folgt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}:\mathfrak{q}^{(b)} = (\mathfrak{q}^{(a)} \cap (\bigcap_\tau \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)})) : \mathfrak{q}^{(b)} = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \cap (\bigcap_\tau (\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}))$$
$$= (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \cap (\bigcap_\tau \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}).$$

22) „Nakano [8]", s. 282, Hilfssatz 8.
23) Dieser Satz ist eine Erweiterung von Satz 10.

Setzen wir damit $\bigcap_{\tau} \mathfrak{q}^{(a)}_{(\tau)} = \mathfrak{a}'$, so wird

$$\mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{a}' = (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \cap \mathfrak{a}' \tag{5}$$

Wenn $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{q}^{(a)}$ ist, dann ist klar, dass die Gleichung (5) gilt. Aus $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{q}^{(a)}$ ergibt sich sofort nach Satz 14 $\mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{p}$ $(= \mathfrak{p}^2)$.

Jetzt nehmen wir an, dass $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} \neq \mathfrak{q}^{(a)}$ ist. Dann wird $\mathfrak{q}^{(a)} : (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \neq \mathfrak{O}$ und gilt

$$(\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)})\, \mathfrak{a}' \subseteqq (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \cap \mathfrak{a}' = \mathfrak{q}^{(a)} \cap \mathfrak{a}' \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)},$$

also ist

$$\mathfrak{a}' \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}). \tag{6}$$

Andererseits ist nach Definition des Idealquotienten

$$\mathfrak{q}^{(b)}\, (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{q}^{(b)} \subseteqq \mathfrak{q}^{(a)} : (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \neq \mathfrak{O}.$$

Danach hat $\mathfrak{q}^{(a)} : (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)})$ keinen Primidealteiler ausser Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{q}^{(b)}$. Wegen Teilerlosigkeit von $\mathfrak{p}$, erhalten wir damit

$$\mathfrak{q}^{(a)} : (\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)}) \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{7}$$

Aus (6) and (7) ergibt sich

$$\mathfrak{a}' = \bigcap_{\tau} \mathfrak{q}^{(a)}_{(\tau)} \subset \mathfrak{p}.$$

Dann muss nach Satz 2 $\bigcap_{\tau} \mathfrak{p}_{(\tau)} \subset \mathfrak{p}$ sein.

Satz 16. *Es sei* $\mathfrak{b}$ *ein Teiler von* $\mathfrak{a}$ *und sei* $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ *und sei* $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^2$, *so existieren mindestens endlich viele nicht-idempotente zu* $\mathfrak{p}_{(t)}$ *gehörige I. P. K.* $\mathfrak{q}^{(b)}_{(t)}$, $(t = 1, 2, \ldots, n)$ *von* $\mathfrak{b}$. *Es sei* $\mathfrak{q}^{(a)}_{(t)}$ *eine zu* $\mathfrak{p}_{(t)}$ *gehörige I. P. K.* von $\mathfrak{a}$ *und stellen wir* $\mathfrak{a}$ *in der Form von* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{a}''$ *dar, wobei* $\mathfrak{a}' = \bigcap_{t=1}^{n} \mathfrak{q}^{(a)}_{(t)}$, $\mathfrak{a}'' = \bigcap_{\tau} \mathfrak{q}^{(a)}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}$ *ist und* $\mathfrak{q}^{(a)}_{(t)}$, $t = 1, 2, \ldots, n$, $\mathfrak{q}^{(a)}_{(\tau)}$, $\tau \in \mathfrak{J}$ *die sämtlichen I. P. K. von* $\mathfrak{a}$ *sind, dann ist* $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}''$.

Aus $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^2$ folgt nach Satz 5 die Existenz von mindestens endlich vielen nicht-idempotenten zu $\mathfrak{p}_{(t)}$ gehörigen I. P. K. $\mathfrak{q}^{(b)}_{(t)}$ $(t = 1. 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{b}$. Dann ist $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{a} : \bigcap_{t=1}^{n} \mathfrak{q}^{(b)}_{(t)} \subseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, daraus folgt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \bigcap_{t=1}^{n} \mathfrak{q}^{(b)}_{(t)} = \mathfrak{a} : \prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}^{(b)}_{(t)}. \tag{8}$$

Wir erhalten damit in genau derselben Weise wie beim Beweise von Satz 14

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)} = \mathfrak{a} : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^2 = \cdots = \mathfrak{a} : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m = \cdots \tag{9}$$

Andererseits können wir, wegen $\mathfrak{q}_{(t)}^{(b)} \neq (\mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^2$, m_t so gross auswählen, dass

$$(\mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^{m_t} \subset \mathfrak{q}_{(t)}^{(a)} \quad \text{für alle } t, \quad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Setzen wir damit $max(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m$, so wird,

$$(\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m \subset \prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(a)} = \mathfrak{a}',$$

also wird

$$\mathfrak{a}' : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m = \mathfrak{O}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}' \frown \mathfrak{a}'') : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m = (\mathfrak{a}' : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m) \frown ((\bigcap_{\tau} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)}) : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m)$$

$$= \frown (\mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} : (\prod_{t=1}^{n} \mathfrak{q}_{(t)}^{(b)})^m) = \bigcap_{\tau} \mathfrak{q}_{(\tau)}^{(a)} = \mathfrak{a}''.$$

Wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \frown \mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}''$ erhalten wir sofort $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}''$.

Satz 17. *Es sei* $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, *so ist entweder* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$ *oder* $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}''$, *wobei* $\mathfrak{a}'$ *und* $\mathfrak{a}''$ *wie beim Satz 16 definiert werden.*

Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primidealteiler von $\mathfrak{b}$ und ist $\mathfrak{q}^{(a)}$ bzw. $\mathfrak{q}^{(b)}$ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige I. P. K. von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, so erhalten wir in gleicher Weise wie beim Beweise von Satz 15 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b} \supseteqq \mathfrak{a} : \mathfrak{q}^{(b)} \supseteqq \mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{a} : \mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{a}$. Danach können $\mathfrak{q}^{(a)} : \mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{q}^{(a)}$ entstehen. Daraus folgt nach Satz 14 $\mathfrak{q}^{(b)} = \mathfrak{p} (= \mathfrak{p}^2)$. Wenn sämtliche I. P. K. von $\mathfrak{b}$ idempotente Primideale sind, erhalten wir nach Satz 5 $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^2$. Wenn $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}^2$ ist, so wird nach Satz 16 $\mathfrak{a}' \supset \mathfrak{a}''$, w. z. b. w.

Meinem hochverehrten Lehrer Prof. S. Mori spreche ich für seine vielfachen Anregungen zu dieser Arbeit meinem besten Dank aus.

Literatur

1. E. Stiemke; *Über unendliche algebraische Zahlkröper* (kurz *u.a.Z.*), Math. Zeit. 25 (1926), s. 9-39, zitiert mit „Stiemke“.

2. W. Krull; *Idealtheorie in u.a.Z.*, Math. Zeit. 29 (1929), s. 42-54, zitiert mit „Krull [1]“.

3. _______; *Idealtheorie in u.a.Z. (II)*, Math. Zeit. 31 (1930), s. 527-557, zitiert mit „Krull [2]“.

4. _______; *Idealtheorie*, Ergeb. d. Math. u. I. Grenzgeb., (1935), zitiert mit „Krull [3]“.

5. N. Nakano; *Über den Fundamentalsatz der Idealtheorie in u.a.Z.*, Jour. Sci. of Hiroshima

Univ. **15** (1952), s. 171-175, zitiert mit „Nakano [1]".

6. _______ ; *Idealtheorie in einem speziellen u.a.Z.*, loc. cit., **16** (1953), s. 425-439, zitiert mit „Nakano [2]".

7. _______ ; *Über idempotente Ideale in u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1953), s. 11-20, zitiert mit „Nakano [3]".

8. _______ ; *Über die kürzeste Darstellung der Ideale im u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1953), s. 21-25, zitiert mit „Nakano [4]".

9. _______ ; *Über die Einteilung von Primaridealen im u.a.Z.*, loc. cit., **17** (1954), s. 321-343, zitiert mit „Nakano [5]".

10. _______ ; *Über das Produkt von Primäridealen im u.a.Z.*, loc. cit., **18** (1954), s. 129-136, zitiert mit „Nakano [6]".

11. _______ ; *Über den Primäridealquotienten im u.a.Z.*, loc. cit., **18** (1955), s. 257-269, zitiert mit „Nakano [7]".

12. _______ ; *Idealtheorie im Stiemkeschen Körper* loc. cit., **18** (1955), s. 271-287, zitiert mit „Nakano [8]".