JOURNAL OF SCIENCE OF THE HIROSHIMA UNIVERSITY, SER. A, VOL. 21, NO. 2, JULY, 1957

Zur Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper

Von

Wolfgang KRULL in BONN

(Eingegangen am 1, Mai 1957)

In einer Reihe kürzlich erschienener Arbeiten hat Herr *N. Nakano*[1] die Idealtheorie der unendlichen algebraischen Zahlkörper weiterentwickelt ohne Benützung bewertungstheoretischer oder topologischer Methoden und mit besonderer Berücksichtigung solcher Körper $\mathfrak{K}$, bei denen für das Zerfallen der Primideale des Grundkörpers $\mathfrak{K}_0$ in den zwischen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ liegenden, über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Körpern $\mathfrak{K}_i$ spezielle Bedingungen erfüllt sind. Der NAKANOsche Ansatz hat den Vorteil, daß die Aufmerksamkeit auf einen Punkt gelenkt wird, der sich bewertungstheoretisch-topologisch charakterisieren läßt:

Ist B eine Bewertung von $\mathfrak{K}$, so liefert die durch B induzierte Bewertung B_i eines über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörpers $\mathfrak{K}_i$ eine *Approximation* von B, indem sie ein "*Intervall*" $\mathfrak{i}_i$ festlegt, in das alle und nur die Bewertungen B_σ von $\mathfrak{K}$ hineinfallen, die die gleiche Bewertung B_i von $\mathfrak{K}_i$ induzieren wie B.[2] Gleichzeitig liefert B_i auch eine Approximation der Wertgruppe Γ von B. Denn es wird Γ gleich der Vereinigungsgruppe der Wertgruppen Γ_i der Bewertungen B_i, wenn $\mathfrak{K}_i$ alle über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörper durchläuft. Dabei ist zwar der "*Raum*" aller Bewertungen B von *gleichmäßiger Struktur* im Sinne von *Bourbaki*, wenn man ihn mit Hilfe der Umgebungen $\mathfrak{i}_i$ der B topologisiert. Aber für die Approximation der Wertgruppen Γ durch ihre Untergruppen Γ_i gilt i.a. keinerlei Gleichmäßigkeitsaussage. Es kann z.B. vorkommen, daß für jeden Körper $\mathfrak{K}_i$ in der Umgebung $\mathfrak{i}_i$ von B Bewertungen B_σ auftreten, bei denen die Approximationsuntergruppe Γ_{σ_i} der Wertgruppe Γ_σ von B_σ von der Approximationsuntergruppe Γ_i der Wertgruppe Γ von B verschieden ist, obwohl $\Gamma=\Gamma_\sigma$. Man muß also beim Studium jedes Intervalls $\mathfrak{i}_i$ stets die Struktur der Menge aller Γ_{σ_i} berücksichtigen, und es liegt daher nahe, zu fragen, welche Vereinfachungen eintreten, wenn man passende Gleichmäßigkeitsaxiome für die Approximation der Γ_σ durcn die Γ_{σ_i} vorschreibt.

In diesen Gedankenkreis gehört nun eine von Herrn NAKANO formulierte Forderung,[3] die hier kurz als *NAKANOsche Bedingung* bezeichnet werden soll, und zu der man rein idealtheoretisch folgendermaßen kommt: Man betrachtet statt der Bewertungen B von $\mathfrak{K}$ die ihnen umkehrbar eindeutig entsprechenden Primideale $\mathfrak{p}$ aus der Hauptordnung $\mathfrak{H}$ aller ganzen Zahlen von $\mathfrak{K}$. Zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{H}$ mit dem Primoberideal $\mathfrak{p}$ bildet man das zu $\mathfrak{p}$ gehörige i.K.I. (isolierte Komponentenideal) $\mathfrak{q}(\mathfrak{a})$ und für jeden über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörper $\mathfrak{K}_i$ in der Hauptordnung $\mathfrak{H}_i=\mathfrak{H}\frown\mathfrak{K}_i$ die Durchschnittsideale $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}\frown\mathfrak{K}_i$, $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}\frown\mathfrak{K}_i$, $\tilde{\mathfrak{q}}_i(\mathfrak{a})=\mathfrak{q}(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{K}_i$ sowie das zu $\mathfrak{p}_i$ gehörige i.K.I. $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{a}_i)$ von $\mathfrak{a}_i$. Dann ist $\mathfrak{q}_i(\mathfrak{a}_i)=\mathfrak{p}_i^{r_i}, \tilde{\mathfrak{q}}_i(\mathfrak{a})=\mathfrak{p}_i^{\tilde{r}_i}$ mit $r_i\geq\tilde{r}_i>0$, und es läßt sich die NAKANOsche Bedingung so formulieren:

Es soll zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{H}$ einen-evtl. von $\mathfrak{a}$ abhängigen-Körper $\mathfrak{K}_{i_0}$ geben, derart daß für jedes $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ und jeden Körper $\mathfrak{K}_i\supseteq\mathfrak{K}_{i_0}$ stets $r_i=\tilde{r}_i$ wird. Diese Bedingung ist, wie eine nähere Analyse zeigt, eine Gleichmäßigkeitsbedingung im Sinne unserer bewertungstheoretischen Ausführungen, wegen des Passus "für jedes $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$". Ferner hat die Bedingung *globalen Charakter*, weil ihre Gültigkeit *für alle* $\mathfrak{a}$ gefordert wird.—Im Folgenden wird die Tragweite der NAKANOschen Bedingung näher untersucht. Es zeigt sich in §3, daß ihr nur die schon von STIEMKE betrachteten Körper[4] genügen, bei denen jedes Ideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Primoberideale hat. *Die NAKANOsche Bedingung führt also zu einer neuen Charakterisierung der STIEMKEschen Körper.*—Will man über den Rahmen dieser Körper hinauskommen, so liegt es nahe, den globalen Standpunkt aufzugeben, und in einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$ alle die *NAKANOschen Ideale* zu studieren, für die die Gleichmäßigkeitsbedingung NAKANOs erfüllt ist. Einige Untersuchungen in dieser Richtung bringt §4. Es zeigt sich, daß es nicht leicht sein dürfte, hier zu abschließenden Ergebnissen zu gelangen. Voll und einfach beantworten läßt sich dagegen die wesentlich speziellere aber für unsere Betrachtungen grundlegende Frage: Unter welchen Bedingungen gibt es zu einem *festen* Primoberideal $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ einen Körper $\mathfrak{K}_{i_0}$ derart daß stets $r_i=\tilde{r}_i$ für alle $\mathfrak{K}_i\supseteq\mathfrak{K}_{i_0}$? (§2).

Um zu einer knappen Darstellung zu kommen, war es notwendig, die Untersuchungen bewertungstheoretisch und nicht rein idealtheoretisch durchzuführen. (Kurze Zusammenstellung der Grundbegriffe in §1). Die Betrachtungen lassen sich natürlich sinngemäß unmittelbar auf den Fall übertragen, daß $\mathfrak{K}$ aus einem Grundkörper $\mathfrak{K}_0$ durch Adjunktion von abzählbar unendlich vielen, über $\mathfrak{K}_0$ algebraischen Elementen entsteht, der seinerseits der Quotientenkörper eines *Dedekind*schen Rings (NOETHERschen "Fünf-Axiome-Rings") $\mathfrak{H}_0$ ist. Auch die Abzählbarkeitsvoraussetzung ist an sich nicht wesentlich. Sie hat aber den Vorteil, daß wir anstelle der Menge aller über $\mathfrak{K}_0$ endlichen Zwischenkörper $\mathfrak{K}_i$ nur eine feste erzeugende Körperkette $\mathfrak{K}_0\subset\mathfrak{K}_1\subset\cdots$ zu behandeln brauchen. Ohne die Abzählbarkeitsannahme wären teilweise verhältnismäßig umständliche Beweismodifikationen nötig.

§1 Definitionen

Es sei $\mathfrak{K}_i$ $(i=0,1,2,\cdots)$ eine unendliche Folge von endlichen algebraischen Zahlkörpern, wobei $\mathfrak{K}_0$ der Körper der rationalen Zahlen und $\mathfrak{K}_{i+1}$ stets ein *echter* Oberkörper von $\mathfrak{K}_i$ sein möge; $\mathfrak{K}$ sei der Vereinigungskörper aller $\mathfrak{K}_i$.

Ein "Ideal" aus $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{K}_i$ ist stets ein nicht notwendig ganzes, vom Nullideal verschiedenes Ideal hinsichtlich des Ringes der ganzen algebraischen Zahlen von $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{K}_i$). Zur Indizierung verschiedener Ideale aus dem gleichen Körper verwenden wir griechische Buchstaben. Dagegen soll der Index i stets darauf hinweisen, daß ein Ideal aus $\mathfrak{K}_i$ betrachtet wird. Speziell bedeutet $\mathfrak{p}_\sigma$ stets ein Primideal aus $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ das Primideal $\mathfrak{p}_\sigma \frown \mathfrak{K}_i$. In entsprechender Weise setzen wir $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \frown \mathfrak{K}_i$, wenn ein festes Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}$ untersucht wird. Die dem Primideal $\mathfrak{p}_\sigma$ aus $\mathfrak{K}$ zugeordneten Verzweigungsexponenten $e_{\sigma i}$ ($i=0,1,\cdots$) sind die Exponenten, mit denen in üblicher Ausdrucksweise jeweils das Primideal $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ im Erweiterungsideal $\mathfrak{p}_{\sigma 0}\cdot\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{p}_{\sigma 0}$ auf $\mathfrak{K}_i$ aufgeht.[5] Man beachte, daß stets $e_{\sigma 0}=1$ und $e_{\sigma i+1}$ ein Vielfaches von $e_{\sigma i}$. Bei einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ setzen wir $r_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ gleich dem Exponenten, mit dem $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ in $\mathfrak{a}_i$ aufgeht ($r_{\sigma i}(\mathfrak{a}) \gtreqless 0$) und $B_{\sigma i}(\mathfrak{a}) = r_{\sigma i}(\mathfrak{a})\cdot e_{\sigma i}^{-1}$. Ist spezielle $\mathfrak{a}=(a)$ ein Hauptideal, so ist $B_{\sigma i}(\mathfrak{a}) = B_\sigma(a)$ konstant für alle i, die so groß gewählt sind, daß $a \in \mathfrak{K}_i$, und es ist $B_\sigma(a)$ allein von a, nicht von der $\mathfrak{K}$ erzeugenden Körperkette $\mathfrak{K}_i$ abhängig. Die Zuordnung $a \to B_\sigma(a)$ definiert die dem Primideal $\mathfrak{p}_\sigma$ umkehrbar eindeutig zugeordnete *Bewertung* B_σ des Körpers $\mathfrak{K}$.[6] —Bei einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ hat jedenfalls die Menge der Werte $B_\sigma(a)$ mit $a \in \mathfrak{a}$ eine endliche untere Grenze ρ. Wir setzen $B_\sigma(\mathfrak{a}) = \rho$ bzw. $B_\sigma(\mathfrak{a}) = \rho_+$ je nachdem ob in $\mathfrak{a}$ ein a mit $B_\sigma(a) = \rho$ existiert oder nicht.[7] Für die reelle Zahl ρ_1 soll $\rho_1 > \rho_+$ bzw. $\rho_1 < \rho_+$ gesetzt werden, je nachdem ob $\rho_1 > \rho$ oder $\rho_1 \leq \rho$. Mit $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ bezeichnen wir die kleinste rationale Zahl r_i, die sich in der Form $r_i = n_i \cdot e_{\sigma i}^{-1}$ mit ganzem n_i darstellen läßt, und die dabei der Bedingung $r_i \geq B_\sigma(\mathfrak{a})$ genügt. Offenbar ist stets $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a}) \geq \widetilde{B}_{\sigma i+1}(\mathfrak{a})$. Vor allem aber gilt

$$\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a}) \leq B_{\sigma i}(\mathfrak{a}).$$

Denn aus der Idealtheorie der endlichen algebraischen Zahlkörper folgt: Es gibt in $\mathfrak{a}_i$ sicher a_i, derart daß das Ideal $(a_i)\cdot\mathfrak{K}_i$ durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ teilbar ist als durch die $r_{\sigma i}(\mathfrak{a})$-te.[8] Es ist also wegen $a_i \in \mathfrak{a}$ sicher $B_{\sigma i}(\mathfrak{a}) = r_{\sigma i}(\mathfrak{a})\cdot e_{\sigma i}^{-1} \geq B_\sigma(\mathfrak{a})$.—Andererseits strebt, wie unmittelbar aus den einschlägigen Definitionen zu sehen, die Folge der $B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ monoton (wenn auch nicht notwendig echt monoton) abnehmend gegen $B_\sigma(\mathfrak{a})$, und das gleiche muß daher auch für die Folge der $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ gelten. Unsere nächste Frage lautet nun: Unter welchen Bedingungen existiert ein i_0, derart daß $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a}) = B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ für $i \geq i_0$?—

Bei ihrer Behandlung sagen wir der üblichen Terminologie entsprechend, daß zwei Primideale $\mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}_\tau$ bzw. die zugehörigen Bewertungen B_σ, B_τ in dem gleichen *i-Intervall* $\mathfrak{i}_{\sigma i} = \mathfrak{i}_{\tau i}$ liegen, wenn $\mathfrak{p}_{\sigma i} = \mathfrak{p}_{\tau i}$.[2] Das Primideal $\mathfrak{p}_\sigma$ bzw. die Bewertung B_σ wird *isoliert* genannt, wenn $\mathfrak{i}_{\sigma i}$ für $i \geq i_0$ nur aus $\mathfrak{p}_\sigma$ bzw. B_σ besteht. *Diskret* heißt die Bewertung B_σ wie üblich, wenn die Menge der Werte $B_\sigma(a)$ eine diskrete Untermenge der Menge aller reellen Zahlen bildet. Offenbar ist B_σ dann und nur dann diskret, wenn $e_{\sigma i_0} = e_{\sigma i_0+1} = e_{\sigma i_0+2} = \cdots$ für hinreichend großes i_0.

§2 Die Zahlen $B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ und $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$

Wir zeichnen eine feste Bewertung $B_{\sigma_0}=B$ aus, bei der wir den Index σ_0 unterdrücken, also $\mathfrak{i}_i$ statt $\mathfrak{i}_{\sigma_0 i}$ usw. schreiben. Es werden folgende, leicht aus den allgemeinen Existenzsätzen der Idealtheorie unendlicher algebraischer Zahlkörper ableitbare *Hilfssätze* benutzt:[9] 1. Ist $B_\sigma(a)\geq B_\sigma(\mathfrak{a})$ für alle B_σ, so ist $a\in\mathfrak{a}$.—2. Ist $r=n\cdot e_i^{-1}$ mit ganzzahligen n, so gibt es stets ein $a_i\in\mathfrak{K}_i$ mit $B(a_i)=B_i((a_i))=r$ und $B_\sigma(a_i)\geq B_\sigma(\mathfrak{a})$ für jedes nicht zu $\mathfrak{i}_i$ gehörige B_σ.—3. Es sei $B_{\tau_i}\in\mathfrak{i}_i$, $B_{\tau_i}\notin\mathfrak{i}_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots)$ und es seien ρ_i $(i=1,2,\cdots)$ positive rationale Zahlen mit $\overline{\lim}_i\,\rho_i\leq 1$, wobei für jedes i ein a_i mit $B_{\tau_i}(a_i)=r_i$ existiert. Dann gibt es bei nicht diskretem B stets ein eindeutig bestimmtes Ideal $\mathfrak{a}$, bei dem: α) $B_{\tau_i}(\mathfrak{a})=r_i$ $(i=1,2,\cdots)$; β) $B_\sigma(\mathfrak{a})=0$ $(B_\sigma\neq B,\ \neq B_{\tau_i}$ $(i=1,2,\cdots))$; γ) $B(\mathfrak{a})=1_+$.—*Zusatz*: Ist $r_i\leq 1$ für $i\geq i_0$, so gibt es bei beliebigem B immer ein $\mathfrak{a}'$, für das α), β) gilt und außerdem: γ') $B(\mathfrak{a})$ genzzahlig ≥ 1. (Der Zusatz wird erst in §3 benützt.)

Satz 1: *Es ist* $B_i(\mathfrak{a})=\max(\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a}))$, *falls* B_τ *alle Bewertungen aus* $\mathfrak{i}_i$ *durchläuft.*

Beweis: Aus den einschlägigen Definitionen folgt $e_{\tau i}=e_i$, $B_{\tau i}(\mathfrak{a})=B_i(\mathfrak{a})$ für alle $B_\tau\in\mathfrak{i}_i$. Wegen $B_{\tau i}(\mathfrak{a})\geq\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a})$ ist daher sicher $B_i(\mathfrak{a})\geq\max(\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a}))$. Ferner ist $\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a})$ endlich und von der Form $n\cdot e_i^{-1}$. Es gibt also jedenfalls ein $a_i\in\mathfrak{K}_i$ mit $B(a_i)=\max(\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a}))$ und $B_\sigma(a_i)\geq B_\sigma(\mathfrak{a})$ für $B_\sigma\notin\mathfrak{i}_i$ (Hilfssatz 2). Nach Hilfssatz 1 gehört a_i zu $\mathfrak{a}$, es ist also $B(a_i)=\max(\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a}))=B_i((a_i))\geq B_i(\mathfrak{a})$.

Satz 2: *Es ist sicher* $\widetilde{B}_i(\mathfrak{a})=B_i(\mathfrak{a})$ *für* $i\geq i_0$: α) *wenn* B *isoliert*; β) *wenn* $B(\mathfrak{a})=\rho$.

Beweis: α) folgt sofort aus Satz 1. Man wähle $\mathfrak{i}_0$ so groß, daß B die einzige Bewertung in $\mathfrak{i}_{i_0}$.—Im Falle β) gibt es nach Definition ein $a\in\mathfrak{a}$ mit $B(a)=\rho$. Für $a\in\mathfrak{K}_{i_0}$ und $i\geq i_0$ ist $\rho=B(a)=B_i((a))\geq B_i(\mathfrak{a})\geq\widetilde{B}_i(\mathfrak{a})\geq\rho$.—Man beachte, daß Fall β) immer vorliegt, wenn B *diskret* ist. Es bleibt also nur noch die Möglichkeit zu untersuchen, daß B gleichzeitig nicht isoliert und nicht diskret ist.

Satz 3: *Ist B nicht isoliert und nicht diskret, so gibt es stets Ideale* $\mathfrak{a}$, *bei denen* $\widetilde{B}_i(\mathfrak{a})>B_i(\mathfrak{a})$ *für alle* i.

In unserem Falle kann man durch passende Wahl der Körperkette $\mathfrak{K}_i$ erreichen, daß in jedem Intervall $\mathfrak{i}_i$ eine nicht zu $\mathfrak{i}_{i+1}$ gehörige Bewertung B_{τ_i} existiert; Außerdem ist sicher $\lim_{i\to\infty}e_i=0$. Bilden wir nun im Sinne von Hilfssatz 2 das Ideal $\mathfrak{a}$ mit $r_i=1+2\cdot e_i^{-1}\,(i=1,2,\cdots)$. Für $\mathfrak{a}$ ist $B_i(\mathfrak{a})=1+2\cdot e_i^{-1}$ $(i=1,2,\cdots)$, während nach §1 sicher $\widetilde{B}_i(\mathfrak{a})=1+e_i^{-1}<B_i(\mathfrak{a})$ wird.—Bilden wir nach dem gleichen Schema wie eben, nur mit $r_i=1+e_i^{-1}$ statt $r_i=1+2\cdot e_i^{-1}$ das Ideal $\mathfrak{a}'$, so wird $B_i(\mathfrak{a}')=\widetilde{B}_i(\mathfrak{a}')$ für alle i, obwohl $B_{\tau_i}(\mathfrak{a}')>B(\mathfrak{a}')$ $(i=1,2,\cdots)$. D.h. also:

Satz 4: Es gibt bei nicht isoliertem und nicht diskretem B stets Ideale $\mathfrak{a}'$ für die $B_i(\mathfrak{a}')=\tilde{B}_i(\mathfrak{a}')$ für alle $\mathfrak{i}_i$, obwohl in jedem Intervall $\mathfrak{i}_i$ eine Bewertung B_{τ_i} mit $B_{\tau_i}(\mathfrak{a}')>B(\mathfrak{a}')$ liegt.

Satz 3 und Satz 4 zusammen zeigen, daß bei einer gleichzeitig nicht diskreten und nicht isolierten Bewertung B kaum irgendwelche einfache Sätze über Beziehungen zwischen $B(\mathfrak{a})$ und $\tilde{B}(\mathfrak{a})$ zu erwarten sind.—Wir setzen daher in folgendem Paragraphen stets voraus, daß es *in $\mathfrak{K}$ höchstens isolierte, nicht diskrete Bewertungen B* gibt.

§ 3 Ganze Ideale. Die Bedingung von Nakano

Ist $\mathfrak{a}_i$ ein ganzes (also nur aus ganzen Zahlen bestehendes) Ideal des Körpers $\mathfrak{K}_i$, so ist das zu einem Primoberideal $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ von $\mathfrak{a}_i$ gehörige *isolierte Komponentenideal* (*kurz i.K.I.*) $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)$ von $\mathfrak{a}_i$ gleich der Potenz $\mathfrak{p}_{\sigma i}^{r_{\sigma i}}$ von $\mathfrak{p}_{\sigma i}$, die bei der Faktorzerlegung von $\mathfrak{a}_i$ in Potenzen verschiedener Primideale Auftritt ($r_{\sigma i}>0$). Ist $\mathfrak{a}_i$ kein Unterideal von $\mathfrak{p}_{\sigma i}$, so definiert man, das i.K.I. $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)$ zweckmäßig durch $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)=\mathfrak{p}_{\sigma i}^0=\mathfrak{o}_i$ ($\mathfrak{o}_i$ Einheitsideal aus $\mathfrak{K}_i$). Die $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ mit $r_{\sigma i}>0$ sollen durch das Beiwort *eigentlich* von dem übrigen ausgezeichnet werden.—Bei einem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}$ (das auch durch $B_\sigma(\mathfrak{a})\geq 0$ für alle B_σ charakterisiert werden kann) definiert man das zu $\mathfrak{p}_\sigma$ gehörige i.K.I. $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ zweckmäßig als das eindeutig bestimmte Ideal $\mathfrak{q}_\sigma$, das den Bedingungen $B_\sigma(\mathfrak{q}_\sigma)=B_\sigma(\mathfrak{a})$, $B_\tau(\mathfrak{q}_\sigma)=0$ ($B_\tau\neq B_\sigma$) genügt. Die *eigentlichen* i.K.I. von $\mathfrak{a}$, bei denen $B_\sigma(\mathfrak{a})>0$, sind dann die i.K.I. in gewöhnlichem Sinne,[10] während für $B_\sigma(\mathfrak{a})=0$ stets $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ gleich dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{K}$ wird. Aus der Definition der Zahlen $B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$, $\tilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$, sowie aus Hilfssatz 2 von §2 folgt nun mühelos:

Satz 1: Ist $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von $\mathfrak{K}$, so ist das zu $\mathfrak{p}_{\sigma i}$ gehörige i.K.I. $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)$ von $\mathfrak{a}_i$ gleich $\mathfrak{p}_{\sigma i}^{r_{\sigma i}}$ mit $r_{\sigma i}=e_{\sigma i}\cdot B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$, während $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{K}_i=\mathfrak{p}_{\sigma i}^{\tilde{r}_{\sigma i}}$ mit $\tilde{r}_{\sigma i}=e_{\sigma i}\cdot\tilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ wird.

Korollar: Es ist (bei ganzen $\mathfrak{a}$) dann und nur dann $\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)=\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{K}_i$, wenn $B_{\sigma i}(\mathfrak{a})=\tilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$.

Wir definieren nun für beliebiges $\mathfrak{a}$ und eine beliebige Bewertung B_σ die Schranke $S_\sigma(\mathfrak{a})$ als die kleinste ganze Zahl i_0, derart daß $B_{\sigma i}(\mathfrak{a})=\tilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ für alle $i\geq i_0$. (Da wir nicht diskrete, nicht isolierte Bewertungen ausgeschlossen haben existiert $S_\sigma(\mathfrak{a})$ für alle $\mathfrak{a}$ und alle σ nach §2.) Ferner sei $M(\mathfrak{a})$ das Maximum aller $S_\sigma(\mathfrak{a})$, wobei auch die Möglichkeit $M(\mathfrak{a})=\infty$ zugelassen wird. Bei einem *ganzen* Ideal $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ bedeute in entsprechender Weise $M^*(\mathfrak{a})$ das Maximum aller der $S_\sigma(\mathfrak{a})$, bei denen zu $\mathfrak{p}_\sigma$ ein *eigentliches* i.K.I. $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ gehört.[11] Nach Satz 1 bedeutet dann $M^*(\mathfrak{a})=i_0\neq\infty$ so viel wie: Für jedes eigentliche i.K.I. $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ und alle $i\geq i_0$ wird stets $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{K}_i=\mathfrak{q}_{\sigma i}(\mathfrak{a}_i)$. Der Körper $\mathfrak{K}$ soll nun als *Nakanoscher Körper* bezeichnet werden, wenn $M^*(\mathfrak{a})\neq\infty$ für jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$.

Satz 2: $\mathfrak{K}$ ist dann und nur dann ein Nakanoscher Körper, wenn alle B_σ isoliert sind. Bei einem Nakanoschen Körper ist sogar $M(\mathfrak{a})\neq\infty$ für jedes beliebige Ideal $\mathfrak{a}$.

Beweis: a) Es sei die Bewertung B_{σ_0}, bei der wir wie in §2 den Index σ_0 unterdrücken wollen, *nicht* isoliert. Dann gibt es bei passender Wahl der Körperkette $\mathfrak{K}_i$ eine Bewertungsfolge B_{τ_i} $(i=1,2,\cdots)$ derart daß $B_{\tau_i}\in\mathfrak{i}_i$, $B_{\tau_i}\notin\mathfrak{i}_{i+1}$. Wir betrachten jetzt, das durch die Bedingungen $B_{\tau_i}(\mathfrak{a})=1$ $(i=1,2,\cdots)$; $B_\sigma(\mathfrak{a})=0$ $(B_\sigma\neq B,\ \neq B_{\tau i}\ (i=1,2,\cdots))$; $B(\mathfrak{a})=2$ eindeutig bestimmte ganze Ideal $\mathfrak{a}$,—vgl. §2, Zusatz zu Hilfssatz 3. Hier ist nach Satz 1 von §2 für $i_0=1,2,\cdots$ stets $B_{\tau_{i_0}i}(\mathfrak{a})=2$ $(i=1,\cdots,i_0)$, $B_{\tau_{i_0}i}(\mathfrak{a})=1$ $(i>i_0)$, während $\tilde{B}_{\tau_{i_0}i}(\mathfrak{a})=1$ wird für alle i. Wir haben also $S_{\tau_{i_0}}(\mathfrak{a})=i_0+1$ $(i_0=1,2,\cdots)$, woraus sofort $M^*=\infty$ folgt.—Gibt es also nicht isolierte B, so ist $\mathfrak{K}$ kein Nakanoscher Körper. b) Sind alle B_σ isoliert, so gibt es nach einem bekannten Satz zu jedem Ideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Bewertungen $B_{\sigma_1},\cdots,B_{\sigma_n}$, derart daß $B_{\sigma_k}(\mathfrak{a})\neq 0$.[12] Für jedes σ_k existiert i_k, derart daß B_{σ_k} die einzige Bewertung in $\mathfrak{i}_{\sigma_k i}$ für $i\geq i_k$. Wir haben dann $\tilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})=B_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ für alle $i\geq\max(i_1,\cdots,i_n)$, also $M(\mathfrak{a})\leq\max(i_1,\cdots,i_n)\neq\infty$.

Satz 2 zeigt, daß die Nakanosche Bedingung auf die ausgezeichnete Körperklasse zurückführt, die schon von STIEMKE in seiner grundlegenden Arbeit besonders ins Auge gefaßt wurde, so daß wir auch von Nakano-Stiemkeschen Körpern reden können.

Es ist bemerkenswert, daß auch eine formell ganz andere Forderung sofort auf den Nakano-Stiemkeschen Fall zurückführt. Jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{K}$ ist Durchschnitt seiner sämtlichen eigentlichen i.K.I. Wir wollen nun das eigentliche i.K.I. $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ *entbehrlich* nennen, wenn $\mathfrak{a}$ gleich den Durchschnitt aller von $\mathfrak{q}_\sigma(\mathfrak{a})$ verschiedenen eigentlichen i.K.I. wird.

Satz 3: Es gibt dann und nur dann bei keinem ganzen Ideal $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{K}$ ein entbehrliches i.K.I. wenn $\mathfrak{K}$ ein Nakano-Stiemkescher Körper ist.

Beweis: a) Sind alle Bewertungen B_σ isoliert, so hat jedes ganze Ideal nur endlich viele eigentliche i.K.I.. In diesem endlichen Falle ist aber, wie wohl bekannt, niemals ein i.K.I. entbehrlich. b) Gibt es eine nichtisolierte Bewertung B, so seien die B_{τ_i} in genau der gleichen Weise eingeführt wie bei Satz 2 und es sei $\mathfrak{a}$ analog definiert wie damals, nur daß die Bedingung $B(\mathfrak{a})=2$ durch die Bedingung $B(\mathfrak{a})=1$ ersetzt sei. Dann ist bei $\mathfrak{a}$ das zu B gehörige i.K.I. $\mathfrak{q}(\mathfrak{a})$ entbehrlich. Denn für Durchschnitt $\mathfrak{q}_{\tau_1}(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{q}_{\tau_2}(\mathfrak{a})\frown\mathfrak{q}_{\tau_3}(\mathfrak{a})\frown\cdots=\mathfrak{a}'$ muß nicht nur $B_{\tau_i}(\mathfrak{a}')=1$ werden $(i=1,2,\cdots)$, es muß auch nach den für $B_\sigma(\mathfrak{a})$ geltenden Stetigkeitssätzen $B(\mathfrak{a}')\geq 1$ und damit $B(\mathfrak{a}')=1$ sein, weil in jedem Intervall $\mathfrak{i}_i$ eine Bewertung B_{τ_i} mit $B_{\tau_i}(\mathfrak{a}')=1$ liegt. Wir haben also $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$.

§4 Nakanosche Ideale

Will man über den Bereich der Nakano-Stiemkeschen Körper hinaus den zur Nakanoschen Bedingung führenden Grundgedanken nutzbar machen, so liegt der Gedanke nahe, in einem beliebigen Körper $\mathfrak{K}$ eine Charakterisierung derjenigen Ideale zu versuchen, bei denen $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$, bzw. derjenigen ganzen Ideale, bei denen $M(\mathfrak{a}) \neq \infty$. Offenbar ist (bei ganzen Idealen) stets $M^*(\mathfrak{a}) \leq M(\mathfrak{a})$ und die Bedingung $M(\mathfrak{a}) \neq \infty$ ist daher schärfer als die Bedingung $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$. Wir befassen uns zunächst mit der schärferen Forderung.

Satz 1: Ist $\mathfrak{a}$ *endlich,* $\mathfrak{a}=(a_1, \cdots, a_n)$, *so ist stets* $M(\mathfrak{a}) < \infty$.

Man sieht nämlich mühelos: Es sei i_0 so groß gewählt, daß $a_k \in \mathfrak{K}_{i_0}$ $(k=1, \cdots, n)$. Dann ist $B_\sigma(\mathfrak{a}) = B_{\sigma i}(\mathfrak{a}) = B_{\sigma i_0}(\mathfrak{a})$ für jede Bewertung B_σ aus $\mathfrak{i}_{\sigma i_0}$, falls $i \geq i_0$. Angesichts von Satz 1 von § 2 ist daher $M(\mathfrak{a}) \leq i_0$. Es liegt nun der Gedanke nahe zu untersuchen, ob etwa unter gewissen Bedingungen *nur* die endlichen Ideale von $\mathfrak{K}$ der Bedingung $M(\mathfrak{a}) < \infty$ genügen. Man sieht sofort, daß man sich bei der Diskussion dieses Ausschließlichkeitssatzes am besten zunächst auf den Fall beschränkt, daß *alle Bewertungen* B_σ *von* $\mathfrak{K}$ *diskret sind.* Denn bei einer nicht diskreten, isolierten Bewertung B_σ ist das ganzzahlige Primideal $\mathfrak{p}_\sigma$ sicher nicht endlich. Andererseits wird $M(\mathfrak{p}_\sigma) = \mathfrak{i}_0$, falls i_0 das kleinste i ist mit der Eigenschaft, daß außer B_σ keine Bewertung in $\mathfrak{i}_{\sigma i}$ liegt.

Satz 2: Die endlichen Ideale sind die einzigen Ideale $\mathfrak{a}$ *mit* $M(\mathfrak{a}) < \infty$, *wenn alle* B_σ *diskret sind, und wenn außerdem die folgende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder Bewertung* B_σ *gibt es ein Intervall* $\mathfrak{i}_{\sigma i_\sigma}$, *derart daß für alle* $B_\tau \in \mathfrak{i}_{\sigma i_\sigma}$ *und alle* $i \geq i_\sigma$ *stets* $e_{\tau i} = e_{\sigma i_\sigma}$.

Die Zusatzbedingung läßt sich auch so formulieren: Für jedes $B_\tau \in \mathfrak{i}_{\sigma i_\sigma}$ und jedes $a \in \mathfrak{K}$ muß $B_\tau(a)$ die Gestalt $n \cdot e_{\sigma i_\sigma}^{-1}$ mit ganzzahligem n haben. Daraus folgt sofort weiter: Für jedes $B_\tau \in \mathfrak{i}_{\sigma i_\sigma}$ und jedes Ideal $\mathfrak{a}$ ist $B_\tau(\mathfrak{a}) = n \cdot e_{\sigma i_\sigma}^{-1}$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ und $\widetilde{B}_{\tau i}(\mathfrak{a}) = B_\tau(\mathfrak{a})$ für hinreichend großes i.[13)]—Wir zeigen nun zunächst: Gibt es bei einem bestimmten $\mathfrak{a}$ und einer bestimmten Bewertung B_σ kein Intervall $\mathfrak{i}_{\sigma i'_\sigma}$, derart daß $B_\tau(\mathfrak{a}) = B_\sigma(\mathfrak{a})$ für alle $B_\tau \in \mathfrak{i}_{\sigma i'_\sigma}$, so ist $M(\mathfrak{a}) = \infty$.—Unter unserer Annahme existiert nämlich jedenfalls eine Folge von Bewertungen $B_{\tau_{i_1}}, B_{\tau_{i_2}}, \cdots$ mit $i'_\sigma < i_1 < i_2 < \cdots$ und $B_{\tau_{i_k}} \in \mathfrak{i}_{\sigma i_k}$, derart daß $B_{\tau_{i_k}}(\mathfrak{a}) \neq B_\sigma(\mathfrak{a})$ $(k=1,2, \cdots)$. Da ferner nach einem bekannten Satz $B_\sigma(\mathfrak{a}) \geq \overline{\lim}\, B_{\tau_{i_k}}(\mathfrak{a})$ sein muß, ist in unserem Fall sogar $B_{\tau_{i_k}}(\mathfrak{a}) < 1$ für $k \geq k_0$. Dann aber haben wir für $k \geq k_0$: $B_{\tau i_k}(\mathfrak{a}) = B_{\sigma i_k}(\mathfrak{a}) \geq B_\sigma(\mathfrak{a}) = 1 > B_{\tau_{i_k}}(\mathfrak{a}) = \widetilde{B}_{\tau_{i_k} i_k}(\mathfrak{a})$, und daraus folgt sofort $S_{\tau_i}(\mathfrak{a}) \geq i_k$ $(k=k_0, k_0+1, \cdots)$; $M(\mathfrak{a}) = \infty$.

Ist also $M(\mathfrak{a})$ endlich, so gibt es zu jeder Bewertung B_σ ein $\mathfrak{i}'_\sigma$, derart daß $B_\tau(\mathfrak{a})$ konstant gleich $B_\sigma(\mathfrak{a})$ auf $\mathfrak{i}_{\sigma i'_\sigma}$. Aus der Tatsache, daß sich alle B_σ mit $B_\sigma(\mathfrak{a}) \neq 0$ auf endlich viele Intervalle $\mathfrak{i}_{\sigma 0}$ verteilen, und aus der wohlbekannten Bemerkung, daß in dem mit Hilfe der Intervalle $\mathfrak{i}_{\sigma i}$ topologisierten "Raum" der Bewertungen B_σ für jedes Intervall $\mathfrak{i}_{\sigma 0}$ der Borelsche Überdeckungssatz gilt,[12)] folgt nun in geläufiger Weise weiter: Zu $\mathfrak{a}$ existiert ein Index i'_0, derart daß $B_\sigma(\mathfrak{a})$ konstant ist auf jedem Intervall $\mathfrak{i}_{\sigma i'_0}$. Dabei ist nur für endlich viele Intervalle $\mathfrak{i}_{\sigma_1 i'_0}, \cdots, \mathfrak{i}_{\sigma_m i'_0}$ der feste Wert von $B_\sigma(\mathfrak{a})$ auf $\mathfrak{i}_{\sigma i'_0}$ von 0 verschieden. Wählen wir $i_0 \geq i'_0$ so, daß alle Werte $B_{\sigma_k}(\mathfrak{a})$ die Gestalt $n \cdot e_{\sigma i_0}^{-1}$

haben, so wird $B_\sigma(\mathfrak{a})=B_{\sigma i_0}(\mathfrak{a})=\widetilde{B}_{\sigma i_0}(\mathfrak{a})$ für jede Bewertung B_σ, und daraus ergibt sich $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{i_0}\cdot\mathfrak{K}$. (Man beachte, daß bei den unendlichen algebraischen Zahlkörpern jedes $\mathfrak{a}$ durch die Menge aller Werte $B_\sigma(\mathfrak{a})$ eindeutig bestimmt.) Da nun in dem endlichen Zahlkörper $\mathfrak{K}_{i_0}$ alle Ideale endlich sind, ist auch $\mathfrak{a}$ endlich.

Mit Hilfe des beim Beweise von Satz 2 benutzten Borelschen Überdeckungssatzes zeigt man noch mühelos: Die Zusatzbedingung von Satz 2 ist gleichwertig mit der Forderung: Zu jedem Intervall $\mathfrak{i}_{\sigma_0}$ existiert ein Index i_0, derart daß $e_{\tau i}=e_{\sigma i_0}$ für alle $B_\tau\in\mathfrak{i}_{\sigma 0}$ und alle $i\geq i_0$.—Idealtheoretisch läßt sich diese Forderung so aussprechen: Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}_{\sigma 0}$ aus $\mathfrak{K}_0$ gibt es ein i_0, derart daß bei jedem der Bedingung $\mathfrak{p}_{\tau i_0}\frown\mathfrak{K}_0=\mathfrak{p}_{\sigma 0}$ genügenden Primideal $\mathfrak{p}_{\tau i_0}$ aus $\mathfrak{K}_{i_0}$ für jedes $i>i_0$ das Erweiterungsideal $\mathfrak{p}_{\tau i_0}\cdot\mathfrak{K}_i$ stets Primideal bleibt oder Produkt von paarweise verschiedenen Primidealfaktoren wird.

Natürlich liegt der Gedanke nahe, die Zusatzbedingung von Satz 2 abzuschwächen. Daß das aber nicht leicht sein dürfte, zeigt:

Satz 3: Selbst wenn es zu jedem Intervall $\mathfrak{i}_{\sigma 0}$ einen Nenner N_σ gibt, derart daß bei jeder Bewertung $B_\tau\in\mathfrak{i}_{\sigma 0}$ alle Werte $B_\tau(\mathfrak{a})$ die Gestalt $n\cdot N_\sigma^{-1}$ mit ganzzahligem n haben, können nicht endliche Ideale $\mathfrak{a}$ mit $M(\mathfrak{a})\neq\infty$ existieren.

Zur Bildung eines Beispiels gehen wir aus von einem festen Intervall $\mathfrak{i}_0$, bei dem wir den Index σ unterdrücken. Wir nehmen an, daß in $\mathfrak{i}_0$ nur abzählbar unendlich viele Bewertungen $B, B_{\tau_1}, B_{\tau_2},\cdots$ liegen, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind: B_{τ_i} liegt (hinsichtlich der durch B bestimmten Intervalle) in $\mathfrak{i}_i$, also nicht in $\mathfrak{i}_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots)$. Jedes B_{τ_i} ist isoliert, und zwar liegt schon in $\mathfrak{i}_{\tau_i i+1}$ nur B_{τ_i}. Zu B gehören die Exponenten $e_1=e_2=\cdots=1$, zu B_{τ_i} die Exponenten $e_{\tau_i 1}=\cdots=e_{\tau_i i}=1$, $e_{\tau_i i+1}=e_{\tau_i i+2}=\cdots=\frac{1}{2}$.

Idealtheoretisch gefaßt lauten unsere Bedingungen: Es soll $\mathfrak{p}_0\cdot\mathfrak{K}_1=\mathfrak{p}_1$ sein, und es soll allgemein in $\mathfrak{K}_1$ genau i Primideale geben, die mit $\mathfrak{K}_0$ den Durchschnitt $\mathfrak{p}_0$ haben, nämlich $\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{1i},\cdots,\mathfrak{p}_{i-1i}$. Dabei soll $\mathfrak{p}_{ki}\cdot\mathfrak{K}_{i+1}=\mathfrak{p}_{ki+1}$ $(k=1,\cdots, i-1)$ und $\mathfrak{p}_i\cdot\mathfrak{K}_{i+1}=\mathfrak{p}_{i\,i+1}\cdot\mathfrak{p}_{i+1}$ werden. Hinsichtlich eines festen Primideals $\mathfrak{p}_0$ sind diese Forderungen ohne weiteres zu realisieren. Über die übrigen Primideale aus $\mathfrak{K}_0$ brauchen wir uns hier nicht zu kümmern, da ihr Verhalten beim Übergang zu $\mathfrak{K}_1,\mathfrak{K}_2,\cdots$ für das zu konstruierende Beispiel gleichgültig ist.

Wir definieren ein Ideal $\mathfrak{a}$ durch die Forderungen $B_\sigma(\mathfrak{a})=0$ $(B_\sigma\notin\mathfrak{i}_0)$; $B_\sigma(\mathfrak{a})=1$; $B_{\tau_i}(\mathfrak{a})=\frac{1}{2}$ $(i=1,2,\cdots)$. Dann ist jedenfalls $B_i(\mathfrak{a})=\widetilde{B}_i(\mathfrak{a})=1$ für alle i und $B_{\tau_i\,i+k}(\mathfrak{a})=\widetilde{B}_{\tau_i\,i+k}(\mathfrak{a})=\frac{1}{2}$ $(i=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots)$. Es ist aber auch $B_{\tau_i\,i-k}(\mathfrak{a})=\widetilde{B}_{\tau_i\,i-k}(\mathfrak{a})=1$ $(i=1,2,\cdots;\ k=0,1,\cdots,i)$, wie unmittelbar aus der Definition von $\widetilde{B}_{\sigma i}(\mathfrak{a})$ und $e_{\tau_i 1}=e_{\tau_i 2}=\cdots=e_{\tau_i i}=1$ zu ersehen. Wir haben also $M(\mathfrak{a})=0$ aber es ist $\mathfrak{a}$ nicht endlich, weil $B_\sigma(\mathfrak{a})$ auf keinem Intervall $\mathfrak{i}_i$ konstant ist.—Für die Konstruktion unseres Beispiels war es wesentlich, daß wir spezielle Voraussetzungen über die Exponentenfolgen e_i, $e_{\tau i}$ machten; (die Isoliertheit aller B_{τ_i} war dagegen nur eine Erleichterung, auf die evtl. hätte verzichtet werden können). Es bliebe also nur noch zu untersuchen, ob *immer* nicht endliche Ideale $\mathfrak{a}$ mit $M(\mathfrak{a}) \neq \infty$ existieren, wenn *zwar die Bedingung von Satz 3, aber nicht die von Satz 2* erfüllt ist. Auch kann man natürlich fragen, welche Aussagen sich gegebenenfalls über die nicht endlichen Ideale mit $M(\mathfrak{a}) \neq \infty$ unter mehr oder minder scharfen Voraussetzungen über $\mathfrak{K}$ machen lassen. Hier sollten nur an einigen Beispielen die Eigenart des Problems und die Schwierigkeiten, mit denen man zu rechnen hat, verdeutlicht werden.

Was die schwächere Bedingung $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$ bei ganzem $\mathfrak{a}$ angeht, so zeigt das beim Beweise von Satz 3 von § 3 unter b) gebildete Ideal $\mathfrak{a}$, bei dessen Konstruktion nur die Nicht-Isoliertheit von B benutzt wurde:

Satz 4: Sind nicht alle B_σ isoliert, so gibt es immer nicht endliche ganze Ideale $\mathfrak{a}$ mit $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$.

Satz 4 scheint mir darauf hinzuweisen, daß die Untersuchung der Ideale mit $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$ weit weniger aussichtsreich sein dürfte als die der Ideale mit $M(\mathfrak{a}) \neq \infty$.

Anmerkungen

1) Vgl.: N. Nakano, [1] Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **16**, 425–439 (1953). [2] Über die kürzeste Darstellung der Ideale im unendlichen algebraischen Zahlkörper. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 21–25 (1953).

2) Zur bewertungstheoretischen Behandlung der unendlichen algebraischen Zahlkörper vgl.: W. Krull, Idealtheorie (Ergebnisse d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Bd. 4, Heft 3, 1935) Nr. 44. In Einzelheiten weicht der vorliegende Text von der Terminologie des Idealberichts ab. z. B. ist $\mathfrak{i}_i$ im Sinne des Idealberichts die i-Umgebung der Bewertung B und jeder Bewertung $B_\tau \in \mathfrak{i}_i$.

3) Enthalten in einer brieflichen Mitteilung an den Verf.

4) E. Stiemke, Über unendliche algebraische Zahlkörper. Math. Zeitschr. **25** S. 9–39 (1926), insbes. Kap. 6.

5) D.h. also: $\mathfrak{p}_{\sigma_0} \cdot \mathfrak{K}_i \subseteq \mathfrak{p}_{\sigma_i}^{e_i}$, $\mathfrak{p}_{\sigma_0} \cdot \mathfrak{K}_i \nsubseteq \mathfrak{p}_{\sigma_i}^{e_i+1}$.

6) Die Bewertung ist eindeutig bestimmt, weil sie mit Rücksicht auf den ausgezeichneten Grundkörper $\mathfrak{K}_0$ so festgelegt wurde, daß für $a_0 \in \mathfrak{K}_0$ dann und nur dann $B_\sigma(a_0)=1$, wenn $a_0 \in \mathfrak{p}_{\sigma_0}$, $a_0 \notin \mathfrak{p}_{\sigma_0}^2$. Das stimmt mit der Normierung des Idealberichts (Nr. 44, S. 122) überein, wo speziell $\mathfrak{K}_0$ der Körper der rationalen Zahlen war, so daß als Normierungsbedingung $B_\sigma(p_\sigma)=1$ für die in $\mathfrak{p}_{\sigma_0}$ enthaltene rationale Primzahl p_σ benutzt werden konnte. Für die topologischen Anwendungen ist nur wesentlich, daß alle auftretenden Bewertungen relativ zu ein und demselben festen Grundkörper normiert werden.

7) Im Sinne des Idealberichts entspricht $B_\sigma(\mathfrak{a})=\rho$ bzw. $B_\sigma(\mathfrak{a})=\rho_+$ dem Falle, daß $\mathfrak{a}$ an der Stelle B_σ das Symbol e bzw. das Symbol u zugeordnet ist.

8) Vgl.: Hilfssatz 1 und 2 von § 2.

9) Hilfssatz 1 und 3 folgen leicht aus dem Hauptsatz der gewöhnlichen Ideale des Idealberichts (S. 123) und aus den anschließenden Beweisandeutungen. Hilfssatz 2 ergibt sich aus

der eindeutigen Zerlegbarkeit der Ideale aus $\mathfrak{K}_i$ in Primidealfaktoren sowie aus der Tatsache, daß $B_\sigma(\mathfrak{a})=0$ auf fast allen Intervallen $\mathfrak{i}_i$ bei festem i.

10) Man beachte, daß die zu $\mathfrak{p}_\sigma$ gehörigen Primärideale durch $B_\sigma(\mathfrak{q}_\sigma)>0$, $B_\tau(\mathfrak{q}_\sigma)=0$ $(B_\tau \neq B_\sigma)$ charakterisiert sind.

11) Die Zahlen $M(\mathfrak{a})$, $M^*(\mathfrak{a})$ hängen natürlich von der Körperkette $\mathfrak{K}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$ ab, mit deren Hilfe $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}_0$ aufgebaut wurde. Unabhängig von der speziellen Wahl der erzeugenden Körperkette sind aber Aussagen wie $M^*(\mathfrak{a}) \neq \infty$, $M(\mathfrak{a})=\infty$ u.s.w.

12) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß $B(\mathfrak{a})=0$ für fast alle $\mathfrak{i}_{\sigma_i}$ bei festem i, und aus dem BORELschen Überdeckungssatz, der für jede Überdeckung eines $\mathfrak{i}_{\sigma_{i_0}}$ mit Intervallen $\mathfrak{i}_{\tau_i} \subseteq \mathfrak{i}_{\sigma_{i_0}}$ gilt. Unter der im Text für $\mathfrak{K}$ gemachten Abzählbarkeitsvoraussetzungen ist der Beweis des BORELschen Überdeckungssatzes ganz einfach. Zum allgemeinsten Fall im Sinne des Schlußabsatzes der Einleitung vgl.: W. Krull, Charakterentopologie, Isomorphismentopologie und Bewertungstopologie, Mem. de Mat. del Inst. "Jorge Juan" **16**, (1955) Madrid, insbes. § 1, S. 13 f und § 3 S. 43.

13) Folgt aus der weiter unten benutzten Ungleichung $B_\sigma(\mathfrak{a}) \geq \overline{\lim}\, B_{\tau_{i_k}}(\mathfrak{a})$ zu der z.B. der Hauptsatz der gewöhnlichen Ideale von S. 123 der Idealberichts verglichen werden kann.