J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I
25 (1961), 357-366

Sur les Familles Triples Locales de Transformations Locales de Lie

Takayuki Nôno

(Reçu le 17 septembre 1961)

Dans un précédent travail [6],[1] on a abordé une théorie des familles triples de transformations de Lie. Cet exposé contient quelques resultats concernant les familles triples locales de transformations locales de Lie à r paramètres. On définira dans le paragraphe 1 ≪famille triple locale de transformations locales de Lie≫, et on démontrera dans les paragraphes 2, 3 et 4 des théorèmes fondamentaux dans cette théorie.

Pour términer, je tiens à exprimer ma profonde reconnaisance à M. le professeur K. Morinaga, dont les conseils m'ont toujours été utiles et les encouragements, souvent nécessaires.

1. Définitions et notations. — Soient V_n une variété différentiable de classe C^∞, de dimension n, R^r l'espace numérique réel dont l'origine est désignée par 0. On désignera par x^i ($i, j, \cdots,$ tout indice latin$=1, 2, \cdots, n$) les coordonnées locales différentiables de classe C^∞ de x dans V_n et par a^α ($\alpha, \beta, \cdots,$ tout indice grec$=1, 2, \cdots r$) les coordonnées de a dans R^r.

Définition. — Une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramètres $\mathscr{T}$ opérant sur V_n est un ensemble de transformations locales f_a ($a \in R^r$) vérifiant les axiomes suivants:

1° tout $f_a \in \mathscr{T}$ est une application biunivoque de V_n dans V_n telle que $f_a(x)=f(x, a)$ est une application différentiable de classe C^∞, d'un voisinage ouvert de $\{0\} \times V_n$ dans $R^r \times V_n$, dans V_n; en utilisant les coordonnés locales elle s'écrit:

$$y^i=f^i_a(x)=f^i(x, a);$$

2° il existe une application différentiable de classe C^∞ φ: $U\times U \rightarrow R^r$, U étant un voisinage ouvert de 0 dans R^r, telle que

$$f_a \circ f_b \circ f_a(x)=f_c(x), \quad \text{où} \quad c=\varphi(a, b),$$

si les deux membres sont définis;

3° il existe une application différentiable de classe C^∞ ψ: $U \rightarrow R^r$, telle que

$$f^{-1}_a(x)=f_{\tilde{a}}(x), \quad \text{où} \quad \tilde{a}=\psi(a),$$

---

(1) Les numéros entre crochet renvoient à la bibliographie située à la fin de cet article.

si les deux membres sont définis;

4° f_0 est l'application identique de V_n; c'est-à-dire que $f^i(x, 0)=x^i$ pour tout $x \in V_n$;

5° dans le système de transformations locales

$$y^i=f^i(x, a), \quad \text{où} \quad a=(a^\alpha)$$

les paramètres a^α sont essentiels, c'est-à-dire non réductibles à un nombre plus petit.

On considérera l'application φ_a: $\xi \to \eta=\varphi(a, \xi)$ de U dans U, $\varphi(a, \xi)$ étant défini dans un voisinage ouvert de $\{0\} \times U$ dans $U \times U$. Alors on peut vérifier aisément que l'ensemble de ces transformations locales φ_a est une famille triple locale de transformations locales de Lie opérant sur U. On l'appellera ≪famille triple locale des paramètres≫ de $\mathscr{T}$.

On désignera par exp tX un groupe locale de transformations de Lie à un paramètre défini par la transformation infinitésimale locale X sur V_n.

2. Premier théorème fondamental. — Soit V_n une variété différentiable de dimension n. Supposons maintenant qu'un ensemble $\mathscr{T}$ de transformations locales $f_a(a \in R^r)$ soit une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramètres opérant sur V_n. Alors, comme

$$f_a \circ f_b \circ f_a = f_c, \quad \text{où} \quad c=\varphi(a, b) \tag{1}$$

pour tout $x \in V_n$, on peut dire que le système des équations:

$$F^i(x, y, b) \equiv y^i - f^i(x, b)=0 \tag{2}$$

est invariant par toute transformation:

$$\begin{cases} x'=g_a(x) \ (=f_a^{-1}(x)), \\ y'=f_a(y), \\ b'=\varphi_a(b) \ (=\varphi(a, b)); \end{cases} \tag{3}$$

c'est-à-dire que si $F^i(x, y, b)=0$, alors on a:

$$F^i(g(x, a), f(y, a), \varphi(a, b))=0.$$

D'où on déduit immédiatement que si $F^i(x, y, b)=0$, alors il résulte:

$$\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\left[\frac{\partial g^j(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} + \frac{\partial F^i}{\partial y^j}\left[\frac{\partial f^j(y, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} + \frac{\partial F^i}{\partial b^\beta}\left[\frac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} = 0. \tag{4}$$

Comme $g^i(f(x, a), a)=x^i$, on a:

$$\left[\frac{\partial g^i(\bar{x}, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} + \left[\frac{\partial g^i(\bar{x}, a)}{\partial \bar{x}^j}\right]_{a=0} \cdot \left[\frac{\partial f^j(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} = 0, \tag{5}$$

où $\bar{x}=f(x, a)$; par suite on en déduit:

$$\left[\frac{\partial g^i(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} = -\left[\frac{\partial f^i(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0}, \tag{6}$$

car on sait que

$$\left[\frac{\partial g^i(\bar{x}, a)}{\partial \bar{x}^j}\right]_{a=0} = \delta^i_j.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} \left[\dfrac{\partial f^j(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} = \xi^j_\alpha(x), \\ \left[\dfrac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0} = \chi^\beta_\alpha(b), \end{cases} \tag{7}$$

en vertu de (6), (4) s'écrit:

$$-\xi^j_\alpha(x)\frac{\partial F^i}{\partial x^j} + \xi^j_\alpha(y)\frac{\partial F^i}{\partial y^j} + \chi^\beta_\alpha(b)\frac{\partial F^i}{\partial b^\beta} = 0. \tag{8}$$

Comme $F^i(x, y, b) \equiv y^i - f^i(x, b)$, on obtient que le système des fonctions $y^i = f^i(x, b)$ est une solution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\xi^i_\alpha(y) + \xi^j_\alpha(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j} - \chi^\beta_\alpha(b)\frac{\partial y^i}{\partial b^\beta} = 0, \tag{9}$$

et il vérifie la condition:

$$f^i(x, 0) = x^i. \tag{10}$$

Si l'on pose

$$X_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y_\alpha = \xi^i_\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{et} \quad B_\alpha = \chi^\beta_\alpha(b)\frac{\partial}{\partial b^\beta}, \tag{11}$$

cette condition encore peut être énoncée comme suit: si $F^i(x, y, b) \equiv y^i - f^i(x, b) = 0$, alors on a:

$$Z_\alpha F^i(x, y, b) = 0, \tag{12}$$

où $Z_\alpha = -X_\alpha + Y_\alpha + B_\alpha$.

De même on voit aisément que le système de fonctions $\eta^\gamma = \varphi^\gamma(b, \xi)$ est une solution du système d'équations aux dérivées partielles

$$\chi^\gamma_\alpha(\eta) + \chi^\beta_\alpha(\xi)\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial \xi^\beta} - \chi^\beta_\alpha(b)\frac{\partial \eta^\gamma}{\partial b^\beta} = 0, \tag{13}$$

et il vérifie la condition:

$$\varphi^\gamma(0, \xi)=\xi^\gamma. \tag{14}$$

Maintenant nous allons démontrer que dét $\|\chi^\beta_\alpha(b)\| \neq 0$ dans un certain voisinage ouvert de 0 dans R^r. On sait de la définition de $\mathscr{T}$ que

$$f_a \circ f_b(x) - f_c \circ g_a(x)=0$$

pour tout $x \in W$, W étant un ouvert de V_n; c'ést-à-dire que

$$f^i(y, a)-f^i(g(x, a), \varphi(a, b))=0 \tag{15}$$

où $y=f(x, b)$; en dérivant par rapport à a^α il vient:

$$\frac{\partial f^i(y, a)}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial f^i(x', c)}{\partial x'^j} \cdot \frac{\partial g^j(x, a)}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial f^i(x', c)}{\partial c^\beta} \cdot \frac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}=0, \tag{16}$$

où $x'=g(x, a)$ $(=f_a^{-1}(x))$ et $c=\varphi(a, b)$. Pour $a=\bar{b}=\psi(b)$, on a alors:

$$x'=g(x, \psi(b))=f_b(x)=y,$$

$$c=\varphi(\psi(b), b)=\psi(b),$$

et par suite:

$$f(x', c)=f(y, \psi(b))=g(y, b);$$

en posant $a=\bar{b}=\psi(b)$ dans (16) il en résulte:

$$\left[\frac{\partial f^i(y, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=\psi(b)} - \left[\frac{\partial f^i(y, a)}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial g^j(x, a)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=\psi(b)} - \left[\frac{\partial f^i(y, c)}{\partial c^\beta}\right]_{c=\psi(b)} \cdot \left[\frac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=\psi(b)}=0. \tag{17}$$

Comme $f^i(g(x, a), a)=x^i$, on en déduit:

$$\frac{\partial f^i(y, a)}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial g^j(x, a)}{\partial a^\alpha} + \frac{\partial f^i(y, a)}{\partial a^\alpha}=0. \tag{18}$$

D'après (18), il s'ensuit de (17):

$$\left\{2\delta^\beta_\alpha - \left[\frac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=\psi(b)}\right\} \left[\frac{\partial f^i(y, a)}{\partial a^\beta}\right]_{a=\psi(b)}=0. \tag{19}$$

Mais, dans le système de transformations: $z^i=f^i(y, a)$, les paramètres a^α sont essentiels; donc de (19) il résulte:

$$\left[\frac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=\psi(b)}=2\delta^\beta_\alpha. \tag{20}$$

En particulier, pour $b=0$ on a alors

(21)
$$\left[\frac{\partial \varphi^{\beta}(a,\,0)}{\partial a^{\alpha}}\right]_{a=0}=2\delta^{\beta}_{\alpha}.$$

D'autre part, on sait:

(22)
$$\chi^{\beta}_{\alpha}(0)=\left[\frac{\partial \varphi^{\beta}(a,\,0)}{\partial a^{\alpha}}\right]_{a=0};$$

ainsi on en obtient:

(23)
$$\chi^{\beta}_{\alpha}(0)=2\delta^{\beta}_{\alpha};$$

par suite:

(24)
$$\text{dét}\ \|\chi^{\beta}_{\alpha}(0)\|=2^{r}\neq 0.$$

Ainsi on a démontré que dét $\|\chi^{\beta}_{\alpha}(b)\|\neq 0$ pour tout b dans un certain voisinage ouvert de 0 dans R^{r}.

De plus, en utilisant ce fait et le fait que les paramètres b sont essentiels, d'après (9) on peut montrer que les transformations infinitésimales $X_{\alpha}=\xi^{i}_{\alpha}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^{i}}$ $(\alpha=1,2,\cdots,r)$ sont linéairement indépendentes.

Inversement supposons que le système de fonctions $y^{i}=f^{i}(x,\,b)$ soit une solution du système d'équations aux dérivées partielles (9):

(9)
$$\xi^{i}_{\alpha}(y)+\xi^{j}_{\alpha}(x)\frac{\partial y^{i}}{\partial x^{j}}-\chi^{\beta}_{\alpha}(b)\frac{\partial y^{i}}{\partial b^{\beta}}=0,$$

où dét $\|\chi^{\beta}_{\alpha}(0)\|\neq 0$, et il vérifie: $f^{i}(x,\,0)=x^{i}$. Remarquons que, sous cette supposition, les transformations infinitésimales $X_{\alpha}=\xi^{i}_{\alpha}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^{i}}$ $(\alpha=1,2,\cdots,r)$ sont linéairement indépendantes, et par suite: $\chi^{\beta}_{\alpha}(0)=2\delta^{\beta}_{\alpha}$.

Alors on sait que le système d'équations $F^{i}(x,\,y,\,b)\equiv y^{i}-f^{i}(x,\,b)=0$ est invariant par toute transformation infinitésimale Z_{α} $(\alpha=1,2,\cdots,r)$; c'est-à-dire que si $F^{i}(x,\,y,\,b)=0$, alors $Z_{\alpha}F^{i}(x,\,y,\,b)=0$, où $Z_{\alpha}=-X_{\alpha}+Y_{\alpha}+B_{\alpha}$, $X_{\alpha}=\xi^{i}_{\alpha}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^{i}}$, $Y_{\alpha}=\xi^{i}_{\alpha}(y)\dfrac{\partial}{\partial y^{i}}$ et $B_{\alpha}=\chi^{\beta}_{\alpha}(b)\dfrac{\partial}{\partial b^{\beta}}$. Cette condition est equivalente à ce que le système d'équations $y^{i}-f^{i}(x,\,b)=0$ soit invariant par toute transformation $\exp tZ_{\alpha}$:

(25)
$$\begin{cases} x'=\exp\,(-tX_{\alpha})\,x,\\ y'=\exp\,(tY_{\alpha})\,y,\\ b'=\exp\,(t\,B_{\alpha})\,b; \end{cases}$$

(voir [3], 63, Théorème [17.2]). En outre, elle est énoncé comme suit:

(26)
$$\exp tX_{\alpha}\circ f_{b}\circ \exp tX_{\alpha}(x)=f_{b'}(x),$$

où $b'=\exp t\, B_\alpha(b)$. En particulier, pour $b=0$ on en déduit:

$$\exp 2tX_\alpha(x)=f_{b'}(x), \tag{27}$$

où $b'=\exp tB_\alpha(0)$ $(=[\exp tB_\alpha(b)]_{b=0})$. De (26) et (27) il résulte:

$$\exp t^rX_r\circ\exp t^{r-1}X_{r-1}\circ\cdots\circ\exp t^1X_1\circ \\ \circ\exp t^1X_1\circ\cdots\circ\exp t^{r-1}X_{r-1}\circ\exp t^rX_r(x)=f_c(x), \tag{28}$$

où

$$c=\exp t^rB_r\circ\exp t^{r-1}B_{r-1}\circ\cdots\circ\exp t^1B_1(0). \tag{29}$$

D'autre part, on voit aisément:

$$J(0)=\text{dét}\left\|\frac{\partial c^\beta}{\partial t^\alpha}\right\|_{t=0}=2^r\neq 0, \tag{30}$$

car, de (29) on déduit:

$$\left[\frac{\partial c^\beta(0,\ldots,0,t^\alpha,0,\ldots,0)}{\partial t^\alpha}\right]_{t^\alpha=0}=\chi_\alpha^\beta(0)=2\delta_\alpha^\beta.$$

Ainsi, pour tout c dans un voisinage assez petit de 0 dans R^r, $f_c(x)$ s'écrit d'une maniere et d'une seule sous la forme (28).

Si l'on pose $f_c=\tilde{f}_t$ où $t=(t^\alpha)$, il est clair que $\tilde{f}_0$ est l'application identique de V_n, et que $\tilde{f}_t^{-1}=\tilde{f}_{-t}$. En outre, pour $\tilde{f}_t$ et $\tilde{f}_s$, on peut montrer facilement: $\tilde{f}_s\circ\tilde{f}_t\circ\tilde{f}_s=f_k$, en utilisant (26) et (27). Donc, le système de transformations f_b est une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramètres opérant sur V_n.

Ainsi, on a établi le premir théorème fondamental:

THÉORÈME 1. — *Soit V_n une variété différentiable de dimension n. Pour qu'un ensemble $\mathscr{T}$ de transformations locales f_a $(a\in R^r)$, f_0 étant l'application identique de V_n, soit une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramètres opérant sur V_n, il faut et il suffit que le système d'équations $y^i=f^i(x,b)$ $(=f_b^i(x))$ soit une solution du système d'équations aux dérivées partielles de la forme*:

$$\xi_\alpha^i(y)+\xi_\alpha^j(x)\frac{\partial y^i}{\partial x^j}-\chi_\alpha^\beta(b)\frac{\partial y^i}{\partial b^\beta}=0,$$

où dét $\|\chi_\alpha^\beta(0)\|\neq 0$.

Alors, pour tout c dans un voisinage assez petit de 0 *dans R^r, f_c s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*:

$$\begin{cases} f_c=\exp t^rX_r\circ\cdots\circ\exp t^1X_1\circ\exp t^1X_1\circ\cdots\circ\exp t^rX_r, \\ c=\exp t^rB_r\circ\exp t^{r-1}B_{r-1}\circ\cdots\circ\exp t^1B_1(0), \end{cases}$$

où $X_\alpha = \xi^i_\alpha(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ *et* $B_\alpha = \chi^\beta_\alpha(b)\dfrac{\partial}{\partial b^\beta}$.

En particulier, dans le cas où $r=1$, on a le corollaire suivant:

Corollaire. — *Soit V_n une variété différentiable de dimension n. Une famille triple locale de transformations locales de Lie à un paramètre sur V_n est un groupe local de transformations locales de Lie à un paramètre sur V_n.*

Remarque. — Supposons qu'un ensemble $\mathscr{T}$ de transformations locales f_a ($a \in R^r$) soit une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramétres opérant sur V_n. On sait alors que si $F^i(x, y, b) \equiv y^i - f^i(x, b) = 0$, alors il résulte: $Z_\alpha F^i(x, y, b) = 0$, et par suite $e^\alpha Z_\alpha F^i(x, y, b) = 0$, où $Z_\alpha = -X_\alpha + Y_\alpha + B_\alpha$ et $e^\alpha = \text{const}$. Il en résulte:

$$\exp t(e^\alpha X_\alpha) \circ f_b \circ \exp t(e^\alpha X_\alpha) = f_{b'}, \tag{31}$$

où $b' = \exp te^\alpha B_\alpha(b)$. En particulier, pour $b=0$ on a:

$$\exp 2t(e^\alpha X_\alpha) = f_c, \quad \text{où} \quad c = \exp te^\alpha B_\alpha(0). \tag{32}$$

Si l'on pose $2te^\alpha = \lambda^\alpha$, on a alors:

$$f_c = \exp \lambda^\alpha X_\alpha, \quad \text{où} \quad c = \exp \tfrac{1}{2}\lambda^\alpha B_\alpha(0). \tag{33}$$

On en déduit:

$$\left[\frac{\partial c^\beta(0, \dots, 0, \lambda^\alpha, 0, \dots, 0)}{\partial \lambda^\alpha}\right]_{\lambda^\alpha=0} = \tfrac{1}{2}\chi^\beta_\alpha(0) = \delta^\beta_\alpha; \tag{34}$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{J}(0) = \text{dét}\left\|\frac{\partial c^\beta}{\partial \lambda^\alpha}\right\|_{\lambda=0} = \text{dét}\left\|\tfrac{1}{2}\chi^\beta_\alpha(0)\right\| = 1. \tag{35}$$

Ainsi, on obtient que, *pour tout c dans un voisinage assez petit de* 0 *dans* R^r, f_c *s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*:

$$f_c = \exp \lambda^\alpha X_\alpha, \quad \textit{où} \quad c = \exp \tfrac{1}{2}\lambda^\alpha B_\alpha(0). \tag{36}$$

3. Second théorème fondamental. — Supposons qu'un ensemble $\mathscr{T}$ de transformations locales $f_a (a \in R^r)$ soit une famille triple locale de transformations locales de Lie à r paramètres opérant sur V_n. Alors on sait de (13) et (14) que, si $c^\gamma = \varphi^\gamma(a, b)$, alors on a:

$$\chi^\gamma_\alpha(c) + \chi^\beta_\alpha(b)\frac{\partial c^\gamma}{\partial b^\beta} - \chi^\beta_\alpha(a)\frac{\partial c^\gamma}{\partial a^\beta} = 0 \tag{37}$$

et $\varphi^\gamma(0, b) = b^\gamma$, où $\chi^\beta_\alpha(b) = \left[\dfrac{\partial \varphi^\beta(a, b)}{\partial a^\alpha}\right]_{a=0}$ et $\chi^\beta_\alpha(0) = 2\delta^\beta_\alpha$. Cette condition (37) s'écrit aussi comme suit:

$$A_\alpha(c^\gamma) - B_\alpha(c^\gamma) = C_\alpha(c^\gamma), \tag{38}$$

où $A_\alpha = \chi_\alpha^\beta(a)\frac{\partial}{\partial a^\beta}$, $B_\alpha = \chi_\alpha^\beta(b)\frac{\partial}{\partial b^\beta}$ et $C_\alpha = \chi_\alpha^\beta(c)\frac{\partial}{\partial c^\beta}$; on en déduit:

$$[[A_\alpha, A_\beta], A_\gamma](c^\nu) - [[B_\alpha, B_\beta], B_\gamma](c^\nu) = [[C_\alpha, C_\beta], C_\gamma](c^\nu). \tag{39}$$

D'autre part, comme dét $\|\chi_\alpha^\beta(a)\| \neq 0$ pour tout a dans un certain voisinage de 0 dans R^r, il existe un système des fonctions différentiables $k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(a)$ de a, telles que

$$[[A_\alpha, A_\beta], A_\gamma] = k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(a) A_\lambda. \tag{40}$$

D'après (39) et (40), on en déduit:

$$k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(a) A_\lambda(c^\nu) - k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(b) B_\lambda(c^\nu) = k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(c) C_\lambda(c^\nu); \tag{41}$$

en posant dans (41):

$$C_\lambda(c^\nu) = A_\lambda(c^\nu) - B_\lambda(c^\nu),$$

il résulte que, pour $c^\nu = \varphi^\nu(a, b)$ on a:

$$(k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(a) - k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(c)) A_\lambda(c^\nu) - (k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(b) - k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(c)) B_\lambda(c^\nu) = 0. \tag{42}$$

En particulier, si $a=0$, alors $c=\varphi(0, b)$, il en résulte:

$$(k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(0) - k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(b)) \chi_\lambda^\mu(0) \left[\frac{\partial c^\nu}{\partial a^\mu}\right]_{a=0} = 0. \tag{43}$$

Mais, on sait:

$$\chi_\lambda^\mu(0) = 2\delta_\lambda^\mu, \quad \left[\frac{\partial c^\nu}{\partial a^\mu}\right]_{a=0} = \chi_\mu^\nu(b);$$

de (43) on déduit:

$$2(k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(0) - k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(b)) \chi_\lambda^\nu(b) = 0. \tag{44}$$

Comme dét $\|\chi_\lambda^\nu(b)\| \neq 0$, on voit alors:

$$k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(b) = k_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(0) = c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda = \text{const.} \tag{45}$$

Ainsi, on obtient:

$$[[A_\alpha, A_\beta], A_\gamma] = c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda A_\lambda; \tag{46}$$

c'est-à-dire que le système de transformations infinitésimales $A_\alpha (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ est un système triple de Lie.

De plus, (12) s'écrit comme suit:

$$Y_\alpha(y^i) + X_\alpha(y^i) = B_\alpha(y^i) \tag{47}$$

pour $y^i=f^i(x, b)$, où $X_\alpha=\xi_\alpha^j(x)\dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $Y_\alpha=\xi_\alpha^j(y)\dfrac{\partial}{\partial y^j}$ et $B_\alpha=\chi_\alpha^\beta(b)\dfrac{\partial}{\partial b^\beta}$. De (47) il résulte:

$$[[Y_\alpha, Y_\beta], Y_\gamma](y^i)+[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma](y^i)=[[B_\alpha, B_\beta], B_\gamma](y^i). \tag{48}$$

Utilisant (47) et (46): $[[B_\alpha, B_\beta], B_\gamma]=c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda B_\lambda$, de (48) on en déduit:

$$[[Y_\alpha, Y_\beta], Y_\gamma](y^i)+[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma](y^i)=c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda(Y_\lambda(y^i)+X_\lambda(y^i)), \tag{49}$$

pour $y^i=f^i(x, b)$. En posant $b=0$ dans (49), il en résulte:

$$[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma]=c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda X_\lambda. \tag{50}$$

Ainsi, on peut dire que le système de transformations infinitésimales X_α est un système triple de Lie, qui est isomorphe au système triple de Lie $\{A_\alpha\}$.

Inversement supposons que le système $\mathfrak{T}$ de transformations infinitésimales $X_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, r)$ sur V_n soit un système triple de Lie. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}=\mathfrak{T}+[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}]$ de transformations infinitésimales sur V_n. D'après le second théorème fondamental de Lie, on sait qu'il existe un groupe local de transformations locales de Lie $\mathscr{G}$ sur V_n, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{G}$. En considérant $\mathscr{G}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{T}$ respectivement comme un groupe de Lie ≪abstrait≫ G, son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et un système triple de Lie $\mathfrak{t}$ contenu dans $\mathfrak{g}$, par un raisonnement analogue à celui de *G. D.* Mostow ([4], 37–38, Théorème 1, voir aussi [5], 173–174, Lemm 4), on voit aisément que $\exp \mathfrak{t} \subset G$ est une famille triple locale de Lie, c'est-à-dire que si $e, f \in \exp \mathfrak{t}$, alors $e f e \in \exp \mathfrak{t}$. Encore, si l'on considère G comme le groupe local de transformations locales de Lie $\mathscr{G}$ opérant sur V_n, on conclut que $\exp \mathfrak{T} \subset \mathscr{G}$ est une famille triple locale de transformations locales de Lie opérant sur V_n. Ainsi on a le second théorème fondamental:

THÉORÈME 2. — *Soit $\{X_\alpha\}$ un système de transformations infinitésimales locales sur V_n. Pour que l'ensemble* $\{\exp \lambda^\alpha X_\alpha\}$ *soit une famille triple locale de transformations locales de Lie sur V_n, il faut et il suffit que le systéme $\{X_\alpha\}$ soit un système triple de Lie.*

REMARQUE.—Comme on le voit aisément de la démonstration du Théorème 2, une famille triple locale de transformations locales de Lie $\mathscr{T}$ opérant sur V_n est contenu dans un groupe local de transformations locales de Lie $\mathscr{G}$ opérant sur V_n.

4. Troisième théorème fondamental. — Supposons qu'un ensemble de transformations infinitésimales locales $X_\alpha(\alpha=1, 2, \cdots, r)$ sur V_n soit un système triple de Lie. Il existe un système des constantes réells $c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda$, telles que

$$[[X_\alpha, X_\beta], X_\gamma]=c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda X_\lambda. \tag{51}$$

On peut voir aisément que le système des constantes $c_{\alpha\beta\gamma}{}^\lambda$ vérifie les conditions suivantes:

$$
(52) \qquad \begin{cases} c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\nu} + c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\nu} = 0, \\ c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\nu} + c_{\beta\gamma\alpha}{}^{\nu} + c_{\gamma\alpha\beta}{}^{\nu} = 0, \\ c_{\lambda\mu\nu}{}^{\sigma}\, c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\nu} = c_{\lambda\mu\alpha}{}^{\nu}\, c_{\nu\beta\gamma}{}^{\sigma} + c_{\lambda\mu\beta}{}^{\nu}\, c_{\alpha\nu\gamma}{}^{\sigma} + c_{\lambda\mu\gamma}{}^{\nu}\, c_{\alpha\beta\nu}{}^{\sigma}. \end{cases}
$$

Inversement supposons qu'un système des constantes réelles $c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}$ verifie les conditions (52). Considérons un espace vectoriel réel $\mathfrak{m}$, dont la base est désignée par $\{e_\alpha;\ \alpha=1, 2, \cdots, r\}$. Si l'on définit un triple produit par la suite:

$$
(53) \qquad [e_\alpha\ e_\beta\ e_\gamma] = c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}\, e_\lambda.
$$

De (52) on voit alors que, par la donnée de ce triple produit, $\mathfrak{m}$ est un système triple de Lie. Un tel système triple de Lie peut être plongé biunivoquement dans une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de façon que le triple produit $[u\ v\ w]$ dans $\mathfrak{m}$ coïncide avec le produit $[[u\ v],\ w]$ défini dans $\mathfrak{g}$ ([7], 109, Théorème 2. 1). D'après le Théorème de Ado-Cartan ([1] et [2]), on sait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ posséde une représentation fidèle; il en résulte que le système triple de Lie $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ posséde aussi une représentation fidèle. Autrement dit, il existe un système de transformations infinitésimales locales X_α sur une variété différentiable V_n, tel que

$$
(54) \qquad [[X_\alpha,\ X_\beta],\ X_\gamma] = c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}\, X_\lambda.
$$

Ainsi, on a le troisième théorème fondamental:

THÉORÈME 3. — *Pour qu'il existe r transformations infinitésimales locales indépendantes X_α sur une variété différentiables V_n, satisfaisant aux relations:*

$$
[[X_\alpha,\ X_\beta],\ X_\gamma] = c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}\, X_\lambda,
$$

il faut et il suffit que les constantes $c_{\alpha\beta\gamma}{}^{\lambda}$ satisfassent aux relations (52).

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. Ado, *Über die Darstellung der endlichen kontinuirlichen Gruppen durch lineare Substitution*, Bull. Soc. Physico Math. de Kazan, 7 (1935), 3–43.

[2] E. Cartan, *Les représentations linéaires des groupes de Lie*, Jour. de Math., 57 (1938), 1–12.

[3] L. P. Eisenhart, Continuous groups of transformations, Princeton Univ. Press, 1933.

[4] G. D. Mostow, *Some new decomposition theorems for semi-simple Lie groups*, Memoirs of AMS., 14 (1955), 31–54.

[5] T. Nôno, *On geodesic subspaces of group spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ., (A), 21 (1958), 167–176.

[6] ———, *Sur les familles triples infinitésimales attachés aux familles triples de Lie*, J. Sci. Hiroshima Univ., (A), 24 (1960), 573–578.

[7] K. Yamaguti, *On algebras of totally geodesic spaces* (*Lie triple systems*), J. Sci. Hiroshima Univ., (A), 21 (1957), 107–113.

Institut de Mathématiques
Université de Hiroshima