Hiroshima Math. J.
1 (1971), 123-143

Sur les Noyaux d'Ordre Fractionnaire Associés au Noyau de Dirichlet

Masayuki Ito

(Received February 10, 1971)

Introduction

Soit X un espace localement compact à bace dénombrable, et soit ξ une mesure de Radon positive et partout dense dans X. Rappelons qu'un noyau de Dirichlet (relatif à X et à ξ) est un noyau d'espace de Dirichlet au sens de A. Beurling et J. Deny (cf. [1]). Dans cette note, on se propose de montrer l'existence des noyaux d'ordre fractionnaire associés au noyau de Dirichlet. Cela est une généralisation des noyaux de Riesz-Frostman dans la théorie du potentiel. En utilisant la même manière que dans [4], pour un noyau de Dirichlet N, on fournira un cône convexe des noyaux de Dirichlet qui contient tous les noyaux d'ordre fractionnaire associés au noyau N.

1. Préliminaires

Commençons avec quelques notations. On désigne par L^2 l'espace hilbertien des fonctions ξ-mesurables dans X, à valeurs réelles et dont les carrés sont sommables, et muni de la norme usuelle. M_K est la totalité des fonctions ξ-mesurables, bornées dans X, à valeurs réelles et à support compact, et M_K^+ est son sous-ensemble des fonctions non-négatives. C_K est l'espace des fonctions finies, continues dans X et à support compact, et muni de la topologie usuelle. On désigne aussi par C_K^+ son sous-ensemble des fonctions non-négatives.

Noyaux: Soit E la σ-algèbre constituée par tous les ensembles ξ-mesurables sur X. Un noyau (relatif à X et à ξ) est, par définition, une application de $E\times E$ sur l'intervalle fermé $[0, \infty]$ telle que, quel que soit e_0 un ensemble relativement compact de E, les applications $E\ni e\rightarrow N(e_0, e)$ et $E\ni e\rightarrow N(e, e_0)$ soient complètement additives et absolument continues par rapport à la mesure ξ. Il est symétrique si, quels que soient e_1 et e_2 de E, $N(e_1, e_2) =N(e_2, e_1)$. Voir [5].

Potentiels: Pour une fonction f de M_K^+ et pour un ensemble e de E, l'intégrale $\int f(y)N(e, dy)$ a un sens, et l'application $E\ni e\rightarrow\int f(y)N(e, dy)$ est complètement additive et absolument continue par rapport à ξ. Sa densité s'appelle le potentiel de f par rapport au noyau N. Le potentiel de $f \in M_K$ est défini par la différence des potentiels de f^+ et de f^-. En général, si, pour une fonction ξ-mesurable f dans X, l'application $E \ni e \to \int f(y)N(e, dy)$ est définie et si elle est complètement additive et absolument continue par rapport à ξ, sa densité s'appelle aussi le potentiel de f par rapport au noyau N, et s'écrit Nf.

Multiplication des noyaux: Soient N_1 et N_2 deux noyaux. Alors, quels que soient e_1, e_2 de E, l'intégrale $\int N_1(e_1, dy)N_2(dy, e_2) = \int \check{N}_1 c_1(y) N_2 c_2(y) d\xi(y)$ a un sens, où c_i est la fonction caractéristique de $e_i (i=1, 2)$ et $\check{N}_1$ est la symétricité de N_1. Si l'application

$$E \times E \ni (e_1, e_2) \to \int N_1(e_1, dy)N_2(dy, e_2)$$

est un noyau, il s'écrit $N_1 \cdot N_2$ et s'appelle la multiplication de N_1 et de N_2. On remarque ici que, pour deux noyaux symétriques N_1 et N_2, $N_1 \cdot N_2$ n'est pas toujours symétrique.

Topologie sur les noyaux: On note $[N]$ la totalité des noyaux symétriques. Une suite (N_n) de $[N]$ converge vers $N \in [N]$ dans $[N]$ avec $n \to \infty$ si, quelle que soit f de M_K et quel que soit K un compact de X,

$$\lim_{n \to \infty} \int_K |N_n f - Nf| \, d\xi = 0.$$

Il est évident que $[N]$ est complète par cette topologie.

Espaces fonctionnels: Un espace fonctionnel H (relatif à X et à ξ) est un espace hilbertien dont l'élément est une fonction localement ξ-sommable dans X, à valeurs réelles et qui satisfait à la condition suivante:

(1) A un compact K de X, on peut associer une constante positive $A(K)$ telle que, quelle que soit u de H,

$$\int_K |u| \, d\xi \leqq A(K) \|u\|.$$

Cela est la définition de J. Deny (cf. [2]). On note $\|\cdot\|$ et $(\cdot, \cdot)$ la norme de H et le produit scalaire associé.

D'après le théorème de Riesz, à une fonction f de M_K, on peut associer une fonction u_f de H, et une seule telle que, quelle que soit v de H,

$$(u_f, v) = \int v f \, d\xi.$$

On connaît que l'adhérent de l'ensemble $\{u_f \in H;\ f \in M_K^+\}$ dans H joue un grand rôle, et son élément s'appelle le potentiel pur dans H. Si tout le potentiel pur dans H est non-négative, H est dit d'être à noyau positif. Il est bien connu qu'à un noyau symétrique N de type positif (resp. un espace fonctionnel H à noyau positif), on peut associer un espace fonctionnel H à noyau positif (resp. un noyau symétrique N de type positif), et un seul tel que, quelle que soit f de M_K, $Nf = u_f$.

On dit que N est le noyau de H. Un noyau N est de type positif si, quelle que soit f de M_K,

$$\int Nf(x)f(x)d\xi(x) = \iint f(x)f(y)N(dx, dy) \geqq 0.$$

Définition 1. On dit qu'un espace fonctionnel H est faiblement régulier (resp. régulier) si $H \cap L^2$ est dense dans H (resp. $H \cap C_K$ est dense dans H et dans C_K). Un noyau symétrique N de type positif est faiblement régulier (resp. régulier) si l'espace fonctionnel au noyau N est faiblement régulier (resp. régulier).

PROPOSITION 1. *Soient H_i un espace fonctionnel à noyau positif et N_i son noyau* ($i=1, 2$). *Il existe alors l'espace fonctionnel H_{12} au noyau $N_1 + N_2$, et il satisfait aux conditions suivantes*:

(1) *Si l'on a $u \in H_i$, alors $u \in H_{12}$ et $\|u\|_{H_i} \geqq \|u\|_{H_{12}}$.*

(2) $H_{12} = \{u_1 + u_2;\ u_i \in H_i (i=1, 2)\}$.

(3) *Si H_i est faiblement régulier* (*resp. régulier*) *pour $i=1, 2$, alors, H_{12} l'est aussi.*

DÉMONSTRATION. L'existence de H_{12} résulte du fait que $N_1 + N_2$ est symétrique et de type positif. Soit u une fonction de H_i, et considérons l'application

$$\{N_1 f + N_2 f \in H_{12}; f \in M_K\} \ni N_1 f + N_2 f \to F_u(N_1 f + N_2 f) = \int u f d\xi.$$

Alors

$$\left|\int u f d\xi\right| \leqq \|u\|_{H_i} \cdot \|N_i f\|_{H_i} \leqq \|u\|_{H_i} \cdot \|N_1 f + N_2 f\|_{H_{12}}.$$

Du fait que $\{N_1 f + N_2 f \in H_{12}; f \in M_K\}$ est dense dans H_{12}, F_u peut être prolongée sur H_{12}, et cela est linéaire et bornée sur H_{12}. Il existe donc une fonction u' de H_{12} telle que, quelle que soit f de M_K,

$$(u', N_1 f + N_2 f)_{H_{12}} = \int u f d\xi,$$

d'où $u' = u$. On a évidemment $\|u\|_{H_i} \geqq \|u\|_{H_{12}}$.

D'après la démonstration ci-dessus, on a $H_{12} \supset \{u_1 + u_2;\ u_i \in H_i (i=1, 2)\}$. Soit u une fonction de H_{12}. Alors il existe une suite (f_n) de M_K telle que

$(N_1 f_n + N_2 f_n)$ converge fortement vers u dans H_{12} avec $n \to \infty$. Ayant, quels que soient n, m,

$$\|N_i f_n - N_i f_m\|_{H_i} \leqq \|N_1 f_n + N_2 f_n - N_1 f_m - N_2 f_m\|_{H_{12}} \qquad (i=1, 2),$$

il existe donc une fonction u_i de H_i telle que $(N_i f_n)$ converge fortement vers u_i dans H_i avec $n \to \infty$. Par conséquent, $(N_i f_n)$ converge vers u_i et $(N_1 f_n + N_2 f_n)$ converge vers u presque partout pour ξ sur X, d'où $u = u_1 + u_2$.

Montrons finalement l'énoncé (3). D'après ci-dessus, il suffit de montrer que H_{12} est faiblement régulier si $H_i (i=1, 2)$ l'est aussi. Pour une fonction u de H_{12}, on peut écrire $u = u_1 + u_2$, où $u_1 \in H_1$ et $u_2 \in H_2$. Soit $(u_{i,n})$ une suite de $H \cap L^2$ et qui converge fortement vers u_i dans H_i avec $n \to \infty$. Alors on a

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|(u_{1,n} + u_{2,n}) - (u_1 + u_2)\|_{H_{12}} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} \|u_{1,n} - u_1\|_{H_{12}} + \varlimsup_{n\to\infty} \|u_{2,n} - u_2\|_{H_{12}}$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \|u_{1,n} - u_1\|_{H_1} + \lim_{n\to\infty} \|u_{2,n} - u_2\|_{H_2} = 0,$$

d'où $H \cap L^2$ est dense dans H_{12}. La démonstration est complète.

Dans la proposition 1, si $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, H_{12} est la somme directe de H_1 et de H_2.

Définition 2. Soit H un espace fonctionnel. On dit que H est fort s'il existe une constante $c > 0$ telle que, quelle que soit f de M_K, $\|u_f\|^2 \geqq c \int |f|^2 d\xi$, où u_f est le potentiel dans H.

Proposition 2. *Soit H un espace fonctionnel fort. Alors $H \supset L^2$, et à une fonction u de H, on peut associer une fonction f de L^2, et une seule telle que, quelle que soit v de $H \cap L^2 = L^2$,*

$$(u, v) = \int v f d\xi.$$

Démonstration. Soit u une fonction de L^2, et considérons l'application

$$\{u_f \in H; f \in M_K\} \ni u_f \to \int u f d\xi.$$

Alors elle est linéaire et bornée, car

$$\left|\int u f d\xi\right| \leqq \left(\int |u|^2 d\xi\right)^{1/2} \left(\int |f|^2 d\xi\right)^{1/2} \leqq \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\int |u|^2 d\xi\right)^{1/2} \|u_f\|.$$

De la même manière que dans la proposition 1, on a $u \in H$ et

$$\|u\|^2 \leqq \frac{1}{c} \left(\int |u|^2 d\xi\right).$$

Soit u une fonction de H. Alors il existe une suite (f_n) de M_K telle que (u_{f_n}) converge fortement vers u dans H avec $n\to\infty$. Ayant, quels que soient n, m,

$$\int |f_n - f_m|^2 d\xi \leqq \frac{1}{c} \|u_{f_n} - u_{f_m}\|^2,$$

il existe alors une fonction f de L^2 telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty}\int |f_n - f|^2 d\xi = 0$. On a donc, quelle que soit v de L^2,

$$(u, v) = \int v f d\xi.$$

L'unicité de f en résulte immédiatement, et la démonstration est ainsi complète.

Posons, quels que soient e_1, e_2 de E,

$$U(e_1, e_2) = \int_{e_1 \cap e_2} d\xi,$$

U est le noyau de l'espace fonctionnel L^2. Un espace fonctionnel H à noyau positif est fort si et seulement si $N - cU$ est de type positif, où c est une constante positive, et où N est le noyau de H.

Contractions normales: Soient u et v fonctions sur X. On dit que v est une contraction normale de u si, quels que soient x, y de X, $|v(x)| \leqq |u(x)|$ et $|v(x) - v(y)| \leqq |u(x) - u(y)|$, et les contractions normales opérent dans un espace fonctionnel H si, quelle que soit u de H et quelle que soit v une contraction normale de u et à valeurs réelles, $v \in H$ et $\|v\| \leqq \|u\|$. On dit, en particulier, que la contraction module opère dans H si, quelle que soit u de H, $|u|$ appartient à H et si sa norme est $\leqq \|u\|$.

Un espace de Dirichlet est, par définition, un espace fonctionnel régulier et dans lequel les contractions normales opèrent (cf. [1]).

Principe de domination relatif: Soient N_1 et N_2 deux noyaux. On dit que N_1 satisfait au principe de domination relatif à N_2 si, quelles que soient f, g de M_K^+, $N_1 f \leqq N_2 g$ presque partout pour ξ sur X dès que la même inégalité a lieu presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x) > 0\}$.

En particulier, si $N = N_1 = N_2$, cela devient le principe de domination ordinaire, et un noyau N satisfait au principe complet du maximum si et seulement si, quelle que soit c une constante non-négative, N satisfait au principe de domination relatif à $N + c$.

On connaît qu'un noyau symétrique N est de type positif si N satisfait au principe de domination ordinaire (cf. [5]).

Il est bien connu que la contraction module (resp. les contractions normales) opère dans un espace fonctionnel H, il faut et il suffit que H soit à noyau positif et que son noyau satisfasse au principe de domination ordinaire (resp. au principe complet du maximum) (cf. [2] et [3]).

Noyaux élémentaires et familles résolvanetes: Un noyau N est, par définition, élémentaire s'il existe une constante positive c et un autre noyau $\tilde{N}$ tels que

$$N = c \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n,$$

où $(\tilde{N})^0 = U$ ou $(\tilde{N})^0 = 0$ d'accord avec $\tilde{N} \neq 0$ ou $\tilde{N} = 0$, et où $(N)^n = (N)^{n-1} \cdot N$ $(n \geqq 1)$.

On dit que $\tilde{N}$ est le générateur de N. Il est évident que N est symétrique si et seulement si $\tilde{N}$ est symétrique.

Remarque. Un noyau élémentaire et symétrique est de type positif, car il satisfait au principe de domination ordinaire.

Une famille $(N_p)_{p \geqq 0}$ est dit d'être résolvante si, quels que soient $p \geqq 0$, $q > 0$,

$$N_p - N_q = (q-p) N_p \cdot N_q \text{ (Equation résolvante).}$$

Pour un noyau N, s'il existe une famille résolvante (N_p) avec $\lim_{p \to 0} N_p = N_0 = N$, cela est unique et s'appelle la résolvante associée au noyau N.

Remarque. Si, pour un noyau N, il existe la résolvante associée au noyau N, alors, quel que soit p un nombre positif, $N + \frac{1}{p} U$ est élémentaire. Cela résulte immédiatement de l'équation résolvante.

2. Les noyaux d'ordre fractionnaire

On commencera d'abord avec les noyaux d'ordre fractionnaire associés au noyau élémentaire et symétrique:

THÉORÈME 1. *Soit N un noyau symétrique, élémentaire et dont le générateur est de type positif. Alors il existe une famille $(N_\alpha)_{0 \leqq \alpha \leqq 1}$ des noyaux symétriques et élémentaires, et une seule telle que l'on ait $N_0 = U$, $N_1 = N$ et, quels que soient $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ avec $\alpha + \beta \leqq 1$,*

$$N_\alpha \cdot N_\beta = N_{\alpha+\beta},$$

et que l'application $\alpha \geqq 0 \to N_\alpha$ soit continue pour la topologie dans $[N]$.

LEMME 1. *Soit $\tilde{N}$ un noyau symétrique et de type positif. Si $U - \tilde{N}$ est de type positif, $(\tilde{N})^n - (\tilde{N})^{n+1}$ l'est aussi.*

En effect, soit f une fonction de M_K. Alors, quelle que soit g de M_K,

$$\left|\int \tilde{N}f(x)g(x)d\xi(x)\right| \leqq \left(\int \tilde{N}f(x)f(x)d\xi(x)\right)^{1/2}\left(\int \tilde{N}g(x)g(x)d\xi(x)\right)^{1/2}$$

$$\leqq\left(\int |f|^2 d\xi\right)^{1/2}\left(\int |g|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

La fonction g étant quelconque, on a $\tilde{N}f \in L^2$ et $\int |\tilde{N}f|^2 d\xi \leqq \int |f|^2 d\xi$. M_K *est* dense dans L^2, et donc, quelle que soit f de L^2, $\tilde{N}f$ est défini et on a $\int |\tilde{N}f|^2 d\xi \leqq \int |f|^2 d\xi$. Si $n=2m$, on a, quelle que soit f de M_K,

$$\int (\tilde{N})^n f(x)f(x)d\xi(x) - \int (\tilde{N})^{n+1} f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$=\int (\tilde{N})^m f(x)(\tilde{N})^m f(y)(U(dx,\ dy)-\tilde{N}(dx,\ dy)) \geqq 0.$$

Dans le cas où $n=2m+1$, il suffit de montrer que $\tilde{N}-(\tilde{N})^2$ est de type positif. On a, quelle que soit f de M_K,

$$\int \tilde{N}f(x)f(x)d\xi(x) - \int (\tilde{N})^2 f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$=\int (\tilde{N})^2 f(x)f(x)d\xi(x) - \int (\tilde{N})^3 f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$+\iint (f(x)-\tilde{N}f(x))(f(y)-\tilde{N}f(y))\tilde{N}(dx,\ dy)$$

$$\geqq \int (\tilde{N})^2 f(x)f(x)d\xi(x) - \int (\tilde{N})^3 f(x)f(x)d\xi(x) \geqq 0.$$

Démonstration du Théorème 1. On peut supposer que N est de la forme

$$N=\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{N})^n,$$

où $\tilde{N}$ est le générateur de N. Pour un nombre $0<\alpha\leqq 1$, on pose

$$\widetilde{N_\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(\tilde{N})^n,$$

et alors, cela est un noyau symétrique. $U-\tilde{N}$ est évidemment de type positif, et en utilisant le lemme 1, quel que soit n un entier positif, $(\widetilde{N_\alpha})^n$ a un sens, et on obtient que $(\tilde{N})^n-(\widetilde{N_\alpha})^n$ est de type positif. Par conséquent, quelle que soit f de L^2, $\widetilde{N_\alpha}f$ est défini et appartient à L^2. D'après l'inégalité $\int |\widetilde{N_\alpha}f|^2 d\xi \leqq \int |f|^2 d\xi$, il existe un noyau symétrique, élémentaire et de la forme

$$N_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{N}_\alpha)^n.$$

Soient α, β nombres positifs avec $\alpha+\beta \leqq 1$. La multiplication $\widetilde{N_\alpha} \cdot \widetilde{N_\beta}$ a un sens et $\widetilde{N_\alpha} \cdot \widetilde{N_\beta} = \widetilde{N_\alpha} \cdot \widetilde{N_\beta}$. On a donc

$$(U - \widetilde{N_\alpha}) \cdot (U - \widetilde{N_\beta}) = U - \widetilde{N_{\alpha+\beta}}.$$

Montrons que la multiplication $N_\alpha \cdot N_\beta$ a un sens. Pour un entier positif n, $N_\alpha \cdot (\widetilde{N_\beta})^n$ a un sens. D'après le calcul élémentaire, on a, quel que soit m un entier positif,

$$N - N_\alpha \cdot \sum_{i=0}^{m} (\widetilde{N_\beta})^i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\widetilde{N})^n,$$

où a_n est une constante positive, et par suite, $N_\alpha \cdot N_\beta$ a un sens. Par conséquent, il en résulte immédiatement que

$$N_\alpha \cdot N_\beta = N_{\alpha+\beta}.$$

L'application $\alpha \to N_\alpha$ est évidemment continue pour la topologie dans $[N]$, et on peut construire ainsi une famille $(N_\alpha)_{0 \leqq \alpha \leqq 1}$ des noyaux symétriques, élémentaires, et qui satisfait aux conditions de notre théorème.

Montrons finalement l'uncité de cette famille. Soit $(N'_\alpha)_{0 \leqq \alpha \leqq 1}$ une autre famille qui satisfait aux mêmes conditions que ci-dessus, et soit $\widetilde{N'_\alpha}$ le générateur de N'_α. Il suffit de montre que, pour un nombre positif $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, $N_\alpha = N'_\alpha$ dès que $N_{2\alpha} = N'_{2\alpha}$. Ecrivons

$$N'_\alpha = \frac{1}{c_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{N'_\alpha})^n,$$

où c_α est une constante positive, alors,

$$(U - \widetilde{N_\alpha}) \cdot (U - \widetilde{N_\alpha}) = c_\alpha^2 (U - \widetilde{N'_\alpha}) \cdot (U - \widetilde{N'_\alpha}) = U - \widetilde{N_{2\alpha}},$$

et, d'après $\widetilde{N'_\alpha} \cdot \widetilde{N_{2\alpha}} = \widetilde{N_{2\alpha}} \cdot \widetilde{N'_\alpha}$, $\widetilde{N_\alpha} \cdot \widetilde{N'_\alpha} = \widetilde{N'_\alpha} \cdot \widetilde{N_\alpha}$. On a donc

$$(U - \widetilde{N_\alpha} - c_\alpha U + c_\alpha \widetilde{N'_\alpha}) \cdot \left(U - \frac{\widetilde{N_\alpha} + c_\alpha \widetilde{N'_\alpha}}{1 + c_\alpha} \right) = 0.$$

L'égalité $N_\alpha = N'_\alpha$ résultera évidemment du lemme suivant:

Lemme 2. *Soient $\tilde{N}_1$ et $\tilde{N}_2$ deux générateurs de noyau élémentaire. S'ils sont symétriques et $\tilde{N}_1 \cdot \tilde{N}_2 = \tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_1$, alors, quel que soit $0 \leqq c \leqq 1$, $c\tilde{N}_1 + (1-c)\tilde{N}_2$ est aussi un générateur de noyau élémentaire.*

En effect, on pose, pour une fonction u de M_K,

$$\|u\|_c = \left(\int |u|^2 d\xi - c \int \tilde{N}_1 u(x) u(x) \, d\xi(x) - (1-c) \int \tilde{N}_2 u(x) u(x) \, d\xi(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

et alors, cela est une norme sur M_K, car $\|u\|_0$ et $\|u\|_1$ sont également les normes sur M_K. Par conséquent, M_K est un espace pré-hilbertien par la norme $\|\cdot\|_c$. Pour un compact K de X, il existe deux constantes positives $A_0(K)$ et $A_1(K)$ telles que, quelle que soit u de M_K,

$$\int_K |u|\,d\xi \leqq A_0(K)\|u\|_0 \text{ et } \int_K |u|\,d\xi \leqq A_1(K)\|u\|_1,$$

car il existe un espace fonctionnel au noyau $\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{N}_i)^n$ $(i=1, 2)$, et par suite,

$$\int_K |u|\,d\xi \leqq (cA_0(K)+(1-c)A_1(K))\|u\|_c.$$

Par conséquent, la complété H_c de M_K par la norme $\|\cdot\|_c$ est un espace fonctionnel, et donc, il est facile de voir que le noyau

$$\sum_{n=0}^{\infty}(c\tilde{N}_1+(1-c)\tilde{N}_2)^n$$

est défini et qu'il est le noyau de H_c.

D'après le lemme 2, la démonstration du théorème 1 est complète.

On dit que N_α est le noyau d'ordre α associé au noyau N.

THÉORÈME 2. *Soit N un noyau faiblement régulier (resp. régulier) et satisfaisant au principe de domination. Il existe alors une famille $(N_\alpha)_{0\leqq\alpha\leqq 1}$ des noyaux faiblement réguliers (resp. réguliers), qui satisfont au principe de domination, et une seule telle que l'on ait $N_0=U$, $N_1=N$ et, quels que soient α, β nombres non-négatifs avec $\alpha+\beta\leqq 1$,*

$$N_\alpha \cdot N_\beta = N_{\alpha+\beta}$$

et que l'application $(0, 1] \ni \alpha \to N_\alpha$ soit continue pour la topologie dans $[N]$.

On préparera d'abord quelques lemmes.

LEMME 3. *Soit N un noyau symétrique. Alors, pour qu'il existe la résolvante $(N_p)_{p\geqq 0}$ associée au noyau N, il faut et il suffit que N satisfasse au principe de domination ordinaire et que N soit faiblement régulier.*

On connaît que la condition est nécessaire (cf. [5]). Montrons que la condition est suffisante. D'après la proposition 2, pour un nombre positif p, l'espace fonctionnel H_p au noyau $N+\frac{1}{p}U$ contient L^2 et L^2 est dense dans H_p (cf. la proposition 1). Soit e un ensemble relativement compact de E. Alors $Nc_e \in H_p$, où c_e est la fonction caractéristique de e, et, quelle que soit f de M_K^+, $Nf+\frac{1}{p}f \leqq Nc_e$ presque partout pour ξ sur X dès que la même inégalité a lieu presque partout pour ξ sur $\{x \in X; f(x)>0\}$. Nc_e est donc un potentiel pur dans H_p, et par suite, il existe une fonction non-négative $f_{p,e}$ de L^2, et une seule telle que, quelle que soit v de L^2,

$$(Nc_e.\ v)_{H_p}=\int vf_{p,e}d\xi,$$

où $(\cdot, \cdot)_{H_p}$ est le produit scalaire de H_p. D'autre part, $Nf_{p,e}$ a un sens et $Nc_e \geqq Nf_{p,e}+\frac{1}{p}f_{p,e}$, car, quelle que soit f une fonction de M_K^+ et avec $f\leqq f_{p,e}$, on a, pour toute $v\geqq 0$ de H_p,

$$(Nc_e, v)_{H_p}\geqq (Nf+\frac{1}{p}f, v)_{H_p},$$

d'où $Nc_e\geqq Nf+\frac{1}{p}f$. On a donc $Nf_{p,e}+\frac{1}{p}f_{p,e}\in H_p$ et, quelle que soit v de H_p,

$$(Nc_e, v)_{H_p}=(Nf_{p,e}+\frac{1}{p}f_{p,e}, v)_{H_p},$$

d'où $Nc_e=Nf_{p,e}+\frac{1}{p}f_{p,e}$, car L^2 est dense dans H_p.

Posons, pour une couple (e_1, e_2) des ensembles relativement compacts de E,

$$N_p(e_1, e_2)=\frac{1}{p}\int_{e_1}f_{p,e_2}d\xi,$$

alors, N_p peut être prolongé sur $E\times E$, et cela est évidemment un noyau relatif à X et à ξ. Soient e_1, e_2 ensembles relativement compacts de E. Alors

$$\int_{e_2}Nc_{e_1}(x)d\xi(x)=\Big(Nc_{e_1}, Nc_{e_2}+\frac{1}{p}c_{e_2}\Big)_{H_p}=(Nc_{e_1}, Nc_{e_2})_{H_p}+N_p(e_2, e_1)$$

et

$$\int_{e_1}Nc_{e_2}(x)d\xi(x)=\Big(Nc_{e_2}, Nc_{e_1}+\frac{1}{p}c_{e_1}\Big)_{H_p}=(Nc_{e_2}, Nc_{e_1})_{H_p}+N_p(e_1, e_2).$$

D'après la symétricité de N, N_p est aussi symétrique. La multiplication $N\cdot N_p$ est définie et

$$N=pN\cdot N_p+N_p.$$

Par conséquent, quels que soient $p>0$, $q>0$,

$$N_p-N_q=(q-p)N_p\cdot N_q.$$

On a donc, quelle que soit f de M_K,

$$0\leqq p\int N_pf(x)f(x)d\xi(x)\leqq\int |f|^2d\xi,$$

et, du fait que N est iaiblement régulier, il résulte immédiatement que $\lim_{p\to 0} N_p = N$, d'où la famille (N_p) est la résolvante associée au noyau N.

Lemme 4. *Soient N_1 et N_2 deux noyaux symétriques et élémentaires, et soient $\tilde{N}_1$ et $\tilde{N}_2$ leur générateurs. Supposons ensuite qu'il existe une constante positive $c<1$ telle que, quelle que soit f de M_K,*

$$0 \leqq \int \tilde{N}_i f(x) f(x)\, d\xi(x) \leqq c \int |f|^2 d\xi \qquad (i=1, 2)$$

et que $\tilde{N}_1 \cdot \tilde{N}_2 = \tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_1$. Si $N_1 - N_2$ est de type positif, alors, quel que soit $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $(N_1)_\alpha - (N_2)_\alpha$ est aussi de type positif, où $(N_i)_\alpha$ est le noyau d'ordre α associé au noyau N_i $(i=1, 2)$.

On désigne par $\widetilde{(N_i)}_\alpha$ le générateur de $(N_i)_\alpha$ $(i=1, 2; 0 \leqq \alpha \leqq 1)$, et on écrit

$$N_i = c_i \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N}_i)^n,$$

où c_i est une constante positive. On a alors

$$(N_i)_\alpha = c_i^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{(N_i)_\alpha})^n.$$

On a, quelle que soit f de M_K,

$$\int N_1 f(x) f(x)\, d\xi(x) - \int N_2 f(x) f(x)\, d\xi(x)$$

$$= \int |(N_1)_{\frac{1}{2}} f(x)|^2 d\xi(x) - \int |(N_2)_{\frac{1}{2}} f(x)|^2 d\xi(x)$$

$$= \iint f(x) f(y) ((N_1)_{\frac{1}{2}} - (N_2)_{\frac{1}{2}}) \cdot ((N_1)_{\frac{1}{2}} + (N_2)_{\frac{1}{2}})(dx, dy),$$

car $\tilde{N}_1 \cdot \tilde{N}_2 = \tilde{N}_2 \cdot \tilde{N}_1$. D'après le lemme 1, on a, quel que soit n un entier positif,

$$0 \leqq \int (\tilde{N}_i)^n f(x) f(x)\, d\xi(x) \leqq c \int (\tilde{N}_i)^{n-1} f(x) f(x)\, d\xi(x) \qquad (i=1, 2),$$

et donc, la multiplication ci-dessous a un sens et on a

$$\frac{1}{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}} (U - \widetilde{(N_1)_{\frac{1}{2}}}) \cdot (U - \widetilde{(N_2)_{\frac{1}{2}}}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{c_1}\, \widetilde{(N_2)_{1/2}} + \sqrt{c_2}\, \widetilde{(N_1)_{1/2}}}{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}} \right)^n \cdot ((N_1)_{\frac{1}{2}} + (N_2)_{\frac{1}{2}})$$

$$= U.$$

Pour une fonction f de M_K, on pose

$$g_{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}\right)^{1/2}(U-\widetilde{(N_1)_{\frac{1}{4}}})\cdot(U-\widetilde{(N_2)_{\frac{1}{4}}})\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sqrt{c_1}\,\widetilde{(N_2)_{1/2}}+\sqrt{c_2}\,\widetilde{(N_1)_{1/2}}}{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2}}\right)_{\frac{1}{2}}\right)^n f,$$

et alors, $g_{\frac{1}{2}}$ appartient à L^2 et on a

$$\int(N_1)_{\frac{1}{2}}f(x)f(x)d\xi(x)-\int(N_2)_{\frac{1}{2}}f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$=\int N_1 g_{\frac{1}{2}}(x)g_{\frac{1}{2}}(x)d\xi(x)-\int N_2 g_{\frac{1}{2}}(x)g_{\frac{1}{2}}(x)d\xi(x)\geqq 0.$$

De la même manière que ci-dessus, on obtient que, quel que soit n un entier positif, $(N_1)_{1/2^n}-(N_2)_{1/2^n}$ est de type positif. Soient n un entier positif et m un autre entier positif $<2^n$. Alors $(N_1)_{m/2^n}-(N_2)_{m/2^n}$ est de type positif. Cela résultera du fait que, quels que soint n, n' entiers positifs,

$$\begin{aligned}&(N_1)_{(1/2^n+1/2^{n'})}-(N_2)_{(1/2^n+1/2^{n'})}\\&\qquad=(N_1)_{1/2^n}\cdot((N_1)_{1/2^{n'}}-(N_2)_{1/2^{n'}})+(N_2)_{1/2^{n'}}\cdot((N_1)_{1/2^n}-(N_2)_{1/2^n})\\&\qquad=(N_1)_{1/(2^{n+1})}\cdot((N_1)_{1/2^{n'}}-(N_2)_{1/2^{n'}})\cdot(N_1)_{1/(2^{n+1})}\\&\qquad\quad+(N_2)_{1/(2^{n'+1})}\cdot((N_1)_{1/2^n}-(N_2)_{1/2^n})\cdot(N_2)_{1/(2^{n'+1})},\end{aligned}$$

d'où $(N_1)_{(1/2^n+1/2^{n'})}-(N_2)_{(1/2^n+1/2^{n'})}$ est de type positif. D'après la continuité des applications $\alpha\to(N_1)_\alpha$ et $\alpha\to(N_2)_\alpha$ pour la topologie dans $[N]$, on arrive à la conclusion que, quel que soit $0\leqq\alpha\leqq 1$, $(N_1)_\alpha-(N_2)_\alpha$ est de type positif.

LEMME 5. *Soit N un noyau symétrique, élémentaire et dont le générateur est de type positif. Alors, pour un nombre $0\leqq\alpha\leqq 1$ et pour un nombre positif c, $c^\alpha U+N_\alpha-(N+cU)_\alpha$ est de type positif.*

En effet, on peut écrire

$$N=\sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{N})^n,$$

où $\tilde{N}$ est le générateur de N, et on peut supposer qu'il existe une constante positive $c<1$ telle que, quelle que soit f de M_K,

$$\int\tilde{N}f(x)f(x)d\xi(x)\leqq c\int|f|_2 d\xi,$$

car, lorsque $b\nearrow 1$,

$$c^\alpha U+\left(\sum_{n=0}^{\infty}(b\tilde{N})^n\right)_\alpha-\left(\sum_{n=0}^{\infty}(b\tilde{N})^n+cU\right)_\alpha\to c^\alpha U+N_\alpha-(N+cU)_\alpha.$$

On a donc, quelle que soit f de L^2, Nf est défini et

$$\int |Nf|^2 d\xi \leqq \left(\frac{1}{1-c}\right)^2 \int |f|^2 d\xi.$$

D'après le calcul élémentaire, on a

$$c^\alpha U + N_\alpha - (N+cU)_\alpha = N_\alpha \cdot \left(c^\alpha (U - \widetilde{N_\alpha}) + U - (c+1)^\alpha \left(U - \left(\widetilde{\frac{N}{c+1}}\right)_\alpha\right)\right)$$

$$= N_\alpha \cdot \left((c^\alpha + 1 - (c+1)^\alpha U - c^\alpha)\tilde{N}_\alpha + (c+1)^\alpha \left(\widetilde{\frac{N}{c+1}}\right)_\alpha\right),$$

où

$$\widetilde{N_\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} (\tilde{N})^n \quad \text{et}$$

$$\left(\widetilde{\frac{N}{c+1}}\right)_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \left(\frac{\tilde{N}}{c+1}\right)^n.$$

On a donc

$$(c^\alpha + 1 - (c+1)^\alpha) U - c^\alpha \widetilde{N_\alpha} + \left(\widetilde{\frac{N}{c+1}}\right)_\alpha$$

$$= (c^\alpha + 1 - (c+1)^\alpha) U - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} (c^\alpha - (c+1)^{\alpha-n}) (\tilde{N})^n.$$

D'après le lemme 1, on obtient que

$$(c^\alpha + 1 - (c+1)^\alpha) U - c^\alpha \widetilde{N_\alpha} + (c+1)^\alpha \left(\widetilde{\frac{N}{c+1}}\right)_\alpha$$

est de type positif, d'où $c^\alpha U + N_\alpha - (N+cU)_\alpha$ est de type positif.

Lemme 6. *Soit N_i un noyau symétrique tel que, quelle que soit f de M_K, $N_i f \in L^2$ et qu'il existe la résolvante $(N_i^{(p)})_{p \geq 0}$ associée au noyau N_i ($i=1, 2$). Si $N_1 - N_2$ est de type positif et si $N_1 \cdot N_2 = N_2 \cdot N_1$, alors, quel que soit $p > 0$, $N_1^{(p)} - N_2^{(p)}$ est aussi de type positif.*

En effet, d'après l'équation résolvante, on a

$$N_i + \frac{1}{p} U = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} (p N_i^{(p)})^n \qquad (i=1, 2).$$

En utilisant $N_1 \cdot N_2 = N_2 \cdot N_1$, on a $N_1^{(p)} \cdot N_2^{(p)} = N_2^{(p)} \cdot N_1^{(p)}$, et donc

$$N_1^{(p)} - N_2^{(p)} = (N_1 - N_2) \cdot (U - p N_1^{(p)}) \cdot (U - p N_2^{(p)}).$$

Cela indique que $N_1^{(p)} - N_2^{(p)}$ est de type positif.

Démonstration du Théorème 2. On remarque d'abord que, quel que soit p un nombre positif, $N+\frac{1}{p}U$ est un noyau symétrique, élémentaire et dont le générateur est de type positif, car, d'après le lemme 3 et l'équation résolvante,

$$N+\frac{1}{p}U=\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}(pN^{(p)})^n,$$

où $(N^{(p)})_{p\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N. D'après le théorème 1, il existe le noyau $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha$ d'ordre $\alpha(0\leqq\alpha\leqq 1)$ associé au noyau $N+\frac{1}{p}U$.

Montrons que, quel que soient $p>0$ et $q>0$, $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha$ est de type positif si $p\leqq q$. Soit ε un nombre positif $<p$. On a alors

$$N^{(\varepsilon)}+\frac{1}{p-\varepsilon}U=\frac{1}{p-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}((p-\varepsilon)N^{(p)})^n$$

et

$$N^{(\varepsilon)}+\frac{1}{q-\varepsilon}U=\frac{1}{q-\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}((q-\varepsilon)N^{(q)})^n.$$

D'après le lemme 1, $\left(N^{(\varepsilon)}+\frac{1}{p-\varepsilon}U\right)_\alpha-\left(N^{(\varepsilon)}+\frac{1}{q-\varepsilon}U\right)_\alpha$ est de type positif, et faisons $\varepsilon\to 0$, on obtient que $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha$ est de type positif.

Soient p et q nombres positifs avec $p\leqq q$. Alors, quelle que soit f de M_K et quel que soit K un compact de X,

$$\int_K\left|\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f\right|d\xi$$

$$=\int\left(\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f\right)f_1 d\xi$$

$$+\int\left(\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f-\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f\right)f_2 d\xi$$

$$\leqq\left(\int\left(\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f\right)f d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\int\left(\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f_1\right.\right.\right.$$

$$\left.-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f_1\right)f_1 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int\left(\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f_2-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f_2\right)f_2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\Big)$$

$$\leqq 2\Big(\int\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$-\int\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)\Big)^{\frac{1}{2}}\left(\int\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f_K(x)f_K(x)d\xi(x)\right)^{\frac{1}{2}},$$

où f_K est la fonction caractéristique de K, et où f_1 et f_2 sont respectivement les fonctions caractéristiques de $\left\{x\in K;\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f(x)-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f(x)>0\right\}$ et de $\left\{x\in K;\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f(x)-\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha f(x)<0\right\}$. Par conséquent, il existe un noyau symétrique N_α tel que $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha$ converge vers N_α dans $[N]$ avec $p\to\infty$. Soit $\alpha\leqq\frac{1}{2}$. On a alors

$$\int\left|\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha f-N_\alpha f\right|^2 d\xi$$

$$\leqq\int\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{2\alpha}f(x)f(x)\,d\xi(x)-\int N_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)\to 0$$

avec $p\to\infty$, et par suite, quels que soient $0<\alpha\leqq\frac{1}{2}$ et $0<\beta\leqq\frac{1}{2}$,

$$N_{\alpha+\beta}=N_\alpha\cdot N_\beta.$$

Seient α, β nombres positifs avec $\alpha+\beta\leqq 1$, et supposons $\alpha>\frac{1}{2}$. On a, d'après ci-dessus,

$$N_{\alpha+\beta}=N_{1/2}\cdot N_{(\beta+\alpha-1/2)}=N_{1/2}\cdot N_{(\alpha-1/2)}\cdot N_\beta=N_\alpha\cdot N_\beta.$$

Montrons ensuite que l'application $(0,1]\ni\alpha\to N_\alpha$ est continue pour la topologie dans $[N]$. D'après le lemme 5, quels que soient $p>0$ et $q>0$,

$$\left(\frac{1}{p}\right)^\alpha U+\left(N+\frac{1}{q}U\right)_\alpha-\left(N+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)U\right)_\alpha$$

est de type positif, et donc, en faisant $q\to\infty$, on obtient que

$$\left(\frac{1}{p}\right)^\alpha U+N_\alpha-\left(N+\frac{1}{p}U\right)_\alpha$$

est de type positif. Pour une fonction f de M_K et pour un nombre $0<\alpha\leqq 1$,

$$\int\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)\searrow\int N_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)$$

et

$$\int\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)-\Big(\frac{1}{p}\Big)^\alpha\int|f|^2d\xi\nearrow\int N_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)$$

avec $p\nearrow\infty$, et par suite, l'application

$$(0, 1] \ni \alpha\rightarrow\int N_\alpha f(x)f(x)d\xi(x)$$

est continue. Soient α et β nombres positifs $\leqq\frac{1}{2}$. On a alors

$$\int|N_\alpha f-N_\beta f|^2d\xi=\int N_{2\alpha}f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$-2\int N_{(\alpha+\beta)}f(x)f(x)d\xi(x)+\int N_{2\beta}f(x)f(x)d\xi(x),$$

et donc, lorsque $\beta\rightarrow\alpha$, $N_\beta f$ converge fortement vers $N_\alpha f$ dans L^2, d'où l'application $(0, 1]\ni\alpha\rightarrow N_\alpha$ est continue pour la topologie dans $[N]$. L'unicité de la famille (N_α) résulte de la même manière que dans le théorème 1.

Soit $\Big(\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha^{(q)}\Big)_{q\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau $\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha$. D'après le lemme 6 et de la même manière que ci-dessus, $\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha^{(q)}$ converge vers un noyau symétrique $N_\alpha^{(q)}$ dans $[N]$ avec $p\rightarrow\infty$. Soit $q>0$. Alors, d'après l'équation résolvante,

$$\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha-\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha^{(q)}=q\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha\cdot\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha^{(q)}$$

$$\geqq q\Big(\Big(N+\frac{1}{p}U\Big)_\alpha^{(q)}\Big)^2.$$

Pour deux nombres positifs $p_1\leqq p_2$ et pour une fonction f de M_K, on a, d'après le lemme 6,

$$\int\Big|\Big(N+\frac{1}{p_1}U\Big)_\alpha^{(q)}f(x)-\Big(N+\frac{1}{p_2}U\Big)_\alpha^{(q)}f(x)\Big|^2d\xi(x)$$

$$\leqq\int\Big(N+\frac{1}{p_1}U\Big)_\alpha^{(q)}\cdot\Big(N+\frac{1}{p_1}U\Big)_\alpha^{(q)}f(x)f(x)d\xi(x)$$

$$-\int\Big(N+\frac{1}{p_2}U\Big)_\alpha^{(q)}\cdot\Big(N+\frac{1}{p_2}U\Big)_\alpha^{(q)}f(x)f(x)d\xi(x),$$

et donc, $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}f$ converge fortement vers $N_{\alpha}^{(q)}f$ dans L^2 avec $p\to\infty$. Ayant, quel que soit $p>0$ et quelle que soit f de M_K,

$$\int\left(N+\frac{1}{p}U\right)^{(q)}f(x)f(x)\,d\xi(x)\leqq\frac{1}{q}\int|f|^2d\xi,$$

on obtient que, quelle que soit f de L^2, $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}f$ est défini et que $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}f$ converge fortement vers $N_{\alpha}^{(q)}f$ dans L^2 avec $p\to\infty$. S oit α un nombre positif $\leqq 1$. Alors

$$\begin{aligned}\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}-\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}&=q\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}\cdot\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}\\&=q\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\left(N+\frac{1}{p}U\right)^{(q)}\cdot\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}$$

D'après la remarque ci-dessus, quelle que soit f de M_K, $\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}\cdot\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha/2}f$ converge fortement vers $N^{(q)}\cdot N_{\alpha/2}f$ dans L^2 avec $p\to\infty$. Par conséquent,

$$N_{\alpha}-N_{\alpha}^{(q)}=qN_{\alpha/2}\cdot N_{\alpha}^{(q)}\cdot N_{\alpha/2}=qN_{\alpha}\cdot N_{\alpha}^{(q)}.$$

Ayant, quel que soit $p>0$ et quelle que soit f de M_K,

$$q\int N_{\alpha/2}\cdot N_{\alpha}^{(q)}\cdot N_{\alpha/2}f(x)f(x)\,d\xi(x)\leqq q\int N_{\alpha/2}\cdot\left(N+\frac{1}{p}U\right)_{\alpha}^{(q)}\cdot N_{\alpha/2}f(x)f(x)\,d\xi(x)\to 0$$

avec $q\to 0$, $(N_{\alpha}^{(q)})_{q\geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N_{α}, d'où N_{α} est faiblement régulier et satisfait au principe de domination.

On montrera finalement que si N est régulier, N_{α} l'est aussi. Voyons $H\cap L^2\subset H_{\alpha}$ pour tout $0\leqq\alpha\leqq 1$, où H et H_{α} sont respectivement les espaces fonctionnels au noyau N et au noyau N_{α}. Pour cela, il suffit de supposer qu'il existe un constante positive C telle que, quelle que soit f de L^2, Nf soit défini et

$$\int Nf(x)f(x)\,d\xi(x)\leqq C\int|f|^2d\xi.$$

En effet, soient $(N^{(p)})_{p\geqq 0}$ la résolvante associée au noyau N et $(N^{(q)})_{\alpha}$ le noyau d'ordre α associé au noyau $N^{(p)}$. On a, quelle que soit f de L_2,

$$\int N^{(p)}f(x)f(x)\,d\xi(x)\leqq\frac{1}{p}\int|f|^2d\xi$$

et $H\cap L^2=H^{(p)}$, où $H^{(p)}$ est l'espace fonctionnel au noyau $N^{(p)}$. D'après le lemme 4, $N_\alpha-(N^{(p)})_\alpha$ est de type positif, et, de la même manière que dans la proposition 1, on a $H_\alpha\supset H_\alpha^{(q)}$, où $H_\alpha^{(q)}$ est l'espace fonctionnel au noyau $(N^{(p)})_\alpha$.

Soit u une fonction de $H\cap L^2$. Alors il existe une suite (f_n) de M_K telle que (Nf_n) converge fortement vers u dans H avec $n\to\infty$. Ayant, quels que soient m et n entiers positifs,

$$\int|N_{1/2}f_m-N_{1/2}f_n|^2d\xi=\int N(f_m-f_n)(x)(f_m(x)-f_n(x))\,d\xi(x),$$

la suite $(N_{1/2}f_n)$ converge fortement vers une fonction $f'_{1/2}$ dans L^2 avec $n\to\infty$. Soit $\frac{1}{2}<\alpha\leqq1$. Alors $(N_\alpha f_n)$ converge aussi fortement vers une fonction f'_α dans L^2 avec $n\to\infty$, car, d'après le lemme 4, quelle que soit f de L^2, $N_{(\alpha-1/2)}f$ est défini, et on a

$$\int N_{(\alpha-1/2)}f(x)f(x)\,d\xi(x)\leqq C^{(\alpha-1/2)}\int|f|^2d\xi \text{ et } N_\alpha f=N_{(\alpha-1/2)}\cdot N_{1/2}f.$$

Pour un nombre $0<\alpha<1$, on considére l'application

$$\{N_\alpha f\in H_\alpha\,;\,f\in M_K\}\ni N_\alpha f\to\lim_{n\to\infty}\int N_{(1-\alpha)}f_n(x)N_\alpha f(x)\,d\xi(x).$$

La limite ci-dessus existe, d'après

$$\int N_{(1-\alpha)}f_n(x)N_\alpha f(x)\,d\xi(x)=\int Nf_n(x)f(x)\,d\xi(x).$$

On a, d'autre part,

$$\int N_{(1-\alpha)}f_n(x)N_\alpha f(x)\,d\xi(x)$$
$$\leqq\left(\int N_\alpha(N_{(1-\alpha)}f_n)(x)N_{(1-\alpha)}f_n(x)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int N_\alpha f(x)f(x)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int N_\alpha(N_{(1-\alpha)}f_n)(x)N_{(1-\alpha)}f_n(x)\,d\xi(x)=\int|f'_{(1-\frac{\alpha}{2})}|^2d\xi.$$

Par conséquent, il est facile de voir $u\in H$, car

$$\int uf\,d\xi=\lim_{n\to\infty}\int N_{(1-\alpha)}f_n(x)N_\alpha f(x)\,d\xi(x)$$

pour toute f de M_K. On obtient ainsi que, quel que soit $0<\alpha<1$, $C_K\cap H_\alpha$ est dense dans C_K. Pour que $C_K\cap H_\alpha$ soit dense dans H_α, il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 7. *Soit H un espace fonctionnel dans lequel la contraction module opère. Si H est faiblement régulier et si $C_K \cap H$ est dense dans C_K, H est régulier.*

En effet, on note H_0 l'adhérent de $C_K \cap H$ dans H, et alors, H_0 est aussi un espace fonctionnel dans lequel la contraction module opére. Pour une fonction u de H_0, il existe une suite (φ_n) de $C_K \cap H$ qui converge fortement vers u dans H avec $n \to \infty$. On a $|\varphi_n| \in C_K \cap H$ et sa norme est $\leqq \|\varphi_n\|$, d'où $|u| \in H_0$ et sa norme est $\leqq \|u\|$. Soient N et N_0 respectivement les noyaux de H et de H_0. En utilisant la résolvante associée au noyau N si c'est nécessaire, on peut supposer $H \subset L^2$. Soient H' et H'_0 respectivement les espaces fanctionnels au noyau $N+U$ et au noyau N_0+U, alors, quelle que soit u de H' (resp. H'_0),

$$\|u\|_{H'} \leqq \left(\int |u|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \text{ (resp. } \|u\|_{H'_0} \leqq \left(\int |u|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty),$$

et H'_0 est évidemment un sous-espace de H'. Soit u une fonction de H'. Alors il existe une suite (u_n) de H_0 qui converge fortement vers u dans L^2 avec $n \to \infty$, car $C_K \cap H$ est dense dans C_K. D'après ci-dessus, (u_n) est de Cauchy dans H'_0, d'où $u \in H'_0$. Par conséquent, $H' = H'_0$ et donc, $N = N_0$, d'où $C_K \cap H$ est dense dans H.

La démonstration du théorème 2 est ainsi complète.

COROLLAIRE. *Si un noyau symétrique N est faiblement régulier et satisfait au principe complet du maximum, alors, quel que soit $0 \leqq \alpha \leqq 1$, le noyau N_α d'ordre α associé au noyau N satisfait aussi au principe complet du maximum.*

On connaît bien qu'un noyau symétrique et élémentaire N satisfait au principe complet du maximum si et seulement si son générateur $\tilde{N}$ est sous-markovien (cf. [2] et [5]), et donc, pour qu'un noyau symétrique et faiblement régulier N satisfasse au principe complet du maximum, il faut et il suffit que, quel que soit $p > 0$, $pN^{(p)}$ soit sous-markovien, $(N^{(p)})$ est la résolvante associée au noyau N. Il est facile de voir que si $pN^{(p)}$ est sous-markovien, alors, quel que soit n un entier positif, $(pN^{(p)})^n$ l'est aussi. On obtient donc que, quel que soit $p > 0$, $\left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha$ satisfait au principe complet du maximum, et par suite, pour tout $q > 0$, $q\left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha^{(q)}$ est sous-markovien, où $\left(\left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha^{(q)}\right)_{q \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau $\left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha$. Faisant $p \to \infty$, on obtient que $qN^{(q)}$ est sous-markovien, où $(N^{(q)})_{q \geqq 0}$ est la résolvante associée au noyau N_α, d'où N_α satisfait au principe complet du maximum.

De la même manière que dans [4], on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Soit N un noyau symétrique faiblement régulier (resp. régulier) et qui satisfait au principe de domination, et soit N_α $(0 \leqq \alpha \leqq 1)$ le noyau d'ordre α associé au noyau N. Pour une mesure positive $\mu(\neq 0)$ sur $[0, 1]$, $N_\mu = \int N_\alpha d\mu(\alpha)$ est aussi faiblement régulier (resp. régulier) et satisfait au principe de domination.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer que N est un noyau symétrique et élémentaire, car, quel que soit $p > 0$, si $\int \left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha d\mu(\alpha)$ est un noyau faiblement régulier et satisfait au principe de domination, N_μ possède les mêmes propriétés que pour $\int \left(N + \frac{1}{p} U\right)_\alpha d\mu(\alpha)$. Par conséquent, on peut supposer

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (\tilde{N})^n,$$

où $\tilde{N}$ est un noyau symétrique et de type positif. D'après le lemme fondamental du [4], on connaît que, pour $0 \leqq t < 1$,

$$\left(\int \frac{1}{(1-t)^\alpha} d\mu(\alpha)\right)^{-1} = \left(\int d\mu\right)\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\right),$$

où a_n est une constante non-négative et $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq 1$. D'après le lemme 1, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{N})^n$ est un générateur de noyau élémentaire, et on a évidemment

$$\int N_\alpha d\mu(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\tilde{N})^n\right)^m.$$

Lorsque N est régulier, il résulte, de la même manière que dans la démonstration du théorème 2, que N_μ est régulier.

D'après ci-dessus, si N est un noyau de Dirichlet, N_μ l'est aussi. Pour un noyau de Dirichlet N, on pose

$$C(N) = \{N_\mu = \int N_\alpha d\mu(\alpha)\,;\ \mu \text{ est une mesure de Radon positive } (\neq 0) \text{ sur } [0, 1]\}$$

et alors, $C(N)$ est le plus petit cône convexe fermé qui contient la famille fractionnaires $(N_\alpha)_{0 \leqq \alpha \leqq 1}$ de N. On ne connait pas s'il existe autres cônes convexes fermés qui sont constitués par noyaux de Dirichlet et contiennent $(N_\alpha)_{0 \leqq \alpha \leqq 1}$.

Références

[1]. A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., **45** (1959), 208-215.

[2]. J. Deny: Principe complet du maximum et contractions, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), 259-272.
[3]. M. Itô: Note sur contractions et principes du maximum, Osaka Math. J., **4** (1967), 217-226.
[4]. ———: Sur la somme des noyaux de Dirichlet, C.R. Acad. Sci. Paris, **271** (1970), 937-940.
[5]. ———: Sur les principes drivers du maximum et le type positif, Nagoya Math. J. (à paraître).

Institut Mathématique
d'Université de Nagoya