HIROSHIMA MATH. J.
8 (1978), 11–30

Opérateurs Accrétifs et ϕ-accrétifs dans un Espace de Banach

Bruce CALVERT et Colette PICARD

(Reçu le 10 mai, 1977)

Le but de cet article est de caractériser la ϕ-accrétivité pour des opérateurs m-accrétifs d'un espace de Banach X. Dans le cas d'un espace de Hilbert cette étude a été faite par H. Brézis (cf. [1], chapitre 4, §4). Dans [4], [16] et [17] la ϕ-accrétivité est étudiée sans supposer l'accrétivité, mais pour une fonction convexe ϕ continue. L'hypothèse d'accrétivité permet de remplacer ϕ par ses régularisées ϕ_μ.

Après les quelques compléments sur la régularisation des fonctions convexes semi-continues inférieurement du paragraphe 1, l'objet des paragraphes 2 et 3 est de prolonger les résultats du cas Hilbertien, d'établir des conditions pour qu'une fonction soit de Liapounov et des propriétés du type "principe du maximum", mais une hypothèse de compacité est utilisée.

Les résultats des paragraphes 4 et 5 sont des généralisations de propriétés de théorie du potentiel de N. Kenmochi, Y. Mizuta et T. Nagai (cf. [9], [10], [11] et [14]) et de B. Calvert (cf. [5]).

Il est à noter que des extensions peuvent être faites dans plusieurs directions: remplacement de l'accrétivité de A par celle de $A+\omega I$, affaiblissement de la condition $R(I+\lambda A)=X$, substitution d'une fonction convexe ψ régulière telle que A soit ψ-accrétif à la norme.

Les auteurs adressent leurs remerciements au Professeur S. Reich pour son aide.

1. Préliminaires sur la régularisation des fonctions convexes s.c.i.

X est un espace de Banach et J est l'application de dualité de X. Le résultat suivant est établi lorsque X est un espace de Hilbert dans [1] par H. Brézis dont nous adoptons les notations.

LEMME 1.1. *Soit ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe, s.c.i. et propre. Pour tout $\lambda>0$ et $x\in X$ on définit ϕ_λ par*

$$\phi_\lambda(x) = \inf\left\{\frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2 + \phi(y);\, y\in X\right\}.$$

Alors

a) ϕ_λ *est convexe continue.*

b) *Pour tout* $x \in X$, $\phi_\lambda(x)$ *croît vers* $\phi(x)$ *quand* λ *décroît vers zéro.*

c) *Etant donné* $x \in X$, $\inf\left\{\frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2+\phi(y);\ y \in X\right\}$ *est atteint en* x_λ *si et seulement si* $\partial\phi(x_\lambda) \cap \lambda^{-1}J(x-x_\lambda) \neq \emptyset$. *Dans ce cas*

$$\partial\phi_\lambda(x) = \partial\phi(x_\lambda) \cap \lambda^{-1}J(x - x_\lambda).$$

DÉMONSTRATION. L'assertion a) est classique.

Démontrons b). Soit $x \in X$. Par définition $\phi_\lambda(x)$ croît quand λ décroît et $\phi_\lambda(x) \leq \phi(x)$. Supposons qu'il existe $c \in \mathbf{R}$, tel que pour tout λ, $\phi_\lambda(x) < c < \phi(x)$. Alors, pour tout λ, il existe y_λ tel que $\frac{1}{2\lambda}\|x-y_\lambda\|^2+\phi(y_\lambda)<c$. Or, puisque ϕ est convexe s.c.i. et propre, elle admet une minorante affine; ainsi il existe $k \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout λ $\phi(y_\lambda) \geq -k\|x-y_\lambda\|-k$. Donc $\|x-y_\lambda\|^2 \leq 2\lambda k\|x-y_\lambda\|+2\lambda k+2\lambda c$; il en résulte que y_λ est borné pour λ borné. Par conséquent $\phi(y_\lambda)$ est minoré pour λ borné et comme $\|x-y_\lambda\|^2 \leq 2\lambda(c-\phi(y_\lambda))$ on en déduit que y_λ converge vers x quand λ tend vers zéro. Par suite $\phi(x) \leq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \phi(y_\lambda) \leq c$, ce qui est contradictoire. Ainsi $\phi_\lambda(x)$ croît, quand λ décroît vers zéro, vers $\phi(x)$. Remarquons que la démonstration précédente utilise seulement l'hypothèse que ϕ admet une minorante affine et est s.c.i..

Démontrons c). Soit $x \in X$. Le sous-différentiel de l'application $y \to \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2+\phi(y)$ est la multiapplication $y \to \frac{1}{\lambda}J(y-x)+\partial\phi(y)$. Ainsi l'application $y \to \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2+\phi(y)$ atteint son minimum en x_λ si et seulement si $\frac{1}{\lambda}J(x_\lambda-x)+\partial\phi(x_\lambda) \ni 0$, c'est à dire $\partial\phi(x_\lambda) \cap \frac{1}{\lambda}J(x-x_\lambda) \neq \emptyset$.

Supposons que $\phi_\lambda(x)=\frac{1}{2\lambda}\|x-x_\lambda\|^2+\phi(x_\lambda)$. Soit $w \in \partial\phi_\lambda(x)$. Alors pour tout z et z' dans X on a

$$\frac{1}{2\lambda}\|z - z'\|^2 + \phi(z') \geq \frac{1}{2\lambda}\|x - x_\lambda\|^2 + \phi(x_\lambda) + (z - x, w).$$

On en déduit d'une part, en prenant $z'=x_\lambda$, que pour tout $z \in X$

$$\frac{1}{2\lambda}\|z - x_\lambda\|^2 \geq \frac{1}{2\lambda}\|x - x_\lambda\|^2+(z - x, w)$$

c'est à dire que $\lambda w \in J(x-x_\lambda)$, et, d'autre part, en prenant $z'=z-(x-x_\lambda)$, que pour tout $z \in X$, $\phi(z-x+x_\lambda) \geq \phi(x_\lambda)+(z-x, w)$, c'est à dire que $w \in \partial\phi(x_\lambda)$. Par conséquent $\partial\phi_\lambda(x) \subset \partial\phi(x_\lambda) \cap \frac{1}{\lambda}J(x-x_\lambda)$. Inversement, soit $w \in \partial\phi(x_\lambda) \cap$

$\frac{1}{\lambda}J(x-x_\lambda)$. Pour tout z et z' dans X on a $\phi(z')\geq\phi(x_\lambda)+(z'-x_\lambda, w)$ et $\frac{1}{2\lambda}\|z-z'\|^2\geq\frac{1}{2\lambda}\|x-x_\lambda\|^2+((z-z')-(x-x_\lambda), w)$. En ajoutant ces deux inégalités et en prenant la borne inférieure pour $z'\in X$ on obtient $\phi_\lambda(z)\geq\phi_\lambda(x)+(z-x, w)$, c'est à dire $w\in\partial\phi_\lambda(x)$. Ainsi $\partial\phi_\lambda(x)=\partial\phi(x_\lambda)\cap\frac{1}{\lambda}J(x-x_\lambda)$.

Notation. On notera T_λ^ϕ la multiapplication qui à $x\in X$ fait correspondre l'ensemble des points x_λ où $\inf\left\{\frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2+\phi(y);\ y\in X\right\}$ est atteint.

LEMME 1.2. *Si pour tout* $k\in\mathbf{R}$, $\{x;\ \|x\|\leq k,\ \phi(x)\leq k\}$ *est faiblement compact, en particulier si* X *est réflexif ou si* ϕ *est inf-faiblement compacte, alors le domaine* $D(T_\lambda^\phi)$ *de* T_λ^ϕ *est* X.

DÉMONSTRATION. Soient $x\in X$ et $\alpha=\inf\left\{\frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2+\phi(y);\ y\in X\right\}$. Il existe une suite (y_n) telle que $\frac{1}{2\lambda}\|x-y_n\|^2+\phi(y_n)\leq\alpha+\frac{1}{n}$. Par conséquent $\phi(y_n)$ est majorée et, comme ϕ est minorée par une fonction affine, (y_n) est bornée. Donc il existe (n_k) telle que (y_{n_k}) converge faiblement vers y_0, et on a $\frac{1}{2\lambda}\|x-y_0\|^2+\phi(y_0)\leq\liminf\frac{1}{2\lambda}\|x-y_n\|^2+\liminf\phi(y_n)\leq\alpha$. Ainsi $y_0\in T_\lambda^\phi(x)$.

Lorsque X est réflexif ou lorsque ϕ est inf-faiblement compacte (c'est à dire que, pour tout $k\in\mathbf{R}$, $\{x;\ \phi(x)\leq k\}$ est faiblement compact (cf. [15])), alors $\{x;\ \|x\|\leq k,\ \phi(x)\leq k\}$ est faiblement compact.

LEMME 1.3. *Soit* S *une contraction de* X *dans* X. *Sont équivalents*:

i) $\phi(Sx)\leq\phi(x)$, *pour tout* $x\in X$

ii) $\phi_\mu(Sx)\leq\phi_\mu(x)$, *pour tout* $\mu>0$ *et* $x\in X$

En effet, ii) implique i), car ϕ_μ croît vers ϕ quand μ tend vers zéro.

Supposons i). Soient $\mu>0$ et $x\in X$. Pour tout $y\in X$, on a

$$\phi_\mu(Sx)\leq\frac{1}{2\mu}\|Sx-Sy\|^2+\phi(Sy)\leq\frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2+\phi(y).$$

Par conséquent $\phi_\mu(Sx)\leq\phi_\mu(x)$.

2. Conditions suffisantes pour qu' une fonction soit de Liapounov

Etant donné un opérateur m-accrétif A de l'espace de Banach X, on note J_λ^A (ou parfois J_λ) sa résolvante, A_λ l'approximation de Yosida, $S(t)$ le semi-groupe sur $\overline{D(A)}$ engendré par A au sens de Crandall et Liggett (cf. [6]) et $S_\lambda(t)$ le semi-groupe sur X engendré par A_λ.

On dit qu'une fonction ϕ convexe s.c.i. et propre est de Liapounov pour

$S(t)$ si $\phi(S(t)x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in \overline{D(A)}$.

PROPOSITION 2.1. *Soient A un opérateur m-accrétif de X et ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. et propre. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) $\phi(J_\lambda^A x) \leq \phi(x)$, *pour tout* $x \in X$ *et* $\lambda > 0$
2) $\phi_\mu(J_\lambda^A x) \leq \phi_\mu(x)$, *pour tout* $x \in X$, $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$
3) $\phi(J_\nu^{A_\lambda} x) \leq \phi(x)$, *pour tout* $x \in X$, $\lambda > 0$ *et* $\nu > 0$
4) $\phi_\mu(J_\nu^{A_\lambda} x) \leq \phi_\mu(x)$, *pour tout* $x \in X$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ *et* $\nu > 0$
5) $(A_\lambda x, w) \geq 0$, *pour tout* $x \in X$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ *et* $w \in \partial\phi_\mu(x)$
6) *Quels que soient* $\mu > 0$ *et* $[x, y] \in A$, *il existe* $w \in \partial\phi_\mu(x)$ *tel que* $(y, w) \geq 0$
7) $\phi(S_\lambda(t)x) \leq \phi(x)$, *pour tout* $x \in X$, $t > 0$ *et* $\lambda > 0$
8) $\phi_\mu(S_\lambda(t)x) \leq \phi_\mu(x)$, *pour tout* $x \in X$, $t > 0$, $\lambda > 0$ *et* $\mu > 0$
9) $(A_\lambda x, w) \geq 0$, *pour tout* $[x, w] \in \partial\phi$ *et* $\lambda > 0$

Ces propriétés impliquent:

10) $\phi_\mu(S(t)x) \leq \phi_\mu(x)$, *pour tout* $x \in \overline{D(A)}$, $t > 0$ *et* $\mu > 0$
11) $\phi(S(t)x) \leq \phi(x)$, *pour tout* $x \in \overline{D(A)}$ *et* $t > 0$

Si $D(A) \subset \operatorname{Int} D(\phi)$, *alors* 1)$\cdots$9) *sont équivalentes* à:

12) *Quel que soit* $[x, y] \in A$, *il existe* $w \in \partial\phi(x)$ *tel que* $(y, w) \geq 0$.

DÉMONSTRATION. Les équivalences 1)$\Leftrightarrow$2), 3)$\Leftrightarrow$4) et 7)$\Leftrightarrow$8) résultent du lemme 1.3.

La propriété 1) implique 3) car

$$\phi(J_\nu^{A_\lambda} x) = \phi\left(x - \frac{\nu}{\nu + \lambda}(x - J_{\lambda+\nu}^A x)\right)$$

$$\leq \frac{\nu}{\nu + \lambda}\phi(x) + \frac{\nu}{\nu + \lambda}\phi(J_{\lambda+\nu}^A x) \leq \phi(x)\,.$$

D'après la proposition 2 de [17], la propriété 2) équivaut à 6) et 4) équivaut à: quel que soit $x \in X$, il existe $w \in \partial\phi_\mu(x)$ tel que $(A_\lambda x, w) \geq 0$. On obtient l'équivalence 4)$\Leftrightarrow$5) en utilisant de plus le lemme suivant:

LEMME 2.1. *Soit B un opérateur partout défini, demi-continu et m-accrétif tel que $\phi(J_\lambda^B x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in X$ et $\lambda > 0$. Alors quel que soit $[x, w] \in \partial\phi$, $(Bx, w) \geq 0$.*

En effet, soit $[x, w] \in \partial\phi$. Pour tout $\lambda > 0$ on a $0 \geq \phi(J_\lambda^B x) - \phi(x) \geq (J_\lambda^B x - x, w)$, d'où $(B_\lambda x, w) \geq 0$. Or $J_\lambda^B x \to x$ quand $\lambda \to 0$; donc $B_\lambda x \rightharpoonup Bx$ quand $\lambda \to 0$ et ainsi $(Bx, w) \geq 0$.

Démontrons l'implication 3)$\Rightarrow$7). Soient $x \in X$, $t > 0$ et $\lambda > 0$. Il résulte de 3) que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi((J_{t/n}^{A_\lambda})^n x) \leq \phi(x)$. Or, d'après [6], $(J_{t/n}^{A_\lambda})^n x \to S_\lambda(t)x$ quand $n \to \infty$. Donc

$$\phi(S_\lambda(t)x) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi((J_{t/n}^{A_\lambda})^n x) \leq \phi(x).$$

La propriété 8) implique 5), car pour $x \in X$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ et $w \in \partial\phi_\mu(x)$,

$$(A_\lambda x, w) = \lim_{t\downarrow 0}\left(\frac{x - S_\lambda(t)x}{t}, w\right) \geq \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(\phi_\mu(x) - \phi_\mu(S_\lambda(t)x)) \geq 0.$$

La propriété 4) implique 2). En effet, d'après [1], $J_\nu^{A_\lambda}x \to J_\nu^A x$ quand $\lambda \to 0$. Par conséquent pour tout $x \in X$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, $\phi_\mu(J_\nu^A x) = \lim_{\lambda\to 0} \phi_\mu(J_\nu^{A_\lambda} x) \leq \phi_\mu(x)$.

La démonstration de l'équivalence 9)$\Leftrightarrow$7) utilise le lemme suivant qui s'inspire d'un résultat que S. Reich a bien voulu nous communiquer.

LEMME 2.2. *Soient X un espace de Banach et C un convexe de X dont la fonction indicatrice est notée I_C. Soient $x \in C$ et $y \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) $\liminf_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} d(x - ty, C) = 0$

ii) *quel que soit* $w \in \partial I_C(x)$, $(y, w) \geq 0$

iii) $-y \in \overline{K}$, *où* $K = \{a(c - x);\ a \geq 0,\ c \in C\}$.

Démonstration du lemme 2.2: Montrons que i)$\Rightarrow$ii). Soit $w \in \partial I_C(x)$. Il existe une suite (t_n) de $\mathbf{R}_+$ et une suite (c_n) de C telles que $\frac{1}{t_n}(x - c_n) - y$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini. Par suite

$$(y, w) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}(x - c_n, w) \geq 0.$$

Montrons que iii)$\Rightarrow$i). Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $-y \in \overline{K}$, il existe $c \in C$ et $a \geq 0$ tel que $\|y + a(c - x)\| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout t tel que $0 < t < \frac{1}{a}$, on a $\frac{1}{t} d(x - ty, C) \leq \frac{1}{t}\|x - ty - ((1 - ta)x + tac)\| < \varepsilon$. Ainsi $\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} d(x - ty, C) = 0$.

Montrons que si $-y \notin \overline{K}$, alors il existe $w \in \partial I_C(x)$ tel que $(y, w) < 0$. L'implication ii)$\Rightarrow$iii) en résulte par négation. Supposons donc que $-y \notin \overline{K}$. Comme $\overline{K}$ est un convexe fermé, d'après le théorème de Hahn-Banach il existe $w \in X^*$ tel que $\sup\{(k, w);\ k \in \overline{K}\} < -(y, w)$. Il en résulte d'une part que $(y, w) < 0$, et d'autre part que $(c - x, w) < -\frac{1}{a}(y, w)$, pour tout $c \in C$ et $a > 0$, ce qui implique $(c - x, w) \leq 0$, pour tout $c \in C$, c'est à dire $[x, w] \in \partial I_C$.

Démontrons l'équivalence 9)$\Leftrightarrow$7). Soit C l'épigraphe de ϕ et B l'opérateur de $X \times \mathbf{R}$ tel que $B = (A_\lambda, 0)$. Le semi-groupe $\Sigma(t)$ engendré par B est $(S_\lambda(t), I)$. Ainsi on a $\phi(S_\lambda(t)x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in X$ et $t > 0$, si et seulement si C est invariant par $\Sigma(t)$, ce qui est équivalent d'après un théorème de Martin (cf. [12]) à

$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} d(\hat{x} - tB\hat{x}, C) = 0$ pour tout $\hat{x} \in C$, c'est à dire d'après le lemme 2.2 précédent à $(B\hat{x}, \hat{w}) \geq 0$ pour tout $[\hat{x}, \hat{w}] \in \partial I_C$, c'est à dire encore, puisque $(w, -1) \in \partial I_C(x, \phi(x))$ si et seulement si $w \in \partial\phi(x)$, à $(A_\lambda x, w) \geq 0$ pour tout $[x, w] \in \partial\phi$.

Ainsi l'équivalence des propriétés 1) à 9) est démontrée.

La propriété 2) implique 10) car pour tout $x \in \overline{D(A)}$, $(J_{t/n}^A)^n x \to S(t)x$ quand $n \to \infty$, d'après [6].

La propriété 10) implique 11) en faisant tendre μ vers zéro.

Enfin, lorsque $D(A) \subset \operatorname{Int} D(\phi)$, les propriétés 12) et 1) sont équivalentes d'après [17].

REMARQUE 2.1. Dans le cas où $D(T_\mu^\phi) = X$ pour tout $\mu > 0$, la démonstration de la proposition 2.1 est beaucoup plus simple, car on obtient facilement l'implication 9)⇒5). En effet, d'après le lemme 1.1 on a alors $\partial\phi_\mu(x) = \partial\phi(x_\mu) \cap \frac{1}{\mu} J(x - x_\mu)$ pour tout $x \in X$ et $x_\mu \in T_\mu^\phi x$. Etant donnés $x \in X$ et $w \in \partial\phi_\mu(x)$ on a $(A_\lambda x_\mu, w) \geq 0$, d'après 9) et $(A_\lambda x - A_\lambda x_\mu, w) \geq 0$, car A_λ est Browder-accrétif, d'où, en ajoutant, $(A_\lambda x, w) \geq 0$.

REMARQUE 2.2. Si on remplace la condition 6) par la condition plus faible: quels que soient $\mu > 0$ et $[x, y] \in A$ tel que $x \notin D(\phi)$ il existe $w \in \partial\phi_\mu(x)$ tel que $(y, w) \geq 0$, alors on a l'implication: $x \in D(\phi) \Rightarrow J_\lambda x \in D(\phi)$.

En effet, si $J_\lambda x \notin D(\phi)$, il existe $w \in \partial\phi_\mu(J_\lambda x)$ tel que $(A_\lambda x, w) \geq 0$. On a alors $\phi_\mu(x) \geq \phi_\mu(J_\lambda x) + (x - J_\lambda x, w) \geq \phi_\mu(J_\lambda x)$. Il en résulte, en faisant tendre μ vers zéro, que $x \notin D(\phi)$. Nous reviendrons sur ce résultat à la remarque 2.3.

REMARQUE 2.3. Dans [13], Martin obtient également des critères d'invariance pour des opréateurs accrétifs en introduisant une application de X dans $\mathscr{P}(X^*)$ associée à un convexe fermé C, définie par

$$J(x; C) = \{w \in X^*;\ \|w\| = 1;\ \forall y \in C,\ 0 \geq d(x, C) + (y - x, w)\}.$$

En fait, posant $\phi(x) = d(x, C)$ et I_C = la fonction indicatrice de C, on a $J(x; C) \subset \partial\phi(x)$, pour tout $x \in X$ et

$$J(x; C) = \begin{cases} \{w \in \partial I_C(x);\ \|w\| = 1\}, & \text{si } x \in C \\ \partial\phi(x), & \text{si } x \notin C \end{cases}$$

Ainsi la proposition 1 de [13] résulte de [15] car ϕ est continue et la proposition 2 de [13] peut être obtenue grâce au lemme 1.1; plus précisément on a $d(x, C) \cdot J(x; C) = d(x, C) \cdot \partial\phi(x) = \mu\partial(I_C)_\mu(x) = \mu\partial I_C(x_\mu) \cap J(x - x_\mu)$, pour tout $x \notin C$ et $x_\mu \in C$ tels que $d(x, C) = \|x - x_\mu\|$.

En outre le résultat de la remarque 2.2 généralise la proposition 5 de [13] dans laquelle $\phi = I_C$.

PROPOSITION 2.2. *On suppose que X^* est uniformément convexe. Soient A un opérateur m-accrétif de X et ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre tels que pour tout $k \in \mathbf{R}_+$, $\overline{D(A)} \cap \{y;\ \|y\| \leq k$ et $\phi(y) \leq k\}$ est compact. On suppose qu'il existe une rétraction contractante P de X sur $\overline{D(A)}$ telle que $\phi(Px) \leq \phi(x)$ pour tout x dans X. Alors, si $\phi(S(t)x) \leq \phi(x)$ pour tout $x \in \overline{D(A)}$ et $t > 0$, alors $\phi(J_\lambda x) \leq \phi(x)$ pour tout $x \in X$.*

DÉMONSTRATION. Soient $x \in D(\phi)$, $\lambda > 0$ et $C = \{y \in X;\ \phi(y) \leq \phi(x)\}$. Pour tout $h > 0$, l'application T_h définie par $T_h(y) = \dfrac{hx + \lambda S(h)Py}{\lambda + h}$, pour $y \in X$, est une contraction stricte et $\phi(T_h y) \leq \dfrac{h}{\lambda + h}\phi(x) + \dfrac{\lambda}{\lambda + h}\phi(y)$. Par conséquent T_h est une contraction stricte du convexe fermé C dans C, donc elle admet un point fixe y_h dans C.

Soit $y \in D(A)$, $t > 0$ et $v = S(t)y$. D'après l'accrétivité de $I - S(h)P$ on a, pour tout $h > 0$,

$$((y_h - S(h)Py_h) - (v - S(h)v),\ J(y_h - v)) \geq 0$$

c'est à dire $\left(\dfrac{x - y_h}{\lambda} - \dfrac{v - S(h)v}{h},\ J(y_h - v)\right) \geq 0$. Comme $\left\|\dfrac{v - S(h)v}{h}\right\|$ est borné quand h tend vers zéro (cf. [2] th. 2), on en déduit que $\|y_h\|$ est borné quand h tend vers zéro.

Ainsi il existe k et h_0 tels que, pour tout $0 < h < h_0$, $y_h \in \overline{\operatorname{conv}(\{x\} \cup \overline{D(A)})}$ $\cap \{y;\ \|y\| \leq k$ et $\phi(y) \leq k\}$, ensemble qui est compact d'après l'hypothèse. Par conséquent y_h a une valeur d'adhérence u qui vérifie $u = Pu \in \overline{D(A)}$, $\phi(u) \leq \phi(x)$ et $\left(\dfrac{x - u}{\lambda} + \dfrac{d}{dt}S(t)y,\ J(u - S(t)y)\right) \geq 0$, pour presque tout $t > 0$. D'aprés la preuve du corollaire 3 de [2], il en résulte que $u \in D(A)$ et que $\dfrac{x - u}{\lambda} \in Au$, c'est à dire que $u = J_\lambda x$. Ainsi la proposition est démontrée.

REMARQUE 2.4. La proposition précédente est encore vraie si on remplace l'hypothèse X^* uniformément convexe par X réflexif, X^* strictement convexe et tels que si $f_n \rightharpoonup f$ dans X^* et $\|f_n\| \to \|f\|$, alors $f_n \to f$, c'est à dire si on suppose que la norme de X est Fréchet différentiable (cf. [8]).

Voici un cas où il existe une rétraction contractante sur $\overline{D(A)}$:

PROPOSITION 2.3. *Soit A un opérateur m-accrétif de X. Si X est réflexif et strictement convexe, alors il existe une rétraction contractante de X sur $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $x \in X$ et $\lambda \in]0, 1]$ on a, d'après l'équation résolvante, $J_1 x = J_\lambda(\lambda x + (1 - \lambda)J_1 x)$ d'où $\|J_\lambda x\| \leq \|J_1 x\| + (1 - \lambda)\|x - J_1 x\|$. Par conséquent, pour tout $x \in X$, $\{J_\lambda x;\ \lambda \in]0, 1]\}$ est borné dans X donc faiblement relativement compact. De plus la famille $\{J_\lambda;\ \lambda \in]0, 1]\}$ d'applications continues de X muni de la topologie forte dans X muni de la topologie faible est équicontinue. Donc, d'après le théorème d'Ascoli, $\{J_\lambda;\ \lambda \in]0, 1]\}$ est relativement compact dans l'espace des applications continues de X fort dans X faible muni de la topologie de la convergence compacte. Ainsi il existe une suite (λ_i) qui converge vers zéro telle que quel que soit $x \in X$, $J_{\lambda_i}x$ converge faiblement vers Px. On a $P(X) \subset \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ car $J_\lambda(X) \subset D(A)$, et P est une contraction car, pour tout x et y dans X,

$$\|Px - Py\| \leq \liminf_{\lambda_i \downarrow 0} \|J_{\lambda_i}x - J_{\lambda_i}y\| \leq \|x - y\|.$$

Soit $D = \{x \in X;\ J_{\lambda_i}x \rightharpoonup x\}$. Alors $D(A) \subset D \subset \overline{\operatorname{conv} D(A)}$ et D est un convexe fermé car, pour x et y dans D, on a

$$\left\|P\left(\frac{x+y}{2}\right) - x\right\| \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \quad \text{et} \quad \left\|P\left(\frac{x+y}{2}\right) - y\right\| \leq \left\|\frac{x-y}{2}\right\|$$

d'où $P\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{x+y}{2}$ puisque X est stictement convexe. Par conséquent $D = \overline{\operatorname{conv} D(A)}$. Ainsi P est une rétraction contractante sur $\overline{\operatorname{conv} D(A)}$.

REMARQUE. Si on suppose que X est uniformément convexe, la proposition précédente donne l'existence d'une rétraction contractante de X sur $\overline{D(A)}$ puisque $\overline{D(A)}$ est convexe (cf. [3]).

CONTREXEMPLE. Voici un contrexemple montrant qu'en général dans la proposition 2.1 la propriété 11) n'implique pas les propriétés 1)⋯9). Nous utilisons le dernier exemple de Crandall et Liggett [6].

Soient $X = \mathbf{R}^2$ muni de la norme $\|(a, b)\| = \max(|a|, |b|)$ et g une application de $[-1, +1]$ dans $\mathbf{R}$ décroissante non linéaire telle que $g(0) = 0$ et $g(-1) = -g(1)$. Soit A_g l'opérateur défini par

$$A_g(a, b) = \begin{cases} (-1, g(-1)), \text{ si } b > a \\ (1, g(1)), \text{ si } b < a \\ \{(x, g(x));\ -1 \leq x \leq 1\}, \text{ si } b = a \end{cases}$$

On vérifie facilement que A_g est m-accrétif et que pour $k \in \mathbf{R}$ la droite $K = \{(a, b);\ ag(-1) + b = k\}$ est invariante par le semi-groupe $S_g(t)$. De plus, considérant $x_0 \in [-1, +1]$ tel que $g(x_0) \neq x_0 g(1)$, pour tout $\lambda > 0$, si $(a, a) + \lambda(x_0, g(x_0)) \in K$ alors $(a, a) \notin K$. Par conséquent, lorsque ϕ est la fonction indicatrice de K, la propriété 1) de la proposition 2.1 n'est pas vérifiée, alors que la propriété 11) l'est.

Compléments à l'implication 12)⇒1) *de la proposition* 2.1. Nous étudions ici dans le cadre hilbertien quelques conditions suffisantes particulières pour que $\phi(J_\lambda^A x) \leq \phi(x)$.

PROPOSITION 2.4. *Soient H un espace de Hilbert, ϕ une application de H dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s. c. i. propre et A un opérateur maximal monotone de H tel que pour tout $\varepsilon > 0$, l'opérateur $A + \varepsilon\partial\phi$ soit maximal monotone. On suppose qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que l'une des trois hypothèses a), b) et c) suivantes soit vérifiée:*

a) *il existe $a \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $x \in D(A) \cap D(\partial\phi)$, $y \in Ax$ et $w \in \partial\phi(x)$ il existe $\hat{w} \in \partial\phi(x)$ tel que $(y, \hat{w}) \geq -c$ et $(w, \hat{w}) \geq a\|w\|^2$.*

b) *d'une part, pour tout $x \in D(A) \cap D(\partial\phi)$, $y \in Ax$ et $w \in \partial\phi(x)$ il existe $\hat{w} \in \partial\phi(x)$ tel que $(y, \hat{w}) \geq -c$ et $(w, \hat{w}) \geq 0$ et d'autre part,*

· *ou bien* (α) *quel que soit $x \in D(\phi)$ et $\lambda > 0$ il existe une suite (x_n) qui converge vers x et telle que $J_\lambda^A x_n \in D(\phi)$.*

· *ou bien* (β) *$D(\phi)$ est ouvert.*

c) *$c = 0$, ϕ est la fonction indicatrice I_K du convexe fermé K tel que* $\operatorname{Int} K \neq \emptyset$ *(dont la frontière est notée ∂K). Pour tout $x \in D(A) \cap \partial K$, $y \in Ax$ et $w \in \partial I_K(x)$, il existe $\hat{w} \in \partial I_K(x)$, $\hat{w} \neq 0$ tel que $(y, \hat{w}) \geq 0$ et $(w, \hat{w}) \geq 0$.*

Alors, pour tout $\lambda > 0$ et $x \in H$, $\phi(J_\lambda^A x) \leq \phi(x) + c\lambda$.

DÉMONSTRATION *avec les hypothèses* a), b) (α) *ou* b) (β). Soient $\lambda > 0$ et $x \in D(\phi)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $z_\varepsilon \in D(A) \cap D(\partial\phi)$, $y_\varepsilon \in Az_\varepsilon$ et $w_\varepsilon \in \partial\phi(z_\varepsilon)$ tels que $z_\varepsilon + \lambda(y_\varepsilon + \varepsilon w_\varepsilon) = x$ et il existe $\hat{w}_\varepsilon \in \partial\phi(z_\varepsilon)$ tel que $(y_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) \geq -c$. On a alors

$$\lambda\varepsilon(w_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) = (x - z_\varepsilon - \lambda y_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) \leq (x - z_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) + c\lambda \leq \phi(x) - \phi(z_\varepsilon) + c\lambda .$$

Par ailleurs $\phi(z_\varepsilon)$ est minoré, car étant donné $\varepsilon' > \varepsilon$, il existe $z_{\varepsilon'} \in D(A) \cap D(\partial\phi)$, $y_{\varepsilon'} \in Az_{\varepsilon'}$ et $w_{\varepsilon'} \in \partial\phi(z_{\varepsilon'})$ tels que $z_{\varepsilon'} + \lambda(y_{\varepsilon'} + \varepsilon' w_{\varepsilon'}) = x$, d'où, d'après la monotonie de A et de $\partial\phi$,

$$\frac{1}{\lambda}\|z_\varepsilon - z_{\varepsilon'}\|^2 \leq -(z_\varepsilon - z_{\varepsilon'}, \varepsilon w_\varepsilon - \varepsilon' w_{\varepsilon'}) \leq (\varepsilon' - \varepsilon)\,(z_\varepsilon - z_{\varepsilon'}, w_{\varepsilon'})$$

$$\leq (\varepsilon' - \varepsilon)(\phi(z_\varepsilon) - \phi(z_{\varepsilon'}))$$

et ainsi $\phi(z_\varepsilon)$ croît quand ε décroît.

Supposons a). On a alors

$$0 \leq \lambda\varepsilon a\|w_\varepsilon\|^2 \leq \lambda\varepsilon(w_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) \leq \phi(x) - \phi(z_\varepsilon) + c\lambda$$

donc $\varepsilon\|w_\varepsilon\|^2$ est borné et ainsi $\varepsilon w_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent $z_\varepsilon \to J_\lambda^A x$ quand $\varepsilon \to 0$ et $\phi(J_\lambda^A x) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \phi(z_\varepsilon) \leq \phi(x) + c\lambda$.

Supposons b) (α). Montrons d'abord que pour tout $u \in H$, si $J_\lambda^A u \in D(\phi)$ alors $J_\lambda^{A+\varepsilon\partial\phi} u \to J_\lambda^A u$ quand $\varepsilon \to 0$. En effet soient $z = J_\lambda^A u$ et $y \in Az$ tels que

$z+\lambda y=u$ et soient $u_\varepsilon \in D(A) \cap D(\partial\phi)$, $y_\varepsilon \in Au_\varepsilon$ et $w_\varepsilon \in \partial\phi(u_\varepsilon)$ tels que $u_\varepsilon+\lambda(y_\varepsilon+\varepsilon w_\varepsilon)=u$. On a

$$\|z-u_\varepsilon\|^2 = -\lambda(y-y_\varepsilon-\varepsilon w_\varepsilon, z-u_\varepsilon) \leq \lambda\varepsilon(w_\varepsilon, z-u_\varepsilon) \leq \lambda\varepsilon(\phi(z)-\phi(u_\varepsilon))$$

donc puisque $\phi(z)<+\infty$ et $\phi(u_\varepsilon)$ minoré, $u_\varepsilon \to z$ quand $\varepsilon \to 0$. D'après b) on a $0 \leq \phi(x)-\phi(z_\varepsilon)+c\lambda$. Or, d'après ($\alpha$), étant donné $\delta>0$ il existe u tel que $\|u-x\|<\frac{\delta}{3}$ et $J_\lambda^A u \in D(\phi)$ et d'après ce qui précède il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $\varepsilon<\varepsilon_0$, $\|J_\lambda^{A+\varepsilon\partial\phi}u-J_\lambda^A u\|<\frac{\delta}{3}$ d'où $\|J_\lambda^{A+\varepsilon\partial\phi}x-J_\lambda^A x\|<\delta$. Donc $J_\lambda^{A+\varepsilon\partial\phi}x \to J_\lambda^A x$ quand $\varepsilon \to 0$ et $\phi(J_\lambda^A x) \leq \phi(x)+c\lambda$.

Supposons b) (β). On a $0 \leq \lambda\varepsilon(w_\varepsilon, \hat{w}_\varepsilon) \leq \phi(x)-\phi(z_\varepsilon)+c\lambda$ et $\|z_\varepsilon-z_{\varepsilon'}\|^2 \leq \lambda(\varepsilon'-\varepsilon)(\phi(z_\varepsilon)-\phi(z_{\varepsilon'}))$. Par conséquent z_ε converge vers Z quand $\varepsilon \to 0$ et $Z \in D(\phi)=\operatorname{Int} D(\phi)$. Comme $\partial\phi$ est borné au voisinage de Z (cf. proposition 2.9 de [1]), $\varepsilon w_\varepsilon$ tend vers zéro quand ε tend vers zéro et donc z_ε tend vers $J_\lambda^A x$, d'où le résultat.

DÉMONSTRATION *avec l'hypothèse* c). Il suffit de montrer que $J_\lambda^A(\operatorname{Int} K) \subset K$, car on en déduit le résultat par continuité de J_λ^A. Soient $\lambda>0$ et $x \in \operatorname{Int} K$. Il existe $z \in D(A) \cap K$, $y \in Az$ et $w \in \partial I_K(z)$ tels que $z+\lambda(y+w)=x$. Nécessairement $z \in D(A) \cap \operatorname{Int} K$ et ainsi le résultat est démontré puisque $w=0$ et $z=J_\lambda^A x$, car sinon $z \in D(A) \cap \partial K$ et d'après l'hypothèse il existe $\hat{w} \in \partial I_k(z)$, $\hat{w} \neq 0$ tel que $(y, \hat{w}) \geq 0$ et $(w, \hat{w}) \geq 0$. On a alors

$$0 \leq \lambda(w, \hat{w}) = (x-z-\lambda y, \hat{w}) \leq (x-z, \hat{w})$$

ce qui est impossible car $(x-z, \hat{w})<0$ puisque $x \in \operatorname{Int} K$, $z \in \partial K$ et $\hat{w} \neq 0$.

3. ϕ-accrétivité et $\partial\phi$-accrétivité pour un opérateur m-accrétif

Soient X un espace de Banach, ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre et A un opérateur de X.

Définitions. On dit que A est *ϕ-accrétif* ssi quels que soient $[x, y]$ et $[\hat{x}, \hat{y}]$ dans A et $\lambda>0$, $\phi(x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})) \geq \phi(x-\hat{x})$. On dit que A est *$\partial\phi$-accrétif* (resp. *B-$\partial\phi$-accrétif*) ssi quels que soient $[x, y]$ et $[\hat{x}, \hat{y}]$ dans A tels que $x-\hat{x} \in D(\partial\phi)$, il existe $w \in \partial\phi(x-\hat{x})$ (resp. quel que soit $w \in \partial\phi(x-\hat{x})$) tel que $(y-\hat{y}, w) \geq 0$. On dit qu'une application S de $C \subset X$ dans X est une *ϕ-contraction* sur C ssi quels que soient x et $\hat{x}$ dans C, $\phi(Sx-S\hat{x}) \leq \phi(x-\hat{x})$.

REMARQUE 3.1. Si A est un opérateur de X tel que pour tout $\lambda>0$, $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ soit une application de X dans $D(A)$ partout définie, la propriété "A ϕ-accrétif" est équivalente à "J_λ est une ϕ-contraction pour tout λ".

REMARQUE 3.2. La définition de la $\partial\phi$-accrétivité apparaît dans [4] et

[1] et celle de la ϕ-accrétivité dans [16] et [17].

THÉORÈME 3.1. *Soient A un opérateur m-accrétif d'un espace de Banach X et ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) *A est ϕ-accrétif*
2) *A est ϕ_μ-accrétif, pour tout $\mu>0$*
3) *A_λ est ϕ-accrétif, pour tout $\lambda>0$*
4) *A_λ est ϕ_μ-accrétif, pour tout $\lambda>0$ et $\mu>0$*
5) *A_λ est B-$\partial\phi_\mu$-accrétif, pour tout $\lambda>0$ et $\mu>0$*
6) *A est $\partial\phi_\mu$-accrétif, pour tout $\mu>0$*
7) *$S_\lambda(t)$ est une ϕ-contraction, pour tout $t>0$ et $\lambda>0$*
8) *$S_\lambda(t)$ est une ϕ_μ-contraction, pour tout $t>0$, $\lambda>0$ et $\mu>0$*
9) *A_λ est B-$\partial\phi$-accrétif, pour tout $\lambda>0$*

Ces propriétés impliquent:

10) *$S(t)$ est une ϕ_μ-contraction sur $\overline{D(A)}$, pour tout $t>0$ et $\mu>0$*
11) *$S(t)$ est une ϕ-contraction sur $\overline{D(A)}$, pour tout $t>0$*

Si $D(A)-D(A)\subset \operatorname{Int} D(\phi)$, alors 1)$\cdots$9) *sont équivalentes à*

12) *A est $\partial\phi$-accrétif.*

Si la norme de X est Fréchet différentiable et s'il existe une rétraction contractante P de X sur $\overline{D(A)}$ telle que $\phi(Px)\leq\phi(x)$ pour tout $x\in X$ et si pour tout $k\in\mathbf{R}$, $\overline{D(A)}\cap\{x;\ \|x\|\leq k,\ \phi(x)\leq k\}$ est compact, alors les propriétés 1) *à* 11) *sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. La méthode utilisée dans le cas hilbertien (cf. [1] proposition 4.7) s'adapte au cas d'un espace de Banach, à condition de démontrer le lemme suivant dans le cas général (la démonstration de [1] ne pouvant être utilisée car elle emploie l'approximation Yosida de $\partial\phi$).

LEMME 3.1. *Soit ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre. On définit l'application Φ sur $X\times X$ en posant*

$$\Phi([x_1, x_2]) = \phi(x_1 - x_2), \quad \textit{pour tout} \quad [x_1, x_2]\in X \times X.$$

Alors Φ est convexe s.c.i. propre et, pour tout $[x_1, x_2]\in X\times X$,

a) $\partial\Phi([x_1, x_2]) = \{[w, -w];\ w\in\partial\phi(x_1 - x_2)\}$, *si* $x_1 - x_2\in D(\partial\phi)$
b) $\Phi_\lambda([x_1, x_2]) = \phi_{2\lambda}(x_1 - x_2)$, *pour tout* $\lambda > 0$
c) $\partial\Phi_\lambda([x_1, x_2]) = \{[w, -w];\ w\in\partial\phi_{2\lambda}(x_1 - x_2)\}$, *pour tout* $\lambda > 0$.

Le théorème résulte des propositions 2.1 et 2.2 et du lemme 3.1.

DÉMONSTRATION *du lemme* 3.1. a) Soient $[x_1, x_2]\in D(\partial\Phi)$ et $[w_1, w_2]\in\partial\Phi([x_1, x_2])$. Quel que soit $[y_1, y_2]\in X\times X$, on a

$$\phi(y_1 - y_2) \geq \phi(x_1 - x_2) + (y_1 - x_1, w_1) + (y_2 - x_2, w_2).$$

En particulier, quel que soit $y_1 \in X$, en prenant $y_2 = y_1 - (x_1 - x_2)$ on obtient $0 \geq (y_1 - x_1, w_1 + w_2)$. Donc $w_1 = -w_2$. Ainsi, quel que soit y_1 et y_2 dans X,

$$\phi(y_1 - y_2) \geq \phi(x_1 - x_2) + (y_1 - x_1 - y_2 + x_2, w_1)$$

c'est à dire que $w_1 \in \partial\phi(x_1 - x_2)$. Inversement, si $w \in \partial\phi(x_1 - x_2)$, alors $[w, -w] \in \partial\Phi([x_1, x_2])$.

b) Par définition de Φ_λ et de ϕ_λ

$$\Phi_\lambda([x_1, x_2]) = \inf\left\{\frac{1}{2\lambda}(\|x_1 - y_1\|^2 + \|x_2 - y_2\|^2) + \phi(y_1 - y_2);\ [y_1, y_2] \in X \times X\right\}$$

$$\phi_{2\lambda}(x_1 - x_2) = \inf\left\{\frac{1}{4\lambda}\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \phi(y);\ y \in X\right\}.$$

D'une part, quel que soit $[y_1, y_2] \in X \times X$, on a

$$\begin{aligned}\phi_{2\lambda}(x_1 - x_2) &\leq \frac{1}{4\lambda}\|x_1 - x_2 - y_1 + y_2\|^2 + \phi(y_1 - y_2)\\ &\leq \frac{1}{2\lambda}(\|x_1 - y_1\|^2 + \|x_2 - y_2\|^2) + \phi(y_1 - y_2)\end{aligned}$$

donc $\phi_{2\lambda}(x_1 - x_2) \leq \Phi_\lambda([x_1, x_2])$. D'autre part, quel que soit $y \in X$, on a, en prenant y_1 et y_2 tels que $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$ et $y_1 - y_2 = y$,

$$\Phi_\lambda([x_1, x_2]) \leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - y_1\|^2 + \phi(y) = \frac{1}{4\lambda}\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \phi(y)$$

donc $\Phi_\lambda([x_1, x_2]) \leq \phi_{2\lambda}(x_1 - x_2)$. Ainsi b) est démontré.

c) résulte de a) et b).

COROLLAIRE 3.1. *On suppose X réflexif et X^* strictement convexe. Soient A et B deux opérateurs m-accrétifs et ϕ-accrétifs. Alors $A+B$ est ϕ-accrétif.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3.1, A et B sont $\partial\phi_\mu$-accrétifs. Or, puisque X est réflexif et X^* strictement convexe, $\partial\phi_\mu$ est univoque. Donc $A+B$ est $\partial\phi_\mu$-accrétif. Il en résulte que $A+B$ est ϕ_μ-accrétif et donc ϕ-accrétif.

Généralisation à une famille d'opérateurs m-accrétifs. Soit $(A(t))_{t \in [0,T]}$ une famille d'opérateurs m-accrétifs tels que $D(A(t)) = D(A(0))$ pour tout t et vérifiant la condition C1 ou C2 de Crandall et Pazy [7]. Soit $U(t, s)$ l'opérateur d'évolution associé à $(A(t))$ et défini par

$$U(t, s)x = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} J_{(t-s)/n}\left(s + i\frac{t-s}{n}\right)x,$$

pour tout $x \in \overline{D(A(0))}$ et $0 \leq s < t \leq T$, et $U(t, t) = x$ (cf. théorème 2.1 de [7]). On note $U_\lambda(t, s)$ l'opérateur d'évolution associé à $(A_\lambda(t))$.

PROPOSITION 3.1. *Les résultats de la proposition* 2.1 *et du théorème* 3.1 *concernant les propriétés* 1) *à* 12) *subsistent si on remplace A par $A(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, $S(t)$ par $U(t, s)$ et $S_\lambda(t)$ par $U_\lambda(t, s)$ pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition 2.1 et le théorème 3.1 à chaque opérateur $A(t)$ pour obtenir l'équivalence des 6 premières propriétés et de la neuvième.

Les implications du type: $\phi(J_\lambda(t)x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in X$, $\lambda > 0$ et $t \in [0, T]$ implique $\phi(U(t, s)x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in \overline{D(A(0))}$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, résultent de la définition de $U(t, s)$ par passage à la limite.

L'implication: $(A_\lambda(t)x, w) \geq 0$, pour tout $[x, w] \in \partial\phi$, $\lambda > 0$ et $t \in [0, T]$ implique $\phi(U_\lambda(t, s)x) \leq \phi(x)$, pour tout $x \in X$, $\lambda > 0$ et $0 \leq s \leq t \leq T$, se démontre de manière analogue à l'implication 9)$\Rightarrow$7) de la proposition 2.1, en utilisant le lemme 2.2 et le résultat suivant de Martin (cf. [13]): l'opérateur d'évolution $U(t, s)$ laisse le fermé C invariant si et seulement si $\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} d(U(t, s)x, C) = 0$ pour tout $x \in C$.

Terminons ce paragraphe par une autre caractérisation de la ϕ-accrétivité qui généralise les caractérisations des opérateurs par rapport auxquels la contraction module ou la contraction T_k opère, obtenues par Kenmochi et Mizuta (cf. [9]) et Calvert (cf. [5]) et que nous détaillerons au paragraphe suivant.

THÉORÈME 3.2. *Soient X un espace de Banach, A un opérateur m-accrétif de X, ϕ une application de X dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre. On suppose que pour tout $\mu > 0$, $D(T_\mu^\phi) = X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) *A est ϕ-accrétif*
ii) *Pour tout $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $x \in X$, $\hat{x} \in X$, $w \in \partial\phi_\mu(\hat{x})$, il existe $t_\mu(\hat{x}) \in T_\mu(\hat{x})$ tel que $(A_\lambda(x + t_\mu(\hat{x})) - A_\lambda x, w) \geq 0$.*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1.1, si $t_\mu(x) \in T_\mu(x)$, on a

$$\partial\phi_\mu(x) = \partial\phi(t_\mu(x)) \cap \frac{1}{\mu} J(x - t_\mu(x)).$$

Supposons i). Soient $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $x \in X$, $\hat{x} \in X$, $w \in \partial\phi_\mu(\hat{x})$ et $t_\mu(\hat{x}) \in T_\mu(\hat{x})$. On a

$$\begin{aligned} 0 &\geq \phi(J_\lambda(x + t_\mu(\hat{x})) - J_\lambda x) - \phi(t_\mu(\hat{x})) \\ &\geq (J_\lambda(x + t_\mu(\hat{x})) - J_\lambda x - t_\mu(\hat{x}), w) \\ &\geq -\lambda(A_\lambda(x + t_\mu(\hat{x})) - A_\lambda x, w), \end{aligned}$$

c'est à dire ii).

Supposons ii). Soient $\lambda>0$, $x\in X$, $\hat{x}\in X$ et $w\in\partial\phi_\mu(x-\hat{x})$. D'après ii) il existe $t_\mu(x-\hat{x})\in T_\mu(x-\hat{x})$ tel que

$$(A_\lambda(\hat{x} + t_\mu(x - \hat{x})) - A_\lambda\hat{x},\ w) \geq 0\,.$$

D'autre part, puisque A_λ est B-accrétif et que $w\in\frac{1}{\mu}J(x-\hat{x}-t_\mu(x-\hat{x}))$,

$$(A_\lambda x - A_\lambda(\hat{x} + t_\mu(x - \hat{x})),\ w) \geq 0\,.$$

En ajoutant ces deux inégalités on obtient $(A_\lambda x-A_\lambda\hat{x},\ w) \geq 0$. Ainsi A_λ est B-$\partial\phi_\mu$-accrétif, c'est à dire, d'après le théorème 3.1 que A est ϕ-accrétif.

4. Applications aux opérateurs m-accrétifs d'un espace de Banach ordonné

Dans ce paragraphe X est un espace de Riesz muni d'une structure d'espace de Banach. On note $x^+=x\vee 0$, $x^-=-(x\wedge 0)$, $|x|=x\vee(-x)$ et K le cône positif de X.

Rappelons que X est dit Banach réticulé si de plus

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| \leq \|y\|\,.$$

On note W_* l'application de X dans $\mathscr{P}(X^*)$ définie par

$$W_*(x) = \{w\in J(x^+);\ w \geq 0,\ (x^-,\ w) = 0\},\ \text{pour tout}\ x\in X.$$

LEMME 4.1. *Soit* $x\in X$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:
i) $W_*(x)\neq\emptyset$
ii) $d(x,\ -K) = \|x^+\|$
et alors $W_*(x)=\partial g(x)$, *où* $g(x)=\frac{1}{2}\|x^+\|^2$.

DÉMONSTRATION. Soit ϕ la fonction indicatrice de $-K$. On a

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}d(x,\ -K)^2 \quad \text{et} \quad \partial\phi(-x^-)\cap J(x^+) = W_*(x)$$

car $w\in\partial\phi(-x^-)$ équivaut à $(y+x^-,\ w)\leq 0$ pour tout $y\in -K$, ce qui équivaut encore à $(x^-,\ w)=0$ et $w\geq 0$.

L'équivalence i)$\Leftrightarrow$ii) résulte alors du lemme 1.1. Dans ce cas

$$\phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x^+\|^2 \quad \text{et} \quad \partial\phi_\lambda(x)=\partial\phi(-x^-)\cap\frac{1}{\lambda}J(x^+)\,.$$

Donc $\lambda\partial\phi_\lambda(x)= W_*(x)$ et ainsi $W_*(x)=\partial g(x)$.

REMARQUE. Si X est un Banach réticulé, W_* est partout définie (cf. [18]

et [16]). Mais la réciproque est inexacte; en effet $\mathbf{R}^2$ muni de la norme

$$\|(a, b)\| = \begin{cases} |a| + |b|, \text{ si } ab \geq 0 \\ \sup(|a|, |b|), \text{ si } ab \leq 0 \end{cases}$$

vérifie les conditions du lemme 4.1 mais n'est pas un Banach réticulé.

Application des paragraphes 2 *et* 3. Les résultats de la proposition 2.1 et du théorème 3.1 sont valables dans le cas particulier où ϕ est la fonction indicatrice de $k-K$, où $k \in X$. Si les propriétés du lemme 4.1 sont vérifiées, on a alors $\phi_\mu(x) = \frac{1}{2\mu}\|(x-k)^+\|^2$, $\mu\partial\phi_\mu(x) = W_*(x-k)$ et $t_\mu(x) = x-(x-k)^+$. En appliquant également le théorème 3.2, on obtient en particulier le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4.1. *On suppose que les propriétés du lemme* 4.1 *sont vérifiées. Soient A un opérateur m-accrétif de X et $k \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) $x \leq \hat{x} + k \Longrightarrow J_\lambda x \leq J_\lambda \hat{x} + k$

ii) $\|(J_\lambda x - J_\lambda \hat{x} - k)^+\| \leq \|(x - \hat{x} - k)^+\|$, *pour tout* $x, \hat{x} \in X$

iii) *Quels que soient* $[x, y]$ *et* $[\hat{x}, \hat{y}]$ *dans* A, *il existe* $w \in W_*(x-\hat{x}-k)$ *tel que* $(y-\hat{y}, w) \geq 0$

iv) $(A_\lambda(x - (\hat{x} - k)^- + k) - A_\lambda x, w) \geq 0$, *pour tout* $\lambda > 0$, $x \in X$, $\hat{x} \in X$ *et* $w \in W_*(\hat{x} - k)$.

REMARQUE 4.1. Pour $k=0$, on retrouve les résultats de théorie du potentiel de [5] sur les caractérisations des opérateurs T-accrétifs, ou à résolvantes croissantes, ou par rapport auxquels la contraction module opère. Lorsque A est un sous-différentiel, on retrouve des résultats de [9].

Une extension analogue du principe de l'enveloppe inférieure (cf. [5]) et certaines de ses propriétés sont établies à la proposition suivante:

PROPOSITION 4.1. *Soient A un opérateur m-accrétif de X, $k \in X$ et $\varepsilon_0 > 0$. On considère les propriétés suivantes*:

1) $(\varepsilon I + A_\lambda)(x \wedge (\hat{x}+k)) \geq (\varepsilon I + A_\lambda)x \wedge (\varepsilon I + A_\lambda)\hat{x}$, *pour tout* $\lambda > 0$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $x \in X$ *et* $\hat{x} \in X$

2) *Quels que soient* $\lambda > 0$, $x \in X$ *et* $\hat{x} \in X$, *si* $x \leq \hat{x} + k$, *alors* $J_\lambda^A x \leq J_\lambda^A \hat{x} + k$

3) $(\varepsilon I + A_\lambda)(x \wedge \hat{x} + k) \geq (\varepsilon I + A_\lambda)x \wedge (\varepsilon I + A_\lambda)\hat{x} + \varepsilon k$, *pour tout* $\lambda > 0$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $x \in X$ *et* $\hat{x} \in X$.

Alors 1) *implique* 2) *et* 2) *implique* 3).

DÉMONSTRATION. L'implication 1)$\Rightarrow$2) résulte du lemme plus général suivant appliqué à l'opérateur $\varepsilon I + A_\lambda$ et de la convergence de $J_\mu^{\varepsilon I + A_\lambda}$ vers J_μ^A lorsque ε et λ tendent vers zéro.

LEMME 4.2. *Soient A un opérateur m-accrétif B-strictement accrétif et $k \in X$. On suppose que quels que soient x et $\hat{x}$ dans $D(A)$, $x \wedge (\hat{x}+k) \in D(A)$. Si $[x, y] \in A$, $[\hat{x}, \hat{y}] \in A$ et $z \in A(x \wedge (\hat{x}+k))$ impliquent $z \geq y \wedge \hat{y}$, alors $x \leq \hat{x}+k$ implique $J_\lambda^A x \leq J_\lambda^A \hat{x}+k$.*

DÉMONSTRATION. Ce lemme est une variante des propositions 3 et 4 de [5] dont nous donnons une autre démonstration.

Soient u et $\hat{u}$ dans X tels que $u \leq \hat{u}+k$. Soient $x = J_\lambda u$, $\hat{x} = J_\lambda \hat{u}$ et $w \in W_*(x - \hat{x} - k)$. On a $x + \lambda y = u$ et $\hat{x} + \lambda \hat{y} = \hat{u}$ avec $y \in Ax$ et $\hat{y} \in A\hat{x}$. Soit $z \in A(x \wedge (\hat{x} + k))$. On a

$$z \geq y \wedge \hat{y} = \frac{1}{\lambda}(u - x) \wedge (\hat{u} - \hat{x}) \geq \frac{1}{\lambda}(u - x) \wedge (u - k - \hat{x})$$

$$\geq \frac{1}{\lambda}\{u - x \vee (\hat{x} + k)\} \geq y - \frac{1}{\lambda}(x - \hat{x} - k)^-$$

d'où, $(y - z, w) \leq 0$. Or $(y - z, w) \geq 0$ car A est B-accrétif. Donc, puisque A est strictement accrétif, $x = x \wedge (\hat{x}+k)$. Ainsi $J_\lambda u \leq J_\lambda \hat{u} + k$.

Démontrons maintenant l'implication 2)$\Rightarrow$3). Soient x et $\hat{x}$ dans X, $\lambda > 0$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Il résulte de 2) que $J_\lambda(x \wedge \hat{x} + k) \leq J_\lambda x \wedge J_\lambda \hat{x} + k$.

Ainsi,

$$\varepsilon(x \wedge \hat{x} + k) + A_\lambda(x \wedge \hat{x} + k)$$

$$\geq \varepsilon(x \wedge \hat{x} + k) + \frac{1}{\lambda}(x \wedge \hat{x} - J_\lambda x \wedge J_\lambda \hat{x})$$

$$\geq \varepsilon k + \frac{1}{\lambda}((\lambda\varepsilon + 1)(x \wedge \hat{x}) - J_\lambda x \wedge J_\lambda \hat{x})$$

$$\geq \varepsilon k + \frac{1}{\lambda}((\lambda\varepsilon + 1)(x - (x - \hat{x})^+) - J_\lambda x + (J_\lambda x - J_\lambda \hat{x})^+)$$

$$\geq \varepsilon k + \frac{1}{\lambda}((\lambda\varepsilon + 1)x - J_\lambda x - ((\lambda\varepsilon + 1)(x - \hat{x}) - J_\lambda x + J_\lambda \hat{x})^+)$$

$$\geq \varepsilon k + (\varepsilon I + A_\lambda)x \wedge (\varepsilon I + A_\lambda)\hat{x}.$$

REMARQUE 4.2. Pour $k=0$, 1) est équivalent à 2) et 2) implique en particulier que A_λ vérifie le principe de l'enveloppe inférieure; on retrouve ainsi des résultats de [5].

5. Caractérisation des sous-différentiels ϕ-accrétifs d'un espace de Hilbert

THÉORÈME 5.1. *Soient H un espace de Hilbert, ϕ et ψ deux applications*

de H dans $]-\infty, +\infty]$ convexes s.c.i. et propres. On note $J_\mu^\phi=(I+\mu\partial\phi)^{-1}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
i) *$\partial\psi$ est ϕ-accrétif*
ii) $\psi(\hat{x}+J_\mu^\phi(x-\hat{x}))+\psi(x-J_\mu^\phi(x-\hat{x}))\leq\psi(x)+\psi(\hat{x})$, *pour tout $x\in H$, $\hat{x}\in H$ et* $\mu>0$.

Démonstration. Remarquons d'abord que ii) est équivalent à

$$\psi(\hat{x} + \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x})) + \psi(x - \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x})) \leq \psi(x) + \psi(\hat{x}).$$

Supposons ii). Soient x et $\hat{x}$ dans H, $\lambda>0$, $y\in\partial\psi(x)$ et $\hat{y}\in\partial\psi(\hat{x})$. On a

$$\psi(x - \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x})) \geq \psi(x) - (y, \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x}))$$

et

$$\psi(\hat{x} + \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x})) \geq \psi(\hat{x}) + (\hat{y}, \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x}))$$

d'où, en ajoutant et appliquant ii), $(y-\hat{y}, \partial\phi_\mu(x-\hat{x}))\geq 0$. Ainsi, d'après le théorème 3.1, $\partial\psi$ est ϕ-accrétif.

Supposons i). Soient x et $\hat{x}$ dans H et $\lambda>0$. D'après le théorème 3.1, $\partial\psi_\lambda$ est B-$\partial\phi$-accrétif, donc, comme $\partial\phi_\mu(x-\hat{x})\in\partial\phi(J_\mu^\phi(x-\hat{x}))$,

$$(\partial\psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x}) + J_\mu^\phi(x - \hat{x})) - \partial\psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x})), \partial\phi_\mu(x - \hat{x})) \geq 0,$$

pour tout t, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}[\psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x})+J_\mu^\phi(x - \hat{x})) - \psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x}))] \geq 0.$$

En intégrant de 0 à μ, on obtient

$$\begin{aligned}&\psi_\lambda(\hat{x} + J_\mu^\phi(x - \hat{x})) - \psi_\lambda(\hat{x})\\ &\leq \psi_\lambda(\hat{x} + \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x}) + J_\mu^\phi(x - \hat{x})) - \psi_\lambda(\hat{x} + \mu\partial\phi_\mu(x - \hat{x})).\end{aligned}$$

On en déduit ii) en faisant tendre λ vers zéro.

Corollaire 5.1. *Soit C un convexe fermé de H et ψ une application de H dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre. On désigne par P_C la projection sur C. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) *Si $x-\hat{x}\in C$, alors $J_\lambda^\psi x-J_\lambda^\psi\hat{x}\in C$, pour tout $\lambda>0$*
ii) $\psi(\hat{x}+P_C(x-\hat{x}))+\psi(x-P_C(x-\hat{x}))\leq\psi(x)+\psi(\hat{x})$ *pour tout x et $\hat{x}$ dans H.*

Démonstration. On applique le théorème précédent en prenant pour ϕ la fonction indicatrice de C, sachant que $J_\lambda^\phi=P_C$.

On obtient de manière analogue le

COROLLAIRE 5.2. *On fait les hypothèses du corollaire* 5.1. *On suppose de plus que C est un cône convexe fermé et soit* $k \in H$. *Sont équivalents*:

i) *Quels que soient* x *et* $\hat{x}$ *dans* H, *si* $x \leq \hat{x}+k$ *alors* $J_\lambda x \leq J_\lambda \hat{x}+k$

ii) $\psi(\hat{x}+(x-\hat{x}-k)-P_{-C}(x-\hat{x}-k))+\psi(x-(x-\hat{x}-k)+P_{-C}(x-\hat{x}-k)) \leq \psi(x)$ $+\psi(\hat{x})$, *pour tout* $x \in H$ *et* $\hat{x} \in H$.

Si de plus $C=C^*=\{y \in H;\ (y,x) \geq 0$, *pour tout* $x \in C\}$ *alors* i) *et* ii) *sont équivalents à*

iii) $\psi(\hat{x}+P_C(x-\hat{x}-k))+\psi(x-P_C(x-\hat{x}-k)) \leq \psi(x)+\psi(\hat{x})$, *pour tout* $x \in H$ *et* $\hat{x} \in H$.

COROLLAIRE 5.3. *Soient* H *un espace de Hilbert et* ϕ *et* ψ *deux applications de* H *dans* $]-\infty, +\infty]$ *convexes s.c.i. propres. On note* $S(t)$ *le semi-groupe engendré par* $\partial\psi$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) $\partial\psi$ *est* ϕ*-accrétif*

ii) $S(t)$ *est une* ϕ*-contraction sur* $\overline{D(\psi)}$ *pour tout* $t>0$ *et on a la propriété*:

(P) $\begin{cases} \textit{Si } x \textit{ et } \hat{x} \textit{ sont dans } \overline{D(\psi)} \textit{ alors } x-J_\mu^\phi(x-\hat{x}) \textit{ et } \hat{x}+J_\mu^\phi(x-\hat{x}) \textit{ sont dans} \\ \overline{D(\psi)} \textit{ pour tout } \mu>0. \end{cases}$

DÉMONSTRATION. L'implication i)⇒ii) résulte de l'implication 1)⇒11) du théorème 3.1 et du théorème 5.1. Montrons que ii)⇒i). L'hypothèse (P) équivaut à

$I_{\overline{D(\psi)}}(\hat{x}+J_\mu^\phi(x-\hat{x}))+I_{\overline{D(\psi)}}(x-J_\mu^\phi(x-\hat{x})) \leq I_{\overline{D(\psi)}}(x)+I_{\overline{D(\psi)}}(\hat{x})$, pour tout $x \in H$ et $\hat{x} \in H$. D'après le théorème 5.1, ceci signifie que $\partial I_{\overline{D(\psi)}}$ est ϕ-accrétif, ou encore que $\phi(P_{\overline{D(\psi)}}x-P_{\overline{D(\psi)}}\hat{x}) \leq \phi(x-\hat{x})$, pour tout $x \in H$ et $\hat{x} \in H$. En appliquant la proposition 4.7 de Brézis [1] on en déduit i).

PROPOSITION 5.1. *Soient* H, ϕ, ψ *et* (P) *comme au corollaire précédent. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

i) $\partial\psi$ *est* ϕ*-accrétif*

ii) (P) *et* $(\partial\psi_\lambda(x)-\partial\psi_\lambda(\hat{x}),\ \partial\phi_\mu(x-\hat{x})) \geq 0$, *pour tout* $x, \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$ *et* $\lambda, \mu>0$

iii) (P) *et* $(\partial\psi^\circ(x)-\partial\psi^\circ(\hat{x}),\ \partial\phi_\mu(x-\hat{x})) \geq 0$, *pour tout* $x, \hat{x} \in D(\partial\psi)$ *et* $\mu>0$

iv) (P) *et* $\phi_\mu(J_\lambda^\psi x-J_\lambda^\psi \hat{x}) \leq \phi_\mu(x-\hat{x})$, *pour tout* $x, \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$ *et* $\lambda, \mu>0$

v) (P) *et* $\phi(J_\lambda^\psi x-J_\lambda^\psi \hat{x}) \leq \phi(x-\hat{x})$, *pour tout* $x, \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$ *et* $\lambda>0$

vi) (P) *et* $(\partial\psi_\lambda(x+J_\mu^\phi \hat{x})-\partial\psi_\lambda(x),\ \partial\phi_\mu(\hat{x})) \geq 0$, *pour tout* $x \in \overline{D(\psi)}$, $x+J_\mu^\phi \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$ *et* $\lambda, \mu>0$

vii) $\psi_\lambda(\hat{x}+J_\mu^\phi(x-\hat{x}))+\psi_\lambda(x-J_\mu^\phi(x-\hat{x})) \leq \psi_\lambda(x)+\psi_\lambda(\hat{x})$, *pour tout* $x, \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$.

DÉMONSTRATION. Les implications i)⇒ii) et i)⇒iv) résultent des théorèmes 5.1 et 3.1. On obtient ii)⇒iii) en faisant tendre λ vers zéro. L'implication iii) ⇒i) résulte de la proposition 4.7 de Brézis [1], en utilisant la caractérisation de (P) de la démonstration du corollaire précédent. On obtient iv)⇒v) en faisant tendre μ vers zéro.

Montrons que v)⇒vi). Soient $x \in \overline{D(\psi)}$ et $x+J_\mu^\phi \hat{x} \in \overline{D(\psi)}$. On a

$$\begin{aligned} 0 &\geq \phi(J_\lambda^\psi(x + J_\mu^\phi \hat{x}) - J_\lambda^\psi x) - \phi(J_\mu^\phi \hat{x}) \\ &\geq (J_\lambda^\psi(x + J_\mu^\phi \hat{x}) - J_\lambda^\psi x - J_\mu^\phi \hat{x}, \partial\phi_\mu(\hat{x})) \\ &= -\lambda(\partial\psi_\lambda(x + J_\mu^\phi \hat{x}) - \partial\psi_\lambda(x), \partial\phi_\mu(\hat{x})) \end{aligned}$$

d'où vi).

Pour établir l'implication vi)⇒vii) on peut faire la même démonstration que pour l'implication i)⇒ii) du théorème 5.1 car, d'après l'hypothèse (P) et la convexité de $\overline{D(\psi)}$, si x et $\hat{x}$ sont dans $\overline{D(\psi)}$ alors, pour tout $t \in [0, \mu]$,

$$\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x}) = \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)\hat{x} + \frac{t}{\mu}(x - J_\mu^\phi(x - \hat{x})) \in \overline{D(\psi)}$$

et

$$\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x}) + J_\mu^\phi(x - \hat{x}) = \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)(\hat{x} + J_\mu^\phi(x - \hat{x})) + \frac{t}{\mu}x \in \overline{D(\psi)}$$

et, d'après vi),

$$(\partial\psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x}) + J_\mu^\phi(x - \hat{x})) - \partial\psi_\lambda(\hat{x} + t\partial\phi_\mu(x - \hat{x})), \partial\phi_\mu(x - \hat{x})) \geq 0.$$

Finalement on obtient vii)⇒i) en faisant tendre λ vers zéro et appliquant le théorème 5.1.

Remarque 5.1. Ces caractérisations généralisent celles obtenues par Kenmochi, Mizuta et Nagai (cf. [11]). En effet les équivalences entre (a_1), (a_2),..., (a_6) et (a_{13}) sont des cas particuliers des théorèmes 5.1, 3.1 et 3.2 dans lesquels on prend $\phi = I_X$ $\left(\text{car alors } J_\mu^\phi = T \text{ et } \phi_\mu = \frac{1}{2\mu}\|I - T\|^2\right)$. Les équivalences entre (a_6) et (a_7) et entre (a_{13}) et (a_{15}) sont des cas particuliers du corollaire 5.3 lorsque $\phi = \frac{1}{2}\|I - T\|^2$ et $\phi = T_X$ respectivement. De même, les équivalences entre (a_8), (a_9), (a_{10}), (a_{11}), (a_{12}), (a_{13}) et (a_{14}) sont des cas particuliers de la proposition 5.1.

Bibliographie

[1] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, Math. Studies 5, North-Holland, 1973.
[2] H. Brézis, On a problem of T. Kato, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 1–6.
[3] H. Brézis and A. Pazy, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math. **8** (1970), 367–383.
[4] B. Calvert, Semigroups in an ordered Banach space, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 311–319.
[5] B. Calvert, Potential theoretic properties for accretive operators, Hiroshima Math. J. **5** (1975), 363–370.
[6] M. Crandall and T. Liggett, Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach space, Amer. J. Math. **93** (1971), 265–298.
[7] M. Crandall and A. Pazy, Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Israel J. Math. **11** (1972), 57–94.
[8] D. Cudia, Rotundity, Proc. Symp. Pure Math. **7** (1963), 77–97.
[9] N. Kenmochi and Y. Mizuta, Potential theoretic properties of the gradient of a convex function on a functional space, Nagoya Math. J. **59** (1975), 199–215.
[10] N. Kenmochi and Y. Mizuta, The gradient of a convex function on a regular functional space and its potential theoretic properties, Hiroshima Math. J. **4** (1974), 743–763.
[11] N. Kenmochi, Y. Mizuta and T. Nagai, Projections onto convex sets, convex functions and their subdifferentials, preprint.
[12] R. H. Martin Jr., Differential equations on closed subsets of a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 399–414.
[13] R. H. Martin Jr., Invariant sets for evolution systems, International conference on differential equations, Academic Press, 1975.
[14] Y. Mizuta and T. Nagai, Potential theoretic properties of the subdifferential of a convex function, Hiroshima Math. J. **7** (1977), 177–182.
[15] J. J. Moreau, Fonctionnelles convexes, Collège de France, 1967.
[16] C. Picard. Opérateurs T-accrétifs, ϕ-accrétifs et génération de semi-groupes non linéaires, Thèse de 3-ème cycle, Orsay 1972.
[17] C. Picard, Opérateurs ϕ-accrétifs et génération de semi-groupes non linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris **275** (1972) 639–641.
[18] P. Phillips, Semigroups of positive contraction operators, Czech. Math. J. **12** (1962) 294–313.

Department of Mathematics,
University of Auckland,
New Zealand
et
Université de Picardie,
U.E.R. de Mathématiques,
33, *rue Saint Leu,*
80039-*Amiens,*
France