HIROSHIMA MATH. J.
12 (1982), 245–248

Métriques invariantes à gauche un groupe de Lie: sur une conjecture de Milnor

Odinete Renée ABIB

(Received February 24, 1981)

Introduction Soit G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La donnée d'une métrique riemannienne invariante à gauche sur G équivaut à la donnée d'un produit scalaire (ou métrique) sur $\mathfrak{g}$; dans ce cas la connexion de Levi-Civita est invariante à gauche et on obtient une application $\nabla: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$:

$$(1) \qquad \langle \nabla_u v, \omega\rangle = (1/2)\{\langle [u, v], \omega\rangle + \langle \mathrm{ad}_\omega u, v\rangle + \langle u, \mathrm{ad}_\omega v\rangle\}$$

vérifiant:

$$[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u, \quad \text{(sans torsion)},$$

et

$$\langle \nabla_u v, \omega\rangle + \langle v, \nabla_u \omega\rangle = 0, \quad (\nabla_u \in o(\mathfrak{g}), \quad \forall u \in \mathfrak{g}),$$

pour tous $u, v, \omega \in \mathfrak{g}$.

L'application $R \in \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes o(\mathfrak{g})$, $R_{uv} = \nabla_{[u,v]} - [\nabla_u, \nabla_v]$, étant la courbure de ∇ et $K(u, v) = \langle R_{uv}u, v\rangle$ la courbure sectionnelle de $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ on a [2]:

(1) $K(u, u) = 0$.

(2) $K(u, v) = K(v, u), \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}$.

(3) $K(u, v) = 0 \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g} \Longleftrightarrow R = 0$.

Le but principal de cette note est la démonstration du résultat suivant conjecturé par Milnor [3]:

THÉORÈME. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle et* $u \in \mathfrak{g}$; u *est dans le centre* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *de* $\mathfrak{g}$ *si, et seulement si,* $K(u, v) \geq 0$ *pour toute métrique et tout* $v \in \mathfrak{g}$.

COROLLAIRE. *Une algèbre de Lie est abélienne si et seulement si* $K(u, v) \geq 0$ *pour toute métrique et pour tous* u, v *dans* $\mathfrak{g}$.

1. Soit $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ une algèbre de Lie métrique, $\{e_i\}_{i \leq n}$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ et $\mathscr{L}_{ijh} = \langle [e_i, e_j], e_h\rangle$ les constantes de sturctures.

PROPOSITION 1. $K(e_i, e_j) = \sum_{h=1}^n \{(1/2)\mathscr{L}_{ijh}(-\mathscr{L}_{ijh} + \mathscr{L}_{jhi} + \mathscr{L}_{hij})$
$-(1/4)(\mathscr{L}_{ijh} - \mathscr{L}_{jhi} + \mathscr{L}_{hij})(\mathscr{L}_{ijh} + \mathscr{L}_{jhi} - \mathscr{L}_{hij}) - \mathscr{L}_{hii}\mathscr{L}_{hjj}\}$.

PREUVE. $K(e_i, e_j) = \langle \nabla_{[e_i,e_j]}e_i - [\nabla_{e_i}, \nabla_{e_j}]e_i, e_j\rangle$; d'autre part,

$$\langle \nabla_{e_h}e_i, e_j\rangle = (1/2)(-\mathscr{L}_{ijh} + \mathscr{L}_{jhi} + \mathscr{L}_{hij}),$$
$$\langle \nabla_{[e_i,e_j]}e_i, e_j\rangle = \textstyle\sum_h (1/2)\mathscr{L}_{ijh}(-\mathscr{L}_{ijh} + \mathscr{L}_{jhi} + \mathscr{L}_{hij}),$$
$$-\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_i, e_j\rangle = -\textstyle\sum_h (1/4)(\mathscr{L}_{ijh} - \mathscr{L}_{jhi} + \mathscr{L}_{hij})(\mathscr{L}_{ijh} + \mathscr{L}_{jhi} - \mathscr{L}_{hij}),$$

et

$$\langle \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_i, e_j\rangle = -\textstyle\sum_h \mathscr{L}_{hii}\mathscr{L}_{hjj}.$$

D'où, le résultat. c.q.f.d.

PROPOSITION 2. *Soit u dans le centre de $\mathfrak{g}$; alors $K(u, v)\geq 0$ pour tout $v\in\mathfrak{g}$.*

PREUVE. On peut supposer $\{u, v\}$ libres et orthonormés.

Soit $\{e_i\}_{i\leq u}$ une base orthonormée de $\mathfrak{g}$ avec $e_1=u$, $e_2=v$; d'après la proposition 1 on a, $K(e_1, e_2)=(1/4)\sum_{h=3}^{n}(\mathscr{L}_{2h1})^2\geq 0$. c.q.f.d.

EXEMPLES. (1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension deux non-abélienne et $\{u, v\}$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $[u, v]=\alpha u+\beta v\neq 0$; alors $K(u, v)=-\alpha^2-\beta^2<0$ où la métrique considérée est telle que $\{u, v\}$ soit une base orthonormée.

(2) $\mathfrak{g}$ de dimension cinq, $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ une base telle que: $[e_1, e_2]=e_5$, $[e_1, e_3]=e_3$, $[e_2, e_4]=e_4$; $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})=\boldsymbol{R}\{e_5\}$, l'idéal dérivée $D\mathfrak{g}$ est $\boldsymbol{R}\{e_3, e_4, e_5\}$, $D^2\mathfrak{g}=\{0\}$; donc, $\mathfrak{g}$ est 2-résoluble; l'élément $e_3\notin\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ vérifie $[e_3, x]=\ell(x)e_3$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$ où $\ell(x)=-\mathrm{pr}_1(x)$; ℓ est une forme linéaire surjective et Ker ℓ est un idéal non-abélien de $\mathfrak{g}$; on a $\mathfrak{g}=\mathrm{Ker}\,\ell\oplus\boldsymbol{R}e_1$; on considère la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ telle que $\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$; alors $K(e_1, e_3)=-1<0$; c'est-à-dire la métrique n'est pas plate.

L'exemple 2 fournit un exemple d'une algèbre de Lie résoluble munie d'une métrique qui n'est pas plate (si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie munie d'une métrique plate, $\mathfrak{g}$ est 2-résoluble [3]); de plus, il existe $u\notin\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, $v\in\mathfrak{g}$ tels que $[u, x]=\ell(x)u$, pour tout $x\in\mathfrak{g}$ et $K(u, v)<0$.

2. Preuve du théorème. Supposons $K(u, v)\geq 0$ pour toute métrique et tout $v\in\mathfrak{g}$; le théorème découle du lemme suivant:

LEMMA 1. *Supposons $u\notin\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.*

(a) *S'il existe v dans $\mathfrak{g}$ tel que $[u, v]\notin\boldsymbol{R}\{u, v\}$, alors il existe une métrique $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ telle que $K(u, v)<0$.*

(b) *Si $[u, x]\in\boldsymbol{R}\{u, x\}$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$, alors il existe une métrique $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ et un $v\in\mathfrak{g}$ tel que $K(u, v)<0$.*

PREUVE DE (a). On considère $\{e_i\}_{i\leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$ avec $e_1=u$, $e_2=v$, $e_3=[u, v]$; on pose $[e_i, e_j]=\sum_{h=1}^{n}\mathscr{L}_{ijh}e_h$; soit $\langle\ ,\ \rangle$ une métrique sur $\mathfrak{g}$ telle que $\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$; alors $K(e_1, e_2)=(-3/4)+(1/2)(\mathscr{L}_{231}-\mathscr{L}_{132})+\sum_{h=3}^{n}(1/4)(\mathscr{L}_{2h1}+$

$\mathscr{L}_{1h2})^2 - \mathscr{L}_{h11}\mathscr{L}_{h22}$. Pour $\varepsilon > 0$ réel, on considère la base $\{b_i\}_{i \leq n}$ telle que $b_1 = \varepsilon e_1$, $b_2 = \varepsilon e_2$, $b_i = \varepsilon^2 e_i$ pour $i \geq 3$; alors, $[b_1, b_2] = b_3$, $[b_i, b_h] = \sum_{s \geq 1} \beta_{ihs} b_s = \varepsilon^2 \mathscr{L}_{ih1} b_1 + \varepsilon^2 \mathscr{L}_{ih2} b_2 + \sum_{s \geq 3} \varepsilon \mathscr{L}_{ihs} b_s$ pour $i = 1, 2$ et $h \geq 3$, et $[b_i, b_h] = \varepsilon^3 \mathscr{L}_{ih1} b_1 + \varepsilon^3 \mathscr{L}_{ih2} b_2 + \sum_{s \geq 3} \varepsilon^2 \mathscr{L}_{ihs} b_s$ pour $3 \leq i < h \leq n$. On considère sur $\mathfrak{g}$ la métrique $\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon$ telle que $\langle b_i, b_j \rangle_\varepsilon = \delta_{ij}$; alors,

$$K_{\mathfrak{g}_\varepsilon}(b_1, b_2) = (-3/4) + (1/2)(\beta_{231} - \beta_{132}) + \textstyle\sum_{h \geq 3} \{(1/4)(\beta_{2h1} + \beta_{1h2})^2 - \beta_{h11}\beta_{h22}\},$$

où $\mathfrak{g}_\varepsilon = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ], \langle\ ,\ \rangle_\varepsilon)$; lorsque $\varepsilon \to 0$, on obtient une base $\{b_i\}_{i \leq n}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant, $[b_1, b_2] = b_3$, $[b_i, b_j] = 0$, $2 \leq i < j \leq n$; on considère $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ telle que $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$; alors, la courbure sectionnelle $K(b_1, b_2) = -3/4$; par suite, $K_{\mathfrak{g}_\varepsilon}(b_1, b_2) < 0$ pour ε assez voisin de zéro; d'où $K(u, v) < 0$. c.q.f.d.

Preuve de (b). $[u, x] = \ell(x)u + \ell'(x)x$ pour tout x dans $\mathfrak{g}$; l'application linéaire ad_u: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induit, par passage au quotient, une application linéaire φ: $\mathfrak{g}/\boldsymbol{R}u \to \mathfrak{g}/\boldsymbol{R}u$, $\varphi(\bar{x}) = \ell'(x)\bar{x}$; de $\varphi(\lambda\bar{x}) = \lambda\varphi(\bar{x})$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, et $\varphi(\bar{x} + \bar{y}) = \varphi(\bar{x}) + \varphi(\bar{y})$ on tire, $\ell'(\lambda x)\lambda\bar{x} = \lambda\ell'(x)\bar{x}$ et $\ell'(x+y)(\bar{x}+\bar{y}) = \ell'(x)\bar{x} + \ell'(y)\bar{y}$; d'où $\ell'(x) = \mathscr{L}$, $\forall x \in \mathfrak{g}$. Ainsi, $[u, x] = \ell(x)u + \mathscr{L}x$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$; d'où, $\mathscr{L} = -\ell(u)$ et $\operatorname{Ker}\ell$ est un sous-espace de codimension 1.

1$^{\text{er}}$ *cas*: $\mathscr{L} = -\ell(u) = 0$, c'est-à-dire, $u \in \operatorname{Ker}\ell$; on a $[u, x] = \ell(x)u$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $D\mathfrak{g} \subset \operatorname{Ker}\ell$; d'où, $\operatorname{Ker}\ell$ est un idéal (pas forcément abélien) de codimension 1. Soit $v \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \operatorname{Ker}\ell \oplus \boldsymbol{R}v$; on peut choisir v tel que $\ell(v) = 1$; on considère $\{e_i\}_{i \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $e_1 = u$, $e_n = v$ et $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ base de $\operatorname{Ker}\ell$; alors: $[e_1, e_n] = e_1$, $[e_1, e_i] = 0$ pour $i \leq n-1$, $[e_i, e_n] = \sum_{h=1}^{n-1} \mathscr{L}_{inh} e_h$ et $[e_i, e_j] = \sum_{h=1}^{n-1} \mathscr{L}_{ijh} e_h$ pour $2 \leq i \leq n-1$ et $2 \leq j \leq n-1$.

On considère sur $\mathfrak{g}$ la métrique $\langle\ ,\ \rangle$ telle $\{e_i\}_{i \leq n}$ soit orthonormée; alors $K(e_1, e_n) = -1 + (1/4)\sum_{h=2}^{n-1} (\mathscr{L}_{hn1})^2$.

Pour $\varepsilon > 0$ réel, on considère la base $\{b_i\}_{i \leq n}$ avec $b_1 = e_1$, $b_n = e_n$, $b_i = \varepsilon^2 e_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$; on a:

$$[b_1, b_n] = b_1,\ [b_1, b_i] = 0 \text{ pour } 2 \leq i \leq n-1,$$

$$[b_i, b_n] = \varepsilon^2 \mathscr{L}_{in1} b_1 + \textstyle\sum_{s=2}^{n-1} \mathscr{L}_{ins} b_s \text{ et } [b_i, b_j] = \varepsilon^4 \mathscr{L}_{ij1} b_1 + \sum_{h=2}^{n-1} (\varepsilon^2 \mathscr{L}_{ijh}) b_h;$$

donc, si β_{ijh} sont les constantes de structures par rapport à $(b_i)_{i \leq n}$ et $\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon$ métrique sur $\mathfrak{g}$ telle que $\{b_i\}_{i \leq n}$ soit orthonormée, on a:

$$K_{\mathfrak{g}_\varepsilon}(b_1, b_n) = -1 + (1/4)\textstyle\sum_{h=2}^{n-1} (\beta_{hn1})^2.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$ on obtient l'existence d'une base $\{b_i\}_{i \leq n}$ de $\mathfrak{g}$ telle que:

$$[b_1, b_n] = b_1,\ [b_1, b_i] = 0 \text{ pour } i \leq n-1,\ [b_i, b_n] = \textstyle\sum_{s=2}^{n-1} \mathscr{L}_{ins} b_s$$

et $[b_i, b_j] = 0$ pour $2 \leq i < j \leq n-1$.

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ une métrique sur $\mathfrak{g}$ gelle que la base précédente soit orthonormée; alors $K(u, v) = -1 < 0$.

2$^{\text{ème}}$ *cas*: $\mathscr{L} = -\ell(u) \neq 0$, c'est-à-dire, $u \notin \operatorname{Ker} \ell$. On a $[u, x] = \ell(x)u + \mathscr{L}x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$; il existe $v \in \mathfrak{g}$ tel que $[u, v] = \ell(v)u + \mathscr{L}v$ est non-nul; on choisit v.t.q. $\ell(v) = 1$. Considérons $\{e_i\}_{i \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$ avec $e_1 = u$, $e_2 = v$ et $\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$ vecteurs libres de Ker ℓ; alors

$$[e_1, e_2] = e_1 + \mathscr{L}e_2, \qquad [e_1, e_i] = \mathscr{L}e_i,\ 3 \leq i \leq n,$$
$$[e_2, e_i] = \textstyle\sum_{h=1}^{n} \mathscr{L}_{2ih}\, e_h, \quad i \geq 3,$$
$$[e_i, e_j] = \textstyle\sum_{h=1}^{n} \mathscr{L}_{ijh}\, e_h, \quad 3 \leq i < j \leq n.$$

Soit $\langle\ ,\ \rangle$ métrique telle que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$; alors,

$$K(e_1, e_2) = -1 - \mathscr{L}^2 + (1/4) \textstyle\sum_{h \geq 3} (\mathscr{L}_{2h1})^2 - \sum_{h \geq 3} \mathscr{L}_{1h1}\, \mathscr{L}_{2h2}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ réel, on considère $\{b_i\}_{i \leq n}$ base de $\mathfrak{g}$ avec:

$$b_1 = e_1, \quad b_2 = e_2, \quad b_i = \varepsilon^2 e_i \text{ pour } i \geq 3;$$

alors $[b_1, b_2] = b_1 + \mathscr{L}b_2$, $[b_1, b_i] = \mathscr{L}b_i$, $[b_2, b_i] = \varepsilon^2 \mathscr{L}_{2i1} \cdot b_1 + (\varepsilon^2 \mathscr{L}_{2i2}) b_2 + \sum_{h=3}^{n} \mathscr{L}_{2ih} b_h$ et $[b_i, b_j] = \sum_{h=1}^{n} \beta_{ijh}(\varepsilon) b_h$. Soit $\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon$ métrique sur $\mathfrak{g}$ telle que $\langle b_i, b_j \rangle_\varepsilon = \delta_{ij}$; par rapport à cette métrique on a $K_{\mathfrak{g}_\varepsilon}(b_1, b_2) = -1 - \mathscr{L}^2 + (1/4) \sum (\beta_{2h1})^2 - \sum_{h=3}^{n} \beta_{1h1} \beta_{2h2}$; lorsque $\varepsilon \to 0$ on obtient l'existence d'une base $\{b_i\}_i$ de $\mathfrak{g}$ avec: $b_1 = u$, $b_2 = v$, $[b_1, b_2] = b_1 + \mathscr{L}b_2$, $[b_1, b_i] = \mathscr{L}b_i$, $[b_2, b_i] = \sum_{h \geq 3} \mathscr{L}_{2ih}\, b_h$, $[b_i, b_j] = 0$ pour $3 \leq i < j \leq n$. Si on considère $\langle\ ,\ \rangle$ métrique telle que la base précédente soit orthonormée, la courbure sectionnelle $K(u, v)$ est égale à $-1 - \mathscr{L}^2$; d'où, le résultat. c.q.f.d.

References

[1] Hideo Doi, Non-existence of torsion free flat connections on reductive homogeneous space, Hiroshima Math. J. **9** (1979), 321–322.

[2] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Vol. **I**, Interscience, New York, 1963.

[3] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, Advances in Math. **21** (1976), 293–329.

[4] Katsumi Nomizu, Left-invariant Lorentz metrics on Lie groups, Osaka J. Math. **16** (1979), 143–150.

[5] Kagumi Uesu, Scalar curvatures of left invariant metrics on some Lie groups, Hiroshima Math. J. **10** (1980), 323–327.

Institut des Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
34060 *Montpellier-Cedex*