HIROSHIMA MATH. J.
16 (1986), 631–638

Sur les points singuliers d'une courbe analytique

Dédié à Monsieur le professeur Y. Kusunoki
à l'occasion de son soixantième anniversaire

Toshio NISHINO

(Received November 27, 1985)

1. A propos des distributions des valeurs d'une fonction analytique d'une variable complexe, plusieurs propriétés intéressantes ont été trouvées. Tels caractères de la fonction analytique produisent quelquefois des restrictions curieuses en ce qui concerne la forme d'une courbe analytique dans l'espace de deux variables complexes.

Soit D un domaine cylindrique $0<|x|<R$, $0<|y|<\infty$, R étant un nombre positif quelconque, dans l'espace (x, y) et soit C une courbe analytique dans D. $C(x)$ $(0<|x|<R)$ désigne l'ensemble de tous les y tels que $(x, y)\in C$, et $C[r]$ $(0<r<R)$ la partie de C située dans $0<|x|<r$, $0<|y|<\infty$. On suppose que $C(x)$ sont bornés uniformément en module. On peut alors définir deux fonctions réelles comme suit:

$$\Phi(x) = \operatorname{Max}|y|, \qquad y\in C(x)$$

$$\varphi(r) = \operatorname{Max}\Phi(x), \qquad |x| = r.$$

On aura le

Théorème. *Supposons qu'il existe deux nombres positifs α et c tels que*

$$(A) \qquad \limsup_{r\to 0} \varphi(r)/r^{\alpha} = c.$$

Alors, il existe un nombre positif r_0 $(0<r_0<R)$ tel que $C[r_0]$ contienne au moins une composante irréductible qui peut se prolonger analytiquement à l'origine.

A ce moment, α est nécessairement rationnel et la composante irréductible se représente à l'aide de la série de Puiseaux de la form

$$y = a_0x^{p/q} + a_1x^{(p+1)/q} + \cdots,$$

où p et q sont des entiers positifs, pas nécessairement premiers entre eux, tels que $\alpha=p/q$, et où a_j $(j=0, 1,\dots)$ sont des constantes telles que $|a_0|=c$, pourvu qu'on prenne r_0 suffisamment petit.

Le but du present article est de démontrer ce théorème.

2. Avant de passer à la démonstration de ce théorème, nous réfléchirons à la condition (A). D'après le théorème de *Hartogs*, $\log \Phi(x)$ est une fonction sous-harmonique de x dans le disque pointé $0<|x|<R$; elle peut être prolongée à l'origine comme une fonction sous-harmonique, si l'on pose

$$\log \Phi(0) = \limsup_{x\to 0} \log \Phi(x),$$

puisque $\Phi(x)$ est bornée uniformément. Et, d'après le théorème de *Fabry*, $\log \varphi(r)$ est une fonction croissante et convexe par rapport à $\log r$ dans $0<r<R$. Par suite, on peut toujours trouver un nombre réel non négatif α tel que

$$\lim_{r\to 0} \log \varphi(r)/\log r = \alpha.$$

Posons ici

$$\limsup_{r\to 0} \varphi(r)/r^{\alpha} = c.$$

On peut alors dire que

c ne peut pas être l'infini.

En effet, soient r_0 et A deux nombres réels tels que $0<r_0<R$ et $\log \varphi(r_0)< \alpha \log r_0+A$. On a alors l'inégalité

$$\log \varphi(r) < \alpha \log r + A \qquad (0 < r < r_0),$$

puisque $\log \varphi(r)$ est croissante et convexe par rapport à $\log r$. D'où, on a l'inégalité $\varphi(r)<A'r^{\alpha}$ $(0<r<r_0,\ A'=e^{A})$, ce qui démontre ce qui vient d'être dit.

Nous proposons ici un exemple. Soit $\mathfrak{C}$ le disque unité $|u|<1$ sur le plan u, considéré comme un revêtement universel du disque unité pointé Γ_0: $0<|x|<1$ sur le plan x, par l'application

$$x = \exp[(u+1)/(u-1)],$$

et soit $g(u)$ une fonction holomorphe dans $\mathfrak{C}$, telle que $|g|<1$ et que tous les zéros de g soient d'ordre un, se trouvent sur l'axe réel et tendent vers 1. g existe de façon certaine. On désigne par C^0 la courbe analytique dans le domaine $\mathfrak{B}$: $|u|<1$, $0<|v|<\infty$, donnée par

$$v^2 = (u-1)\cdot g(u).$$

On considère en outre un domaine D_0: $0<|x|<1$, $0<|y|<\infty$ et une applcation analytique T de $\mathfrak{B}$ dans D_0 donnée par

$$x = \exp[(u+1)/(u-1)] \qquad \text{et} \qquad y = v$$

et on pose $C=T(C^0)$. C est une courbe analytique dans D_0, puisque, pour tout

x' dans Γ_0, l'ensemble de u satisfaisant à $x' = exp\,[(u+1)/(u-1)]$ n'admet qu'un seul point d'accumulation 1. Comme on peut facilement le voir, $C[r]$ $(0<r<1)$ est toujours connexe, de nombre infini de feuillets et de genre infini.

Comparons l'exemple avec notre théorème.

3. Nous allons rappeler ici quelques théorèmes dûs à *Oka*, qui jouent un rôle essentiel dans la démonstration du théorème. Soit G un domaine quelconque dans l'espace (x, y); un ensemble fermé E dans G est dit *pseudoconcave* dans G si, pour tout point p de E et pour tout dicylindre γ autour de p dans G, $\gamma - \gamma \cap E$ est un domaine pseudoconvexe. Un ensemble fermé E dans G est pseudoconcave, si, pour tout point p de E, il y a un voisinage δ de p et une courbe analytique s dans δ tels que $p \in s$ et $s \subset E$. Si un ensemble pseudoconcave E dans G se trouve dans une courbe analytique irréductible S dans G et qu'il existe au moins un point p de S tel que $p \notin E$, E est vide. Pour un ensemble pseudoconcave E dans G, un point p de E est dit de première ou de deuxième espèce suivant qu'il existe un voisinage δ de p, dans lequel $\delta \cap E$ est une courbe analytique, ou pas. L'ensemble de tous les points de deuxième espèce de E est dit *dérivé* de E et est désigné par E'. On a alors le

Théorème I. [1], [4] *Pour un ensemble pseudoconcave E dans G, le dérivé E' est aussi pseudoconcave dans G.*

On considère ensuite une famille (F) de courbes analytiques S dans G. Elle est dite *normale* en un point p de G s'il existe un voisinage δ de p tel que, de toute suite infinie S_j $(j=1, 2,\dots)$ de courbes de (F), on puisse toujours extraire une suite nouvelle S_k $(k=1, 2,\dots)$ de manière que la suite $\delta \cap S_k$ tend uniformément vers une courbe analytique dans δ; elle est dite *normale* dans G s'il en est ainsi en tout point de G. On a alors le

Théorème II. [2] [3] *Une famille (F) de courbes analytiques S dans G est normale en un point p de G, s'il existe un voisinage δ de p dans G, tel que les aires de $\delta \cap S$ soient bornées uniformément.*

S étant une courbe analytique dans G, on peut faire correspondre à S deux surfaces de Riemann σ et τ étalées respectivement au-dessus du plan x et du plan y telles que S se représente par $y = g_1(p)$ $(p \in \sigma)$ ou $x = g_2(p)$ $(p \in \tau)$, où g_1 et g_2 sont des fonctions holomorphes et uniformes sur σ et τ; elles s'appellent *projections* de S sur le plan x et sur le plan y. Comme on le sait bien, l'aire de S, si elle existe, est égale à la somme des aires de σ et de τ.

4. Nous allons démontrer dans la suite le théorème du début. On suppose que C est irréductible dans D. Ceci ne restreint évidemment pas la généralité. On considère d'abord le cas où α est rationnel.

Γ désigne le disque pointé $0<|x|<R$. Soit Σ la projection de C sur le plan x et soit $\xi(p)$ la fonction holomorphe et uniforme sur Σ par laquelle C se représente par la forme $y=\xi(p)$ $(p\in\Sigma)$; Σ est une surface de Riemann étalée au-dessus du Γ. En prenant un point x_0 de Γ au-dessus duquel il y a une branche uniforme $\xi_0(x)$ de $\xi(p)$, on considère, dans un voisinage de x_0, une fonction donnée par ξ_0/x^α, où x^α désigne une branche quelconque de la fonction multiforme x^α. Alors, par le prolongement analytique, autant que possible dans Γ, on obtient une fonction analytique $\xi^*(p)$ et sa surface de Riemann Σ^* étalée aussi au-dessus de Γ. Soit C^* l'ensemble des points donné par $y=\xi^*(p)\,(p\in\Sigma^*)$ dans D. Puisque α est rationnel, Σ^* est un revêtement d'un nombre fini de feuillets, sans point de ramification et sans point frontière relatif au-dessus de Σ, admettant la projection canonique π sur Σ. C^* est donc une courbe analytique dans D. On peut dire ici que:

La courbe C^* peut se prolonger analytiquement à tout point sur la droite $x=0$ sauf à l'origine.

En effet, dans le domaine G: $|x|<R$, $|y|<\infty$, on considère l'ensemble E donné par la somme de la courbe C^*, de la droite $y=0$ et de la droite $x=0$. Il est clair que E est fermé dans G et que, pour tout point p de E, il y a un voisinage δ de p et une courbe analytique s dans δ tels que $p\in s$ et $s\subset E$. E est donc un ensemble pseudoconcave dans G; par suite, grâce au théorème I, le dérivé E' de E l'est aussi. E' ne contient aucun point (x, y) tel que $x\neq 0$, $y\neq 0$; de plus, d'après la condition (A), il y a au moins un point p tel que $p\notin E'$ sur la droite $x=0$. Par suite, E' coïncide avec la droite $y=0$, s'il n'est pas vide. Or, d'après aussi la condition (A), C^* contient une suite de points qui tend vers un point $(0, a)$ dont $|a|=c$. Donc, il existe un dicylindre γ: $|x|<r$, $|y-a|<r'$, autour du $(0, a)$ tel que $\gamma\cap C^*$ puisse être prolongé analytiquement au $(0, a)$. Supposons que C^* ne rencontre pas l'ensemble $|x|<r$, $|y-a|=r'$, si nécessaire, en prenant convenablement r et r'. Alors, on a une partie de C correspondant à $\gamma\cap C^*$ par la projection π. Elle consiste en un nombre fini de composantes irréductibles de $C[r]$ et peut se prolonger analytiquement à l'origine. Le théorème est donc démontré dans ce cas.

5. On va indiquer dans la suite que α est toujours rationnel. Soit t $(|t|\geqq 1)$ un paramètre complexe; on considère une application linéaire $(T)_t$ de la forme

$$x' = t\cdot x \qquad \text{et} \qquad y' = t^\alpha\cdot y.$$

Il est clair que, pour tout nombre positif b, l'hypersurface donnée par $|y|=b|x|^\alpha$ est invariante par $(T)_t$ quel que soit t $(|t|\geqq 1)$. Soit C_t la partie de l'image $(T)_t(C)$ située dans D. On aura alors le

Lemme. *La famille* $\{C_t\}$ ($|t| \geqq 1$) *est normale dans D.*

En effet, prenons un nombre r_0 ($0 < r_0 < R$); on le considère dans le domaine D_0: $0 < |x| < r_0$, $0 < |y| < \infty$; on prend un nombre positif c_0 tel que $\varphi(r) < c_0 r^\alpha$ ($0 < r < r_0$) et on le fixe dans la suite. On prend ensuite deux nombres positifs c_j ($j = 1, 2$) tels que $0 < c_1 < c_2 < c_0$, mais par ailleurs quelconques, et on désigne par Δ_j ($j = 1, 2$) les domaines donnés par

$$c_j|x|^\alpha < |y| < c_0|x|^\alpha \qquad \text{et} \qquad |x| < r_0$$

et par $C_{t,j}$ ($j = 1, 2$) les parties de C_t situées dans Δ_j; $C_{1,j}$ ($j = 1, 2$) sont dénotées simplement par C_j; on désigne par σ_j et τ_j ($j = 1, 2$) les projections de C_j respectivement sur le plan x et sur le plan y. D'après le remarque ci-dessus, $C_{t,j}$ ($j = 1, 2$) coïncident respectivement avec $(T)_t(C_j)$ à l'exception de leur parties extérieures de D_0. Par suite, grâce au théorème II, il suffit, pour démontrer le lemme, d'indiquer que σ_2 et τ_2 sont toutes les deux d'un nombre borné de feuillets. Pour simplifier l'écriture, on pose dans la suite $r_0 = c_1 = 1$. Ceci ne restreint pas la généralité. Γ_0 désigne le disque unité pointé $0 < |x| < 1$. Désignons par $n_j(x)$ ($j = 1, 2$; $x \in \Gamma_0$) le nombre de feuillets de σ_j au-dessus de x et posons $n_1 = \operatorname*{Max}_{|x|=1} n_1(x)$. Je dis ici que

$n_2(x)$ *sont bornés uniformément dans* Γ_0.

En effet, on prend un point quelconque x_0 dans Γ_0 et on le fixe dans la suite. On prend ensuite un nombre r' ($0 < r' < |x_0|$) suffisamment petit d'une manière qu'on déterminera plus tard. On désigne par $\Gamma_0(r')$ l'anneau $r' < |x| < 1$ et par $\sigma_1(r')$ la partie de σ_1 située justement au-dessus de $\Gamma_0(r')$. C'est une surface de Riemann d'un nombre borné de feuillets, limitée par un nombre fini de courbes linéaires. Par suite, on peut toujours trouver une autre surface de Riemann $\Sigma(r')$ sans point frontière relatif étalée au-dessus de $\Gamma_0(r')$, telle que $\sigma_1(r') \subset \Sigma(r')$. N désigne le nombre de feuillets de $\Sigma(r')$. Soit $H(p)$ la fonction harmonique dans $\Sigma(r')$, solution du problème de Dirichlet concernant les valeurs frontières $\eta(p)$ comme suit:

$$\eta(p)\begin{cases} = \log c_0 & \text{sur les points frontières } \sigma_1(r') \text{ au-dessus de } |x| = 1 \\ = 0 & \text{sur tous les autres points frontières.} \end{cases}$$

Elle existe de façon certaine. En désignant par $H_j(x)$ ($j = 1, \ldots, N$) les valeurs de $H(p)$ au-dessus de x, on pose

$$h(x) = \sum_j H_j(x)/N.$$

Par définition, on a

$$h(x)\begin{cases} < (n_1 \, log \, c_0)/N, & |x| = 1 \\ = 0, & |x| = r'; \end{cases}$$

par suite, on a

$$h(x_0) < (n_1 \, log \, c_0)/N.$$

Soit n_0 le nombre de tous les points p sur $\Sigma(r')$, situés au-dessus de x_0, tels que $H(p) \geqq (log \, c_2)/2$. On a alors

$$h(x_0) > (n_0 \, log \, c_2)/2N,$$

par suite,

$$n_0 < (2n_1 \, log \, c_0)/log \, c_2 .$$

Cette inégalité-ci s'établit de façon indépendante de r' $(r' < |x_0|)$. Maintenant, on prend r' de manière que

$$(log \, c_0 \, log \, |x_0|)/log \, r' < (log \, c_2)/2.$$

Alors, le nombre de points p de $\Sigma(r')$, au-dessus de x_0, satisfaisant à l'inégalité

$$H(p) + (log \, c_0 \, log \, |x_0|)/log \, r' > log \, c_2$$

ne surpasse pas n_0. Or, on peut dire que

Dans tout $\sigma_1(r')$, on a l'inégalité

$$log \, |\xi(p)| - \alpha \, log \, |x| < H(p) + (log \, c_0 \, log \, |x|)/log \, r',$$

où $log \, |x|$ est considéré comme une fonction sur $\Sigma(r')$.

Car, d'après la définition de c_0, on a l'inégalité

$$log \, |\xi(p)| - \alpha \, log \, |x| < log \, c_0$$

sur tout σ_1. De plus, on a l'égalité

$$log \, |\xi(p)| - \alpha \, log \, |x| = 0$$

sur tout point frontière p de σ_1 situé au-dessus d'un point de Γ_0, puisque le p correspond au point commun de C et de l'hypersurface $|y| = |x|^{\alpha}$. Donc, l'inégalité en question est valable sur tout point frontière de $\sigma_1(r')$; par suite, il en est de même dans $\sigma_1(r')$.

D'après la définition, on a $|\xi(p)| \geqq c_2 |x|^{\alpha}$, pour tout point p de σ_2 situé au-dessus de x $(x \in \Gamma_0)$; on en conclut que

$$n_2(x_0) < 2n_1 \, log \, c_0/log \, c_2 .$$

Puisqu'on a pris x_0 de façon arbitraire, l'énoncé est démontré de façon certaine.

Il s'agit maintenant de voir les nombres de feuillets de τ_j $(j=1, 2)$. On désigne par $\nu_j(y)$ $(j=1, 2)$ les nombres des feuillets de τ_j au-dessus de y. On considère l'application K donnée par

$$x' = y^l/x \qquad \text{et} \qquad y' = y,$$

où l est un entier positif plus grand que $1/\alpha$. Alors, les images $K(\Delta_j)$ $(j=1, 2)$ sont données par

$$c_j^{1/\alpha}|y|^{l-1/\alpha} < |x| < c_0^{1/\alpha}|y|^{l-1/\alpha} \qquad \text{et} \qquad |y|^l < |x| .$$

Soient Δ_j^* $(j=1, 2)$ les parties de $K(\Delta_j)$ situées dans $|y|<1$, C_j^* $(j=1, 2)$ les parties de $K(C_j)$ situées dans Δ_j^* et τ_j^* $(j=1, 2)$ les projections de C_j^* sur le plan y; $\nu_j^*(y)$ $(j=1, 2)$ dèsignent les nombres de feuillets de τ_j^* au-dessus de y. Or, lorsqu'on considère cela en remplaçant x par y, τ_j^* ont le même caractère que σ_j. On peut donc démontrer, d'après le même raisonnement que ci-dessus, que $\nu_2^*(y)$ sont bornés uniformément; puisque $\nu_2(y)=\nu_2^*(y)$, $\nu_2(y)$ le sont aussi. Le lemme est donc démontré.

6. Attachons-nous maintenant à prouver que α est rationnel. Prenons, sur C, une suite de points $p_j=(a_j, b_j)$ $(j=1, 2,\ldots)$ telle que $\lim a_j=0$ et $\lim |b_j/a_j^\alpha|=c$ et posons $t_j=1/2a_j$ $(j=1, 2,\ldots)$. Alors, de la suite des courbes C_{t_j} $(j=1, 2,\ldots)$, on peut extraire une nonvelle suite C_{t_k} $(k=1, 2,\ldots)$ tendant vers une courbe analytique C_0 dans D. On peut dire ici que:

C_0 se trouve dans l'ensemble: $|x|<R$, $|y|\leqq c|x|^\alpha$.

En effet, supposons pour le démontrer par l'absurde que C_0 contienne un point (A, B) tel que $|A|<R$ et $|B|>c|A|^\alpha$. Alors, on peut prendre un point (A, B_k) de chaque C_{t_k} $(k=1, 2,\ldots)$ tel que $\lim B_k=B$. Cela veut dire que C contient une suite de points $(x_k, y_k)=(2a_kA, (2a_k)^\alpha B_k)$ $(k=1, 2,\ldots)$. A ce momemt,

$$\lim |y_k/x_k^\alpha| = \lim |B_k/A^\alpha| = |B/A^\alpha| > c$$

Ce qui est en contradiction avec la condition (A), et ce qui démontre l'énoncé.

Suivant la façon de former les C_{t_k}, C_0 contient un point $(1/2, y_0)$ tel que $|y_0|=c/2^\alpha$. Soit $\zeta(x)$ une fonction analytique dans un voisinage de $1/2$ telle que $y=\zeta(x)$ représente l'une des composantes irréductibles de C_0 en $(1/2, y_0)$ et posons.

$$\zeta^*(x) = \zeta(x)/x^\alpha,$$

où x désigne une branche quelconque de la fonction multiforme x^{α}. Alors, $\zeta^*(x)$ est une constante a tel que $|a|=c$, puisque $|\zeta^*(x)|$ prend la valeur maximum c en $1/2$. Par suite, C_0 contient la courbe analytique donnée par $y=ax^{\alpha}$. Donc, α doit être rationnel. Le théorème est donc complètement démontré.

Bibliographie

[1] Nishino, T., Sur les ensembles pseudoconcaves, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1962), 225–245.
[2] Nishino, T., Sur les familles de surfaces analytiques, J. Math. Kyoto Univ. **1** (1962), 357–377.
[3] Oka, K., Note sur les familles de fonctions analytiques multiformes etc., J. Sci. Hiroshima Univ. **4** (1934), 93–98.
[4] Oka, K., Sur les ensembles de points à 4 dimensions engendrés analytiquement, Oeuvres posthumes, Vol. 7, Kyoto, 1983.

Department of applied science,
Faculty of engineering,
Kyushu University