C. YUEN
KŌDAI MATH SEM. REP.
28 (1977), 182—196

RELÈVEMENTS DES DÉRIVATIONS ET DES STRUCTURES AUX FIBRÉS TANGENTS

BY CHRISTOPHE YUEN

Si M est une variété différentiable de dimension finie, on désigne par $\tau(M)=(TM, \pi, M)$ le fibré tangent à M. On associe à toute dérivation D de l'algèbre tensorielle $\mathcal{T}(M)$ des champs de tenseurs sur M, une dérivation D^C (resp. D^V) de l'algèbre tensorielle $\mathcal{T}(TM)$ sur TM, appelée le relèvement complet (resp. relèvement vertical) de D à TM. L'application $D\rightarrow D^C$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie. D'ailleurs, toute différentiation covariante associée à une connexion linéaire sur M peut être relevée en une différentiation covariante sur TM. De même, on définit le relèvement complet (resp. relèvement vertical) d'une dérivation de l'algèbre extérieure $\Lambda(M)$ des formes différentielles sur M au fibré tangent. L'étude des relèvements de dérivations aux fibrés tangents d'ordre 2 fait l'objet d'une autre publication [4].

Dans la deuxième partie, on étudie les relèvements horizontaux des dérivations aux fibrés tangents. On introduit la notion du relèvement diagonal pour les formes vectorielles. Certaines structures définies par des 1-formes vectorielles sur M peuvent être relevées en structures correspondantes sur TM.

PARTIE I

Relèvements complets et relèvements verticaux

1. Relèvements des champs de tenseurs.

Soit $\tau(M)=(TM, \pi, M)$ le fibré tangent à une variété différentiable M. Si $f\in\mathcal{F}(M)$ est une fonction différentiable sur M, la différentielle df, considérée comme une fonction différentiable sur TM, sera notée par $\iota(df)$. Nous posons

$$f^C=\iota(df)\,; \qquad f^V=f\circ\pi$$

appelées respectivement le relèvement complet et le relèvement vertical de f à TM.

Soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ deux champs de vecteurs sur TM. Si $\bar{X}f^C=\bar{Y}f^C$ pour toute fonction différentiable $f\in\mathcal{F}(M)$, alors $\bar{X}=\bar{Y}$. Pour tout champ de vecteurs $X\in\mathcal{X}(M)$, le relèvement complet (resp. relèvement vertical) de X à TM est l'unique

Received Oct. 22, 1975.

champ de vecteurs X^C (resp. X^V) sur TM vérifiant:

$$X^C f^C=(Xf)^C\,; \qquad (\text{resp. } X^V f^C=(Xf)^V)$$

pour toute fonction différentiable $f\in\mathfrak{F}(M)$. Signalons que, si φ_t est le groupe local à un paramètre de difféomorphismes de M engendré par X, alors $(\varphi_t)^T$ est le groupe local à un paramètre de difféomorphismes de TM engendré par X^C. D'ailleurs nous avons $X^C=s\circ X^T$, où X^T est l'application tangente de X, considéré comme une section de $\tau(M)$, et s est l'involution canonique de $T(TM)$.

Deux 1-formes différentielles $\bar{\omega}$ et $\bar{\theta}$ sur TM sont identiques si et seulement si $\bar{\omega}(X^C)=\bar{\theta}(X^C)$ pour tout champ de vecteurs $X\in\mathfrak{X}(M)$. Pour toute 1-forme différentielle $\omega\in\Lambda^1(M)$, le relèvement complet (resp. relèvement vertical) de ω à TM est l'unique 1-forme différentielle ω^C (resp. ω^V) sur TM vérifiant:

$$\omega^C(X^C)=(\omega(X))^C\,; \qquad (\text{resp. } \omega^V(X^C)=(\omega(X))^V)$$

pour tout champ de vecteure $X\in\mathfrak{X}(M)$.

Plus généralement, le relèvement complet (resp. relèvement vertical) d'un champ de tenseurs à TM est défini par les conditions: soient P, Q, R trois champs de tenseurs sur M, on a

$$(P\otimes Q)^C=P^C\otimes Q^V+P^V\otimes Q^C; \qquad (P+R)^C=P^C+R^C$$

(resp. $(P\otimes Q)^V=P^V\otimes Q^V$; $(P+Q)^V=P^V+R^V$)

2. Relèvements des dérivations de $\mathfrak{T}(M)$.

Soit $\mathfrak{T}(M)=\sum\mathfrak{T}_s{}^r(M)$ l'algèbre tensorielle des champs de tenseurs sur M. Une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$ est une application $D:\mathfrak{T}(M)\mapsto\mathfrak{T}(M)$ vérifiant les conditions:

(a) $D:\mathfrak{T}_s{}^r(M)\mapsto\mathfrak{T}_s{}^r(M)$
(b) $D(S+T)=D(S)+D(T), \qquad S, T\in\mathfrak{T}_s{}^r(M)$
(c) $D(S\otimes T)=D(S)\otimes T+S\otimes D(T), \qquad S, T\in\mathfrak{T}(M)$
(d) D commute avec la contraction de tenseurs.

L'ensemble des dérivations de $\mathfrak{T}(M)$ forme une algèbre de Lie sur $\boldsymbol{R}$; elle sera notée par $\mathfrak{D}(\mathfrak{T}(M))$. Un élément $D\in\mathfrak{D}(\mathfrak{T}(M))$ est complètement déterminée par ses actions sur $\mathfrak{F}(M)$ et $\mathfrak{X}(M)$. Toute dérivation D de $\mathfrak{T}(M)$ se décompose d'une façon unique:

$$D=L_X+i_F$$

où L_X est la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs $X\in\mathfrak{X}(M)$ et i_F est la dérivation de $\mathfrak{T}(M)$ définie par un champ de tenseurs F de type (1, 1) sur M.

PROPOSITION. *Deux dérivations D et $\bar{D}$ de $\mathfrak{T}(TM)$ sont identiques si et seulement si*

(a) $Df^C=\bar{D}f^C$ *pour toute fonction* $f\in\mathfrak{F}(M)$;

(b) $DX^C = \bar{D}X^C$ *pour tout* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Preuve: Considérons D et $\bar{D}$ sous sa forme canonique:

$$D = L_X + i_F, \qquad \bar{D} = L_{\bar{X}} + i_{\bar{F}}$$

où $X, \bar{X} \in \mathfrak{X}(TM)$ et $F, \bar{F} \in \mathfrak{T}_1^1(TM)$. La condition (a) implique que $Xf^C = \bar{X}f^C$ pour toute fonction différentiable f sur M. Par conséquent, $X = \bar{X}$. La condition (b) implique que

$$[X, Y^C] + FY^C = [\bar{X}, Y^C] + \bar{F}Y^C$$

pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Puisque $X = \bar{X}$, nous avons $FY^C = \bar{F}Y^C$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$ d'où $F = \bar{F}$. Nous avons ainsi $D = \bar{D}$.

Soit $D = L_X + i_F$ une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$, où $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $F \in \mathfrak{T}_1^1(M)$. On appelle le relèvement complet (resp. relèvement vertical) de D à TM la dérivation D^C (resp. D^V) de $\mathfrak{T}(TM)$ définie par:

$$D^C = L_{X^C} + i_{F^C} \qquad (\text{resp. } D^V = L_{X^V} + i_{F^V})$$

Proposition. *Pour toute* $f \in \mathfrak{F}(M)$ *et tout* $X \in \mathfrak{X}(M)$, *on a*

$$D^C f^C = (Df)^C; \qquad D^C X^C = (DX)^C$$

(*resp.* $D^V f^C = (Df)^V$; $D^V X^C = (DX)^V$)

Preuve: Soit $D = L_X + i_F$ une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$. Pour toute $f \in \mathfrak{F}(M)$, on a

$$D^C f^C = X^C f^C = (Xf)^C = (Df)^C$$

Pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$, on a

$$D^C Y^C = [X^C, Y^C] + F^C Y^C = [X, Y]^C + F^C Y^C = (DY)^C$$

De même, on a

$$D^V f^C = (Df)^V; \qquad D^V Y^C = (DY)^V.$$

Theoreme. *L'application* $D \mapsto D^C$ *est un homomorphisme d'algèbres de Lie de* $\mathfrak{D}(\mathfrak{T}(M))$ *vers* $\mathfrak{D}(\mathfrak{T}(TM))$.

Preuve: Soient $D = L_X + i_F$ et $\bar{D} = L_{\bar{X}} + i_{\bar{F}}$ deux dérivations de $\mathfrak{T}(M)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
(D+\bar{D})^C &= L_{(X+\bar{X})^C} + i_{(F+\bar{F})^C} \\
&= L_{X^C} + L_{\bar{X}^C} + i_{F^C} + i_{\bar{F}^C} \\
&= D^C + \bar{D}^C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda D)^C &= L_{\lambda X^C} + i_{\lambda F^C} \qquad\qquad (\lambda \in \mathbf{R}) \\
&= \lambda L_{X^C} + \lambda i_{F^C} \\
&= \lambda D^C
\end{aligned}$$

L'application $D \mapsto D^C$ est donc $\boldsymbol{R}$-linéaire. Or,

$$[D, \bar{D}] = L_{[X, \bar{X}]} + i_W$$

où

$$i_W = [L_X, i_{\bar{F}}] + [i_F, L_{\bar{X}}] + [i_F, i_{\bar{F}}]$$

est une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$ définie par un champ de tenseurs W de type (1, 1) sur M. La dérivation i_W est complètement déterminée par ses actions sur $\mathfrak{X}(M)$. Pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$, nous avons

$$WY = [X, \bar{F}Y] - \bar{F}[X, Y] + F[\bar{X}, Y] - [\bar{X}, FY] + F\bar{F}Y - \bar{F}FY$$

$$\begin{aligned} W^C Y^C &= (WY)^C \\ &= [X^C, \bar{F}^C Y^C] - \bar{F}^C[X^C, Y^C] + F^C[\bar{X}^C, Y^C] - [\bar{X}^C, F^C Y^C] \\ &\quad + F^C \bar{F}^C Y^C - \bar{F}^C F^C Y^C \end{aligned}$$

D'autre part,

$$[D^C, \bar{D}^C] = L_{[X^C, \bar{X}^C]} + i_{\bar{W}}$$

où

$$i_{\bar{W}} = [L_{X^C}, i_{\bar{F}^C}] + [i_{F^C}, L_{\bar{X}^C}] + [i_{F^C}, i_{\bar{F}^C}]$$

est une dérivation de $\mathfrak{T}(TM)$ définie par un champ de tenseurs $\bar{W}$ de type (1, 1) sur TM. Pour tout champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{W} Y^C &= [X^C, \bar{F}^C Y^C] - \bar{F}^C[X^C, Y^C] + F^C[\bar{X}^C, Y^C] \\ &\quad - [\bar{X}^C, F^C Y^C] + F^C \bar{F}^C Y^C - \bar{F}^C F^C Y^C \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\bar{W} Y^C = W^C Y^C$ pour tout $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Par conséquent, $\bar{W} = W^C$. Comme $[X, \bar{X}]^C = [X^C, \bar{X}^C]$, nous avons $[D^C, \bar{D}^C] = [D, \bar{D}]^C$. L'application $D \mapsto D^C$ est donc un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Remarque: L'application $D \mapsto D^V$ possède les propriétés suivantes:

$$(D + \bar{D})^V = D^V + \bar{D}^V; \qquad (\lambda D)^V = \lambda D, \text{ où } \lambda \in \boldsymbol{R};$$

mais elle n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie.

3. Relèvements des différentiations covariantes.

Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Pour tout champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$, la différentiation covariante ∇_X par rapport à X est une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$. Puisque $\nabla_X f = Xf$ pour toute fonction $f \in \mathfrak{F}(M)$, on a la décomposition: $\nabla_X = L_X + i_F$, où F est un champ de tenseurs de type (1, 1) sur M.

Soit $z \in TM$. Pour tout vecteur $u \in T_z(TM)$, il existe au moins un champ de vecteurs X sur M tel que $X^C(z) = u$. Pour un champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(M)$ donné, la valeur de $(\nabla_X)^C Y^C$ au point $z \in TM$ ne dépend que de $X^T(z)$. Si $\bar{X}$

est un autre champ de vecteurs sur M tel que $u=\bar{X}^C(z)$, nous avons $\bar{X}^T(z)=X^T(z)$ car $X^C=s\circ X^T$ et $\bar{X}^C=s\circ\bar{X}^T$, où s est l'involution canonique de $T(TM)$. Par conséquent, la valeur de $(\nabla_X)^C Y^C$ au point z est indépendante du choix de X tel que $u=X^C(z)$. Si nous posons

$$\nabla_u{}^C Y^C=((\nabla_X)^C Y^C)(z)$$

nous obtenons un opérateur $\nabla_u{}^C$ sur $\mathcal{X}(TM)$: en effet, si $K=\sum f_i Y_i{}^C$ est un champ de vecteurs sur TM, où $f_i\in\mathcal{F}(TM)$ et $Y_i\in\mathcal{X}(M)$, nous posons

$$\nabla_u{}^C K=((\nabla_X)^C K)(z)=\sum f_i(z)\nabla_u{}^C Y_i{}^C+\sum(uf_i)Y_i{}^C(z)$$

PROPOSITION. *L'opérateur $\nabla_u{}^C$ possède les propriétés suivantes*:

(a) $\nabla_u{}^C(A+B)=\nabla_u{}^C A+\nabla_u{}^C B$ $\qquad A, B\in\mathcal{X}(TM)$;
(b) $\nabla_u{}^C(gA)=g\nabla_u{}^C A++(ug)A(z)$ $\qquad g\in\mathcal{F}(TM)$;
(c) $\nabla_{\lambda u}{}^C A=\lambda\nabla_u{}^C A$ $\qquad \lambda\in\boldsymbol{R}$;
(d) $\nabla_{u+v}{}^C A=\nabla_u{}^C A+\nabla_v{}^C A$ $\qquad u, v\in T_z(TM)$.

Preuve: Les propriétés (a) et (b) sont immédiates d'après la définition de $\nabla_u{}^C$ car $(\nabla_X)^C$ est une dérivation de $\mathcal{I}(TM)$, où X est un champ de vecteurs sur M tel que $X^C(z)=u$. Si $\lambda\in\boldsymbol{R}$, nous avons $(\lambda X)^C=\lambda X^C$ et $(\lambda X)^C(z)=\lambda u$. Par conséquent,

$$\nabla_{\lambda u}{}^C A=((\nabla_{\lambda X})^C A)(z)=(\lambda(\nabla_X)^C A)(z)=\lambda\nabla_u{}^C A$$

pour tout $A\in\mathcal{X}(TM)$. Soient $X\in\mathcal{X}(M)$, $Y\in\mathcal{X}(M)$ tels que $X^C(z)=u$ et $Y^C(z)=v$. Nous avons $(X+Y)^C(z)=u+v$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\nabla_{u+v}{}^C A&=((\nabla_{X+Y})^C A)(z)\\&=((\nabla_X)^C A)(z)+((\nabla_Y)^C A)(z)\\&=\nabla_u{}^C A+\nabla_v{}^C A\end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée.

Soient $A\in\mathcal{X}(TM)$ et $B\in\mathcal{X}(TM)$. On construit un autre champ de vecteurs $\nabla_A{}^C B$ sur TM en posant $(\nabla_A{}^C B)(z)=\nabla_{A(z)}{}^C B$. On a ainsi une application

$$\nabla^C:\mathcal{X}(TM)\times\mathcal{X}(TM)\mapsto\mathcal{X}(TM)$$

D'après la proposition précédente, on a

THÉORÈME. *L'opérateur ∇^C définit une connexion linéaire sur TM. Plus précisément, l'opérateur ∇^C possède les propriétés suivantes*:

(a) $\nabla_A{}^C(P+Q)=\nabla_A{}^C P+\nabla_A{}^C Q$
(b) $\nabla_A{}^C(gP)=g\nabla_A{}^C P+(Ag)P$
(c) $\nabla_{gA}{}^C P=g\nabla_A{}^C P$
(d) $\nabla_{A+B}{}^C P=\nabla_A{}^C P+\nabla_B{}^C P$

où $A, B, P, Q\in\mathcal{X}(TM)$ et $g\in\mathcal{F}(TM)$.

La connexion linéaire ∇^C coincide avec le relèvement complet de la connexion linéaire ∇ défini autrement par Yano et Kobayashi [3].

4. Relèvements des dérivations de $\Lambda(M)$.

Soit $\Lambda(M)$ l'algèbre extérieure des formes différentielles sur M. Toute dérivation D de degré r de $\Lambda(M)$ se décompose d'une façon unique [1]:

$$D=i_L+d_N$$

où i_L est une dérivation de degré r, de type i_*, déterminée par une $(r+1)$-forme vectorielle L sur M et d_N est une dérivation de degré r, de type d_*, déterminée par une r-forme vectorielle N sur M. Nous posons

$$D^C=i_{L^C}+d_{N^C} \qquad (\text{resp. } D^V=i_{L^V}+d_{N^V})$$

D^C (resp. D^V) est une dérivation de degré r de $\Lambda(TM)$, appelée le relèvement complet (relèvement vertical) de D à TM.

Soit $\Psi^p(M)$ le module des p-formes vectorielles sur M. Si $L\in\Psi^p(M)$ et si $\omega\in\Lambda^q(M)$, alors $\omega\wedge L\in\Psi^{q+p}(M)$ définie par

$$\omega\wedge L(u_1, \cdots, u_{q+p})=\frac{1}{q!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\omega(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(q)})L(u_{\sigma(q+1)}, \cdots, u_{\sigma(q+p)})$$

Si $L\in\Psi^p(M)$ et si $N\in\Psi^r(M)$, alors $N\bar{\wedge}L\in\Psi^{p+r-1}(M)$ définie par

$$N\bar{\wedge}L(u_1, \cdots, u_{p+r-1})=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)N(L(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(p)}), u_{\sigma(p+1)}, \cdots, u_{\sigma(p+r-1)})$$

Le crochet $[N, L]\in\Psi^{p+r}(M)$ est défini par la formule:

$$[d_N, d_L]=d_{[N,L]}$$

où d_N est la dérivation de type d_*, déterminée par N et $[d_N, d_L]$ est le commutateur de d_N et de d_L.

LEMME. *Soient* $L\in\Psi^p(M)$, $N\in\Psi^r(M)$ *et* $\omega\in\Lambda^q(M)$.
(a) $(\omega\wedge L)^C=\omega^C\wedge L^V+\omega^V\wedge L^C$
(b) $(N\bar{\wedge}L)^C=N^C\bar{\wedge}L^C$
(c) $[N, L]^C=[N^C, L^C]$

Preuve: (a) D'après la définition de $\omega\wedge L$, on a

$$\begin{aligned}
&(\omega\wedge L)^C(u_1{}^C, \cdots, u_{q+p}{}^C)\\
&=(\omega\wedge L(u_1, \cdots, u_{q+p}))^C\\
&=\frac{1}{q!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\{\omega(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(q)})L(u_{\sigma(q+1)}, \cdots, u_{\sigma(q+p)})\}^C
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{q!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\{\omega^V(u_{\sigma(1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(q)}{}^C)L^C(u_{\sigma(q+1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(q+p)}{}^C)$$
$$+\omega^C(u_{\sigma(1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(q)}{}^C)L^V(u_{\sigma(q+1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(q+p)}{}^C)\}$$
$$=(\omega^V\wedge L^C+\omega^C\wedge L^V)(u_1{}^C,\cdots,u_{q+p}{}^C)$$

pour tout champ de vecteurs $u_i\in\mathcal{X}(M)$. Comme les champs de tenseurs de type $(p+q,1)$ sur TM sont complètement déterminés par ses valeurs sur les champs de vecteurs de la forme $u_i{}^C$, on déduit que

$$(\omega\wedge L)^C=\omega^V\wedge L^C+\omega^C\wedge L^V.$$

(b) Si $L\in\Psi^p(M)$ et si $N\in\Psi^r(M)$, on a

$$N^C\overline{\wedge}L^C(u_1{}^C,\cdots,u_{p+r-1}{}^C)$$
$$=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)N^C(L^C(u_{\sigma(1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(p)}{}^C),u_{\sigma(p+1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(p+r-1)}{}^C)$$
$$=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)N^C((L(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)}))^C,u_{\sigma(p+1)}{}^C,\cdots,u_{\sigma(p+r-1)}{}^C)$$
$$=\frac{1}{(r-1)!\,p!}\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\{N(L(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(p)}),u_{\sigma(p+1)},\cdots,u_{\sigma(p+r-1)})\}^C$$
$$=(N\overline{\wedge}L)^C(u_1{}^C,\cdots,u_{p+r-1}{}^C)$$

On déduit que

$$N^C\overline{\wedge}L^C=(N\overline{\wedge}L)^C.$$

(c) Soit $\{x^i\}(i=1,2,\cdots,n)$ un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U de M. Si $L\in\Psi^p(M)$ a pour composantes locales $L^i{}_{a_1\cdots a_p}$ et si $N\in\Psi^r(M)$ a pour composantes locales $N^i{}_{b_1\cdots b_r}$, le crochet $[N,L]$ a pour composantes locales [1]:

$$[N,L]^i{}_{b_1\cdots b_r a_1\cdots a_p}=\frac{(r+p)!}{r!\,p!}\{N^k{}_{[b_1\cdots b_r}\partial_{|k|}L^i{}_{a_1\cdots a_p]}-L^k{}_{[a_1\cdots a_p}\partial_{|k|}N^i{}_{b_1\cdots b_r]}$$
$$-rN^i{}_{k[b_2\cdots b_r}\partial_{b_1}L^k{}_{a_1\cdots a_p]}+pL^i{}_{k[a_2\cdots a_p}\partial_{a_1}N^k{}_{b_1\cdots b_r]}\}$$

Si $\{x^i,y^i\}$ est le système de coordonnées localse induit sur $\pi^{-1}(U)$ de TM, on pose $x^{\bar{i}}=y^i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. Les composantes locales $\bar{L}_{A_1\cdots A_p}{}^K$ de L^C sont données par [2]:

$$\bar{L}^i{}_{a_1\cdots a_p}=L^i{}_{a_1\cdots a_p}$$
$$\bar{L}^{\bar{i}}{}_{a_1\cdots a_p}=y^k\partial_k L^i{}_{a_1\cdots a_p}$$
$$\bar{L}^{\bar{i}}{}_{a_1\cdots\bar{a}_t\cdots a_p}=L^i{}_{a_1\cdots a_t\cdots a_p}\qquad(t=1,2,\cdots,p)$$

les autres composantes étant zéros. De même, les composantes locales $\bar{N}^K{}_{B_1\cdots B_r}$

de N^C sont données par :

$$\bar{N}^{i}{}_{b_1\cdots b_r}=N^{i}{}_{b_1\cdots b_r}$$

$$\bar{N}^{\bar{i}}{}_{b_1\cdots b_r}=y^k\partial_k N^{i}{}_{b_1\cdots b_r}$$

$$\bar{N}^{\bar{i}}{}_{b_1\cdots\bar{b}_t\cdots r}=N^{i}{}_{b_1\cdots b_t\cdots b_r} \qquad (t=1, 2, \cdots, r)$$

les autres composantes étant zéros. Les calculs directs montrent que

$$[N^C, L^C]=[N, L]^C .$$

THÉORÈME. *L'application $D\mapsto D^C$ possède les propriétés suivantes :*

(a) *Pour tout $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $(\lambda D)^C=\lambda D^C$;*

(b) *Si D et $\bar{D}$ sont deux dérivations du même degré de $\Lambda(M)$, on a*

$$(D+\bar{D})^C=D^C+\bar{D}^C$$

(c) *Si D et $\bar{D}$ sont deux dérivations quelconques de $\Lambda(M)$, on a*

$$[D, \bar{D}]^C=[D^C, \bar{D}^C]$$

Preuve : (a) Soit $D=i_L+d_N$ une dérivation de $\Lambda(M)$. Pour tout $\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\lambda D=i_{\lambda L}+d_{\lambda N}$. Par consequent,

$$(\lambda D)^C=i_{\lambda L^C}d_{\lambda N^C}=\lambda(i_{L^C}+d_{N^C})=\lambda D^C .$$

(b) Soit $\bar{D}=i_{\bar{L}}+d_{\bar{N}}$ une autre dérivation de $\Lambda(M)$, du même degré que D. On a

$$(D+\bar{D})^C=i_{(L+\bar{L})^C}+d_{(N+\bar{N})^C}=D^C+\bar{D}^C$$

(c) Soient $D=i_L+d_N$ et $\bar{D}=i_{\bar{L}}+d_{\bar{N}}$ deux dérivations de $\Lambda(M)$, respectivement de degré r et de degré $\bar{r}$. On a

$$[D, \bar{D}]=[i_L, i_{\bar{L}}]+[i_L, d_{\bar{N}}]+[d_N, i_{\bar{L}}]+[d_N, d_{\bar{N}}]$$

et

$$[D, \bar{D}]^C=[i_L, i_{\bar{L}}]^C+[i_L, d_{\bar{N}}]^C+[d_N, i_{\bar{L}}]^C+[d_N, d_{\bar{N}}]^C$$

Or, on a

$$[i_L, i_{\bar{L}}]=i_{\bar{L}\barwedge L}-(-1)^{r\bar{r}}i_{L\barwedge\bar{L}}$$

d'où

$$[i_L, i_{\bar{L}}]^C=i_{\bar{L}^C\barwedge L^C}-(-1)^{r\bar{r}}i_{L^C\barwedge\bar{L}^C}=[i_{L^C}, i_{\bar{L}^C}]$$

D'après la définition du crochet, on a

$$[d_N, d_{\bar{N}}]^C=d_{[N,\bar{N}]^C}=d_{[N^C,\bar{N}^C]}=[d_{N^C}, d_{\bar{N}^C}]$$

D'autre part,

$$[i_L, d_{\bar{N}}]=d_{\bar{N}\barwedge L}+(-1)^{\bar{r}}i_{[L,\bar{N}]}$$

d'où

$$[i_L, d_{\bar{N}}]^C = d_{\bar{N}^C \bar{\wedge} L^C} + (-1)^{\bar{r}} i_{[L^C, \bar{N}^C]} = [i_{L^C}, d_{\bar{N}^C}]$$

De même, on a

$$[d_N, i_{\bar{L}}]^C = [d_{N^C}, i_{\bar{L}^C}]$$

On conclut donc que

$$[D, \bar{D}]^C = [D^C, \bar{D}^C].$$

L'application $D \mapsto D^V$ possède les deux premières propriétés du théorème, mais elle n'a pas la troisième propriété.

Exemples. La 1-forme vectorielle identique I sur M définit deux dérivations de $\Lambda(M)$, au sens de Frölicher-Nijenhuis, i_I et d_I, de degrés respectifs 0 et 1, telles que, pour toute p-forme différentielle ω de M,

$$i_I \omega = \omega \bar{\wedge} I = p\omega$$

$$d_I \omega = d\omega \bar{\wedge} I - d(\omega \bar{\wedge} I) = d\omega$$

La dérivation d_I n'est autre que la différentiation extérieure de $\Lambda(M)$. Le relèvement complet I^C est la 1-forme vectorielle identique sur TM tandis que $I^V = J$, où J est la structure presque tangente canonique sur TM. La dérivation i_J qui est le relèvement vertical de i_I, est la dérivation verticale de $\Lambda(TM)$; la dérivation $d_J = i_J d - d i_J$ qui est le relèvement vertical de $d_I = d$, est la différentiation verticale de $\Lambda(TM)$. Les identités pour les dérivations de type i_* et de type d_*, donnent un calcul différentiel sur TM.

PARTIE II

Relèvements horizontaux et relèvements diagonaux

1. Relèvements horizontaux des champs de tenseurs.

Soit M une variété différentiable munie d'une connexion linéaire dont la loi de dérivation covariante sera notée par ∇. Considérons un champ de tenseurs S de type (r, s) sur M. Si $\{x^1, x^2, \cdots, x^n\}$ est un système de coordonnées locales défini sur un ouvert U de M, on peut écrire localement

$$S = S_{i_1 \cdots i_s}{}^{j_1 \cdots j_r}) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s}$$

Si $\{x^i, y^i\}$ est le système de coordonnées locales induit sur $\pi^{-1}(U)$ de TM, les composantes

$$\nabla_T S = (y^k \nabla_k S_{i_1 \cdots i_s}{}^{j_1 \cdots j_r}) \frac{\partial}{\partial y^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{j_r}} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_s}$$

définissent un champ global de tenseurs, de type (r, s) sur TM. De même, les composantes

$$\gamma S=(y^{i_1}S_{i_1 i_2\cdots i_s}{}^{j_1\cdots j_r})\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial y^{j_r}}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots dx^{i_s}$$

définissent un champ global de tenseurs, de type $(r, s-1)$ sur TM.

Soit S un champ de tenseurs de type (r, s) sur M. On appelle le relèvement horizontal de S à TM le champ de tenseurs S^H sur TM défini par

$$S^H=S^C-\nabla_\gamma S$$

où S^C est le relèvement complet de S à TM. Si $P, Q, R\in\mathfrak{T}(M)$ sont des champs de tenseurs sur M, nous avons

$$(P\otimes Q)^H=P^H\otimes Q^V+P^V\otimes Q^H$$

$$(P+R)^H=P^H+R^H$$

2. Relèvements horizontaux des dérivations.

Soit D une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$. Elle se décompose d'une façon unique:

$$D=L_X+i_F$$

où L_X est la dérivation de Lie par rapport au champ de vecteurs $X\in\mathfrak{X}(M)$ et i_F est la dérivation de $\mathfrak{T}(M)$ définie par un champ de tenseurs F de type (1, 1) sur M.

PROPOSITION. *Deux dérivations D et $\bar{D}$ de $\mathfrak{T}(TM)$ sont identiques si et seulement si*

(a) $Df^C=\bar{D}f^C$ *pour toute fonction* $f\in\mathfrak{F}(M)$;

(b) $DX^V=\bar{D}X^V$ *et* $DX^H=\bar{D}X^H$ *pour tout* $X\in\mathfrak{X}(M)$.

Preuve: Considérons D et $\bar{D}$ sous forme canonique:

$$D=L_X+i_F\,;\qquad \bar{D}=L_{\bar{X}}+i_{\bar{F}}$$

où $X, \bar{X}\in\mathfrak{X}(TM)$ et $F, \bar{F}\in\mathfrak{T}_1^1(TM)$. La condition (a) implique que $Xf^C=\bar{X}f^C$ pour toute fonction différentiable $f\in\mathfrak{F}(M)$. On déduit que $X=\bar{X}$. La condition (b) implique que

$$[X, Y^V]+FY^V=[\bar{X}, Y^V]+\bar{F}Y^V$$

$$[X, Y^H]+FY^H=[\bar{X}, Y^H]+\bar{F}Y^H$$

pour tout $Y\in\mathfrak{X}(M)$. Comme $X=\bar{X}$, on a

$$FY^V=\bar{F}Y^V \text{ et } FY^H=\bar{F}Y^H$$

pour tout $Y\in\mathfrak{X}(M)$. Comme les Y^V et Y^H engendrent le module des champs de vecteurs sur TM, on déduit que $F=\bar{F}$, d'où $D=\bar{D}$.

Soit $D=L_X+i_F$ une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$. On appelle le relèvement horizontal de D à TM la dérivation D^H de $\mathfrak{T}(TM)$ définie par

$$D^H = L_{X^H} + \imath_{F^H}$$

Nous avons les relations:

PROPOSITION.

$$D^H f^C = (Df)^C - (\nabla_T X) f^C$$

$$D^H Y^V = (DY)^V + (\nabla_Y X)^V$$

$$D^H Y^H = (DY)^H - \gamma R(X, Y)$$

où $f \in \mathcal{F}(M)$, $Y \in \mathcal{X}(M)$ et R est la courbure de la connexion linéaire ∇ définie par

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

Preuve: Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(M)$, on a

$$D^H f^C = X^H f^C = (Xf)^C - (\nabla_T X) f^C = (Df)^C - (\nabla_T X) f^C$$

Pour tout $Y \in \mathcal{X}(M)$, on a

$$\begin{aligned} D^H Y^V &= [X^H, Y^V] + F^H Y^V \\ &= [X, Y]^V + (\nabla_Y X)^V + (FY)^V \\ &= (DY)^V + (\nabla_Y X)^V \end{aligned}$$

car

$$[X^H, Y^V] = [X, Y]^V + (\nabla_Y X)^V \qquad \text{(voir [2])}$$

De même,

$$\begin{aligned} D^H Y^H &= [X^H, Y^H] + F^H Y^H \\ &= [X, Y]^H - \gamma \hat{R}(X, Y) + (FY)^H \\ &= (DY)^H - \gamma \hat{R}(X, Y) \end{aligned}$$

car

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H - \gamma \hat{R}(X, Y) \qquad \text{(voir [2])}$$

PROPOSITION. *L'application $D \mapsto D^H$ possède les propriétés suivantes*:
(a) *Pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$*, $(\lambda D)^H = \lambda D^H$;
(b) $(D + \bar{D})^H = D^H + \bar{D}^H$

Preuve: Soient $D = L_X + i_F$ et $\bar{D} = L_X + i_F$ deux dérivations de $\mathcal{T}(M)$. Nous avons

$$(D + \bar{D})^H = L_{(X+\bar{X})^H} + i_{(F+\bar{F})^H} = D^H + \bar{D}^H$$

Si $\lambda \in \boldsymbol{R}$, nous avons

$$(\lambda D)^H = L_{\lambda X^H} + \imath_{F^H} = \lambda (L_{X^H} + i_{F^H}) = \lambda D^H$$

L'application $D \mapsto D^H$ est donc $\boldsymbol{R}$-linéaire, mais elle n'est pas un homomorphisme d'algèbres de Lie. D'une façon analogue, nous avons des résultats analogues pour les relèvements horizontaux des dérivations de $\Lambda(M)$ aux fibrés tangents.

3. Relèvements diagonaux des formes vectorielles.

Si M est munie d'une connexion linéaire ∇, il existe une 1-forme vectorielle G sur TM définie par:

$$GX^V=X^H\,; \qquad GX^H=X^V$$

pour tout champ de vecteurs $X\in\mathfrak{X}(M)$. Nous avons

$$G^2X^V=X^V \text{ et } G^2X^H=X^H$$

pour tout champ de vecteurs $X\in\mathfrak{X}(M)$. Par conséquent, $G^2=I$.
Puisque G est un endomorphisme du fibré tangent $\tau(TM)$, il détermine un endomorphisme, noté encore G, du module $\mathfrak{X}(TM)$ des champs de vecteurs sur TM. Nous obtenons ainsi un endomorphisme G^* de l'algèbre extérieure $\Lambda(TM)$.

Soit $\Psi^p(M)$ le $\mathfrak{F}(M)$-module des p-formes vectorielles sur M. Un élément $Q\in\Psi^p(M)$ peut être considéré comme un champ de tenseurs de type $(1, p)$ sur M. Le relèvement vertical Q^V de Q est une p-forme vectorielle semi-basique sur TM. Nous posons

$$Q^{(v)}=GQ^V\,; \qquad Q^{(h)}=G^*(Q^V)$$

$$Q^{(v)}(u_1, \cdots, u_p)=G(Q^V(u_1, \cdots, u_p))$$

$$Q^{(h)}(u_1, \cdots, u_p)=Q^V(Gu_1, \cdots, Gu_p)$$

où $u_1, u_2, \cdots, u_p$ sont p champs de vecteurs sur TM. Nous avons

PROPOSITION. *Soient $X_1, \cdots, X_p$ p champs de vecteurs sur M.*

(a) $Q^{(v)}(X_1{}^H, \cdots, X_p{}^H)=(Q(X_1, \cdots, X_p))^H$

$Q^{(v)}(X_1{}^H, \cdots, X_i{}^V, \cdots, X_p{}^H)=0$

(b) $Q^{(h)}(X_1{}^V, \cdots, X_p{}^V)=(Q(X_1, \cdots, X_p))^V$

$Q^{(h)}(X_1{}^V, \cdots, X_j{}^H, \cdots, X_p{}^V)=0$

PROPOSITION. *Soient $P\in\Psi^1(M)$, $Q\in\Psi^1(M)$ et $I\in\Psi^1(M)$.*

$$(QP)^{(v)}=Q^{(v)}P^{(v)}\,; \qquad I^{(v)}=GJ$$

$$(QP)^{(h)}=Q^{(h)}P^{(h)}\,; \qquad I^{(h)}=JG$$

où J est la structure presque tangente canonique sur TM.

Preuve: Pour tout $X\in\mathfrak{X}(M)$, on a

$$(QP)^{(v)}X^H=((QP)X)^H=(Q(PX))^H=Q^{(v)}(PX)^H=Q^{(v)}P^{(v)}X^H$$

et

$$(QP)^{(v)}X^V = Q^{(v)}P^{(v)}X^V = 0$$

On déduit que

$$(QP)^{(v)} = Q^{(v)}P^{(v)}.$$

De même, on a

$$(QP)^{(h)}X^H = Q^{(h)}P^{(h)}X^H = 0$$

$$(QP)^{(h)}X^V = ((QP)X)^V = (Q(PX))^V = Q^{(h)}(PX)^V = Q^{(h)}P^{(h)}X^V$$

On déduit que

$$(QP)^{(h)} = Q^{(h)}P^{(h)}.$$

Si I est la 1-forme vectorielle identique sur M, on a $I^V = J$, où J est la structure presque tangente canonique sur TM. Par conséquent,

$$I^{(v)} = GJ \text{ et } I^{(h)} = JG$$

Soit $Q \in \Psi^p(M)$ une p-forme vectorielle sur M. On appelle le relèvement diagonal de Q à TM la p-forme vectorielle sur TM définie par

$$Q^D = Q^{(v)} + Q^{(h)} = GQ^V + G^*(Q^V)$$

D'après cette définition, on a :

PROPOSITION.

$$Q^D(X_1^V, \cdots, X_p^V) = (Q(X_1, \cdots, X_p))^V$$

$$Q^D(X_1^H, \cdots, X_p^H) = (Q(X_1, \cdots, X_p))^H$$

$$Q^D(X_1^V, \cdots, X_i^H, \cdots, X_p^V) = 0$$

$$Q^D(X_1^H, \cdots, X_j^V, \cdots, X_p^H) = 0$$

PROPOSITION. *Soient $P \in \Psi^1(M)$, $Q \in \Psi^1(M)$ et $I \in \Psi^1(M)$.*

$$(QP)^D = Q^D P^D; \qquad I^D = I$$

où le deuxième membre I est la 1-forme vectorielle identique sur TM.

Preuve: Comme $(QP)^D X^V = Q^D P^D X^V$ et $(QP)^D X^H = Q^D P^D X^H$ pour tout $X \in \mathfrak{X}(M)$, on déduit que $(QP)^D = Q^D P^D$. D'autre part, on a

$$I^D = I^{(v)} + I^{(h)} = JG + GJ = I$$

car GJ est le projecteur horizontal sur TM défini par la connexion linéaire ∇ et JG est le projecteur vertical sur TM défini par la même connexion ∇.

D'aprés la proposition précédente, on déduit la propriété suivante: si $F(t)$ est un polynôme à une indéterminée, on a $(F(Q))^D = F(Q^D)$ pour toute 1-forme vectorielle $Q \in \Psi^1(M)$.

Certaines structures définies par des 1-formes vectorielles sur M peuvent être relèvées en structures correspondantes sur TM. Par exemple:

PROPOSITION. *Si Q est une 1-forme vectorielle définissant sur M une structure presque complexe, le relèvement Q^D définit sur TM une structure presque complexe.*

PROPOSITION. *Si Q est une 1-forme vectorielle définissant sur M une f-structure de rang k, le relèvement Q^D définit sur TM une f-structure de rang $2k$.*

PROPOSITION. *Si une variété différentiable M de dimension* $4\,\mathrm{m}$, *est munie d'une structure presque quaternionienne définie par les deux 1-formes vectorielles P et Q vérifiant:*

$$P^2=Q^2=-I; \qquad PQ+QP=0$$

les relèvements P^D et Q^D (resp. P^H et Q^H; P^C et Q^C) définissent une structure presque quaternionienne sur TM.

Soit Q une 1-forme vectorielle sur M. Le tenseur de Nijenhuis associé à Q est défini par

$$N=\frac{1}{2}[Q, Q]$$

où plus explicitements, par

$$N(u, v)=[Qu, Qv]+Q^2[u, v]-Q[Qu, v]-Q[u, Qv]$$

pour tout $u, v\in\mathfrak{X}(M)$. Soit N^* le tenseur de Nijenhuis associé à Q^D. Comme les X^V et X^H engendrent le module des champs de vecteurs sur TM, où $X\in\mathfrak{X}(M)$, le tenseur N^* est complètement déterminé par ses valeurs sur les champs de vecteurs qui sont de la forme X^V ou X^H. Nous avons

$$\begin{aligned}
N^*(X^V, Y^V)&=[Q^DX^V, Q^DY^V]+(Q^D)^2[X^V, Y^V]\\
&\quad -Q^D[Q^DX^V, Y^V]-Q^D[X^V, Q^DY^V]\\
&=[(QX)^V, (QY)^V]-Q^D[(QX)^V, Y^V]-Q^D[X^V, (QY)^V]\\
&=0\\
N^*(X^V, Y^H)&=[Q^DX^V, Q^DY^H]+(Q^D)^2[X^V, Y^H]\\
&\quad -Q^D[Q^DX^V, Y^H]-Q^D[X^V, Q^DY^H]\\
&=[(QX)^V, (QY)^H]+(Q^D)^2[X^V, Y^H]\\
&\quad -Q^D[(QX)^V, Y^H]-Q^D[X^V, (QY)^H]\\
&=(N(X, Y))^V-\{\nabla_{QX}(QY)+Q^2(\nabla_X Y)\\
&\quad -Q(\nabla_{QX}Y)-Q(\nabla_X(QY))\}^V\\
N^*(X^H, Y^H)&=[Q^DX^H, Q^DY^H]+(Q^D)^2[X^H, Y^H]\\
&\quad -Q^D[Q^DX^H, Y^H]-Q^D[X^H, Q^DY^H]
\end{aligned}$$

$$=[(QX)^H, (QY)^H]+(Q^D)^2[X^H, Y^H]$$
$$-Q^D[(QX)^H, Y^H]-Q^D[X^H, (QY)^H]$$
$$=(N(X, Y))^H-\{\gamma\hat{R}(QX, QY)+(Q^D)^2\gamma\hat{R}(X, Y)$$
$$-Q^H\gamma\hat{R}(QX, Y)-Q^D\gamma\hat{R}(X, QY)\}$$

où $\hat{R}$ est la courbure de la connexion linéaire ∇ définie par

$$\hat{\nabla}_X Y=\nabla_Y X+[X, Y]$$

On déduit de ces calculs le résultat suivant [2]:

PROPOSITION. *Soit Q une 1-forme vectorielle sur M. La condition $N^*=0$ est équivalente aux conditions*:

$$N=0$$
$$Q_i^k\nabla_k Q_j^h-Q_k^h\nabla_i Q_j^k=0$$
$$\hat{R}(QX, QY)-Q\hat{R}(QX, Y)-Q\hat{R}(X, QY)+Q^2\hat{R}(X, Y)=0$$

où $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ et Q_i^h sont les composantes locales de Q.
Soit $D=L_X+i_F$ une dérivation de $\mathfrak{T}(M)$. Le relèvement diagonal de D à TM est la dérivation de $\mathfrak{T}(TM)$ définie par:

$$D^D=L_{X^D}+i_{F^D}, \text{ où } X^D=X^V+X^H$$

On montre que l'application $D\mapsto D^D$ est une application $\boldsymbol{R}$-linéaire et on a des résultats analogues pour les relèvements diagonaux des dérivations de $\Lambda(M)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FROLICHER ET NIJENHUIS, Theory of Vector-valued Differential Forms Proc. Kon. Ned. Akad., A **59** (1956), p. 338.

[2] YANO ET ISHIHARA, Tangent and Cotangent Bundles, Dekker 1973.

[3] YANO ET KOBAYASHI, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles J. Math. Soc. Japan, **18** (1966), p. 194.

[4] YUEN, Sur les Fibrés Tangents d'ordre 2 (à paraître)

UNIVERSITÉ DE METZ
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTMENT DE MATHÉMATIQUES
ILE DU SAULCY
57000-METZ
FRANCE