K. ISHIGURO UND W. MEYER-KÖNIG
KŌDAI MATH. SEM. REP
26 (1975), 467—477

ÜBER DAS VERTRÄGLICHKEITSPROBLEM BEI DEN SINGULÄREN TAYLORSCHEN LIMITIERUNGSVERFAHREN

Herrn Professor Yûsaku Komatu zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

VON KAZUO ISHIGURO* UND WERNER MEYER-KÖNIG

1. Einleitung.

Wir behandeln hier die Taylor-Verfahren T_p der Limitierungstheorie (Reihe-Reihe-Form, reelle Ordnungen). Bei Beschränkung auf reguläre Summierbarkeit sind alle diese Verfahren miteinander verträglich (vgl. [4]). Nachstehend untersuchen wir die Verträglichkeitsfrage in den bei Zulassung der singulären Summierbarkeit neu hinzukommenden Fällen. Das Ergebnis ist: Sofern (beim Vergleich zweier verschiedener unserer Verfahren) singuläre Limitierung beteiligt ist und sofern sich das Problem überhaupt stellt (was dies heißt. siehe in 2.2), liegt Unverträglichkeit vor.

Wegen des Verträglichkeitsproblems für die ganze Klasse der Kreisverfahren, von der die Taylor-Verfahren eine Teilklasse bilden, sei auf [4] und [5] sowie dort zitierte weitere Literatur verwiesen. Generell ist darüber zu sagen, daß einerseits in vielen Fällen die Antwort auf die Verträglichkeitsfrage sehr leicht gegeben werden kann, andererseits aber zahlreiche Fälle übrigbleiben, bei denen die mit Reihenkonvergenzproblemen kombinierte funktionentheoretische Situation nicht unmittelbar voll übersehbar ist und deshalb zur Klärung herausfordert.

Unsere Note bildet eine Fortsetzung von [4]. Jedoch reichen die dortigen Methoden bei Hereinnahme der singulären Fälle nicht mehr aus. Das Haupthilfsmittel besteht jetzt (wie beim Nachweis der Existenz singulär Taylor-summierbarer Reihen; vgl. [7]) in der Auflösung gewisser unendlicher linearer Gleichungssysteme. Die Möglichkeit der Auflösung wird dabei jeweils durch ein Kriterium von G. Pólya ([10]; Näheres siehe in 2.3) gesichert. Im Zusammenhang damit sei vermerkt, daß es bei unseren Untersuchungen um in der Sprache der

Received Jan. 8, 1974.

* Der Alexander von Humbold-Stiftung gebührt Dank für großzügige Förderung, die es dem erstgenannten Verfasser ermöglichte, im Sommersemester 1973 am Mathematischen Institut A der Universität Stuttgart zu arbeiten. Die hier mitgeteilten Untersuchungen wurden im wesentlichen während des erwähnten Zeitraums durchgeführt.

Limitierungstheorie behandelte Fragestellungen geht, die einen Ausbau von bei Pólya den Ausgangspunkt bildenden funktionentheoretischen Aufgaben darstellen.

Nach Vorbereitungen in Nr. 2 behandeln wir in Nr. 3 die Verträglichkeit von T_p^S und T_q^S, in Nr. 4 die Verträglichkeit von T_p^R und T_q^S (wegen T_p^S usw. vgl. 2.1). In einer Schlußbemerkung (Nr. 5) erläutern wir die Möglichkeit, bei den benützten unendlichen linearen Gleichungssystemen anstatt des Pólyaschen Auflösbarkeitskriteriums ein damit eng verwandtes Kriterium von M. Eidelheit ([2], [3]) heranzuziehen.

Auf weitere Verträglichkeitsuntersuchungen im Bereich der Kreisverfahren werden die Verfasser zurückkommen. Zusatz bei der Korrektur: Vgl. K. Ishiguro und W. Meyer-König, Über das Verträglichkeitsproblem bei den Kreisverfahren der Limitierungstheorie, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 25, Linear Operators and Approximation II, Birkhäuser Verlag (1974), S. 547-558. Zwei Berichtigungen dazu: Auf S. 550, letzte Zeile, muß es statt $\frac{1}{6}$ heißen $\frac{2}{9}$; auf S. 554, erste Zeile, muß es statt S_{-3}^R heißen S_3^R.

2. Bezeichnungen und Hilfsmittel.

2.1. Unter dem Taylor-Verfahren T_p (p die im Einzelfall jeweils feste reelle Ordnung, $p\neq 0$, $p\neq 1$; vgl. [12], S. 140) verstehen wir das zu der oberen Dreiecksmatrix mit den Elementen

$$a_{nk}=(1-p)^n\binom{k}{n}p^{k-n} \qquad (n=0,1,\cdots;\ k=0,1,\cdots) \tag{1}$$

gehörige Reihe-Reihe-Verfahren. Die unendliche Reihe $\sum a_n$ ($\sum$ steht stets für $\sum_{n=0}^{\infty}$; die Reihenglieder a_n sind komplexe Zahlen) heißt also T_p-summierbar, und zwar zum Wert s, geschrieben $T_p-\sum a_n=s$, wenn die T_p-Transformation von $\sum a_n$, nämlich die Reihe

$$\sum \alpha_n \quad \text{mit} \quad \alpha_n=\sum_{k=n}^{\infty} a_{nk}a_k \qquad (n=0,1,\cdots)$$

existiert und konvergent, und zwar zur Summe s, ist. Genau dann ist T_p auf $\sum a_n$ anwendbar, d.h. genau dann existiert $\sum \alpha_n$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes feste $n=0,1,\cdots$ gilt

$$a_k=O(k^{-n}|p|^{-k}) \qquad \text{für} \quad k\to\infty\,. \tag{2}$$

Der Reihe $\sum a_n$ ordnen wir die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ vom Konvergenzradius r ($0\leqq r\leqq\infty$) zu; wir setzen

$$f(z)=\sum a_n z^n \qquad \text{für} \quad |z|<r\,. \tag{3}$$

Ist (2) erfüllt, so ist $r\geqq|p|$; ist zudem $f(z)$ bei $z=p$ regulär, so gilt

$$f(z)=\sum\frac{\alpha_n}{(1-p)^n}(z-p)^n \qquad (|z-p| \text{ klein})\,. \tag{4}$$

T_p ist auf $\sum a_n$ sicher dann anwendbar, wenn $|p|<r$ ist. Permanenz von T_p liegt genau für $0<p<1$ vor.

Wir unterscheiden reguläre und singuläre T_p-Summierbarkeit. T_p^R- oder reguläre T_p-Summierbarkeit von $\sum a_n$ bedeutet, daß $\sum a_n$ durch T_p summiert wird und zudem $f(z)$ bei $z=p$ regulär ist; T_p^S- oder singuläre T_p-Summierbarkeit von $\sum a_n$ bedeutet, daß $\sum a_n$ durch T_p summiert wird und zudem $f(z)$ bei $z=p$ singulär ist. Damit ist klar, was unter einer Aussage wie $T_p^R-\sum a_n=s$ zu verstehen ist. Gilt $T_p^S-\sum a_n=s$, so ist die Funktion

$$\varphi(z)=\sum\frac{a_n}{(1-p)^n}(z-p)^n \qquad (|z-p|<|1-p|)$$

wohldefiniert; aber $\varphi(z)$ ist, weil $f(z)$ bei $z=p$ singulär ist, nicht die analytische Fortsetzung von $f(z)$.

In [4] handelte es sich bei der Taylor-Summierbarkeit stets um den regulären Fall. Das T_p-Verfahren in [4] ist also dasselbe, was wir in der gegenwärtigen Note als T_p^R-Verfahren bezeichnen.

2.2. Es wurde schon gesagt, daß irgend zwei Verfahren

$$T_p^R,\ T_q^R\ (p,\ q \text{ reell};\ p\neq 0,\ p\neq 1,\ q\neq 0,\ q\neq 1)$$

miteinander verträglich sind ([4], S. 120, 6.7), d. h. aus $T_p^R-\sum a_n=s$ und $T_q^R-\sum a_n=t$ folgt $s=t$. Zu untersuchen sind jetzt also noch die Paare

$$(T_p^S,\ T_q^S) \quad \text{und} \quad (T_p^R\ T_q^S).$$

Es handle sich z. B. um T_p^S und T_q^S mit $p=-2$, $q=3$. Dann liegt kein Problem vor: Es gibt keine Reihe $\sum a_n$, die gleichzeitig T_p^S- und T_q^S-summierbar ist, weil dazu $\sum a_n z^n$ regulär für $|z|<3$ und singulär bei $z=2$ sein müßte. Solchen Vorkommnissen Rechnung tragend, verabreden wir bei Vorliegen eines Paares (V, W) von Limitierungsverfahren die folgenden Ausdrucksweisen. Gibt es keine Reihe $\sum a_n$, die gleichzeitig V- und W-summierbar ist, so sagen wir, das Verträglichkeitsproblem stellt sich nicht für das Paar (V, W). Die Feststellung " V und W sind verträglich " soll andererseits heißen: Es gibt mindestens eine Reihe $\sum a_n$, die sowohl V- als auch W-summierbar ist; und immer wenn eine Reihe $\sum b_n$ mit $V-\sum b_n=s$, $W-\sum b_n=t$ vorliegt, folgt daraus $s=t$. Die Feststellung " V und W sind nicht verträglich" soll schließlich bedeuten: Es gibt eine Reihe $\sum a_n$ mit $V-\sum a_n=s$, $W-\sum a_n=t$, $s\neq t$.

2.3. Die für unsere Untersuchungen zentrale Bedeutung des Pólyaschen Auflösbarkeitskriteriums wurde in Nr. 1 betont. Wir stellen dieses Kriterium jetzt bereit. Vorgelegt sei (im Komplexen) das unendliche lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}x_k=d_n \qquad (n=0, 1, \cdots), \tag{5}$$

wo die c_{nk} gegebene Koeffizienten, die d_n gegebene rechte Seiten, und die $x_0, x_1, \cdots$ die gesuchten Größen sind. Die Koeffizienten c_{nk} denken wir uns zu der Matrix C zusammengefaßt. Von einer Lösung des Gleichungssystems sprechen wir, wenn die linken Seiten von (5) im gewöhnlichen Sinn konvergieren und die Gleichungen (5) erfüllt sind. Nach [10] S. 234-235 und S. 252 gilt:

Kriterium 2.3.1. *Das Gleichungssystem* (5) *besitzt sicher dann mindestens eine Lösung, wenn die folgende hinreichende Bedingung erfüllt ist: In jeder Zeile der Matrix C stehen höchstens endlich viele Nullen, und für jedes* $n=0,1,\cdots$ *gilt*

$$\frac{c_{nk}}{c_{n+1,k}} \longrightarrow 0 \quad \textit{fur} \quad k\to\infty . \tag{6}$$

Nach [10] lassen sich schwächere hinreichende Bedingungen angeben. Jedoch ist für unsere Zwecke das formulierte Kriterium bequem und ausreichend. Auch mögliche Zusätze (über die Anzahl der Lösungen oder über die Existenz von Lösungen mit absolut konvergenten linken Seiten) benötigen wir hier nicht. Weitere Literatur zu diesem Fragenkomplex: [2], [3]; [1] S. 32; [12] S. 33, III (auch S. 32, II); [9], [8] und dort zitierte Arbeiten.

2.4. Es sei $0<p<1$. Dann ist T_p sowohl permanent (wie oben schon vermerkt wurde) als auch absolut permanent (wie man mit Hilfe von [6] Satz 1 feststellt). Damit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Konvergenz (bzw. der absoluten Konvergenz) der Potenzreihe (3) bei $z=1$ einerseits und der Potenzreihe (4) bei $z=1$ andererseits. Wir stellen diesen Zusammenhang für unsere nachherigen Zwecke in folgender Fassung bereit:

Satz 2.4.1. *Die Potenzreihe*

$$h(z)=\sum c_n(z-z_0)^n \tag{7}$$

konvergiere an der Stelle $z=z_1$ *zum Wert* s, *wobei* $z_1\neq z_0$ *vorausgesetzt ist. Weiter sei* $z_0'=z_0+p(z_1-z_0)$, *wo* p *eine feste reelle Zahl und* $0<p<1$ *ist. Dann konvergiert die Taylor-Entwicklung*

$$h(z)=\sum c_n'(z-z_0')^n \tag{8}$$

bei $z=z_1$ *ebenfalls zum Wert* s. *Ist überdies* (7) *bei* $z=z_1$ *absolut konvergent, so ist auch* (8) *bei* $z=z_1$ *absolut konvergent.*

3. Vergleich von T_p^S und T_q^S.

3.1. Wir beginnen mit dem Vergleich zweier singulärer Taylor-Verfahren. Für die (fest gedachten) Ordnungen p und q gelte

$$p \text{ und } q \text{ reell}, \qquad p\neq 0,\ p\neq 1,\ q\neq 0,\ q\neq 1 . \tag{9}$$

Eine Reihe $\sum a_n$ mit

$$T_p^S\text{-}\sum a_n=s, \qquad T_q^S\text{-}\sum a_n=t \tag{10}$$

liege vor. Die Funktion $f(z)=\sum a_n z^n$ ist dann regulär für $|z|<|p|$ und regulär für $|z|<|q|$, ferner sind $z=p$ und $z=q$ singuläre Punkte von $f(z)$. Daraus folgt notwendig $|p|=|q|$. Das Verträglichkeitsproblem für T_p^S und T_q^S stellt sich also nicht, wenn $|p|\neq|q|$ ist. Im Fall $p=q$ hat man trivialerweise Verträglichkeit. Zu untersuchen bleibt daher nur noch der Fall $p=-q$.

3.2. Das Ergebnis für den letzteren Fall ist enthalten in

Satz 3.2.1. *Für die Ordnungen p und q gelte* (9), *ferner sei $p=-q$. Dann sind T_p^S und T_q^S nicht verträglich.*

Zum Beweis könnte man an Pólya [10] S. 247, Aufgabe 4, anknüpfen. Damit würde man von [10] S. 241, Satz II (vgl. dazu [11] S. 129, Fußnote) Gebrauch machen. Dieser Satz II ist komplizierter als [10] S. 234, Satz I, bzw. Kriterium 2.3.1. Wir zeigen jetzt, wie man mit dem letzteren Kriterium auskommt. Dabei nützen wir die wegen $p=-q$ vorhandene Symmetrie aus.

Beweis von Satz 3.2.1. Wir setzen $p<0$ voraus, was offenbar erlaubt ist. Wegen $p=-q$ ist $p\neq-1$. Die Elemente der Matrizen T_p und T_q bezeichnen wir mit a_{nk} bzw. b_{nk}, wobei dann

$$b_{nk}=(-1)^{k-n}\frac{(1+p)^n}{(1-p)^n}a_{nk} \qquad (n=0,1,\cdots;\ k=0,1,\cdots)$$

gilt. Ferner setzen wir

$$c_n=\frac{1}{2}(-1)^n\frac{(1-p)^n}{(1+p)^n}\frac{1}{n\,!}\,;$$

statt des Faktors $1/(n\,!)$ wäre vieles andere ebenfalls möglich, wie nachher deutlich wird. Wir führen den Beweis nun so, daß wir die Existenz einer Reihe $\sum a_n$ aufzeigen, für die (10) mit $s\neq t$ gilt. Dazu betrachten wir die beiden unendlichen linearen Gleichungssysteme

$$a_{n0}a_0+a_{n2}a_2+\cdots=c_n \qquad (n=0,1,\cdots)\,, \tag{11}$$

$$a_{n1}a_1+a_{n3}a_3+\cdots=-c_n \qquad (n=0,1,\cdots) \tag{12}$$

für die Unbekannten $a_0, a_2, \cdots$ bzw. $a_1, a_3, \cdots$. Die Existenz jeweils (mindestens) einer Lösung ist nach Kriterium 2.3.1 gewährleistet. Eine Lösung von (11) vereinigen wir mit einer Lösung von (12) zu der jetzt festen Folge $\{a_0, a_1, \cdots\}\neq\{0,0,\cdots\}$. Aus (11) und (12) ergibt sich durch Addition

$$\alpha_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}a_k=0 \qquad (n=0,1,\cdots)\,,$$

woraus $T_p-\sum a_n=0$ folgt. Würde es sich hierbei um reguläre Summierbarkeit handeln, so müßte $f(z)=\sum a_n z^n$ nach (4) identisch verschwinden, was wegen $\{a_0, a_1, \cdots\}\neq\{0,0,\cdots\}$ nicht der Fall ist; somit gilt

$$T_p^S-\sum a_n=0\,. \tag{13}$$

Aus (11) und (12) ergibt sich weiter durch Subtraktion

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_{nk}a_k=2c_n \qquad (n=0,1,\cdots)\,,$$

und hieraus, indem wir beide Seiten multiplizieren mit $(-1)^{-n}(1+p)^n/(1-p)^n$,

$$\beta_n=\sum_{k=0}^{\infty} b_{nk}a_k=\frac{1}{n\,!} \qquad (n=0, 1, \cdots),$$

woraus $T_q-\sum a_n=e$ folgt. Würde es sich hierbei um reguläre Summierbarkeit handeln, so hätte die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ in der Umgebung der Stelle $z=q$ die Gestalt

$$f(z)=\sum \frac{\beta_n}{(1-q)^n}(z-q)^n=\sum \frac{1}{n\,!}\frac{(z-q)^n}{(1-q)^n},$$

$f(z)$ wäre als eine ganze Funktion, im Widerspruch zu (13); somit gilt

$$T_q^S-\sum a_n=e. \tag{14}$$

Im Hinblick auf (13) und (14) ist Satz 3.2.1 nun bewiesen.

4. Vergleich von T_p^R und T_q^S.

4.1. Für die Ordnungen p und q gelte wieder (9). Die vollständige Antwort auf die Verträglichkeitsfrage jetzt ist in dem die p, q-Ebene zeigenden Bild 1 enthalten. Die Punkte der vier Geraden $p=0$, $p=1$, $q=0$, $q=1$ bleiben ganz außer Betracht. Durch Schraffierung sind die beiden Bereiche

$$\left\{-\infty<q\leqq-\frac{1}{3}, \frac{q+1}{2}\leqq p\leqq -q\right\} \text{ und } \left\{1<q<\infty, -q\leqq p\leqq \frac{q+1}{2}\right\} \tag{15}$$

gekennzeichnet.

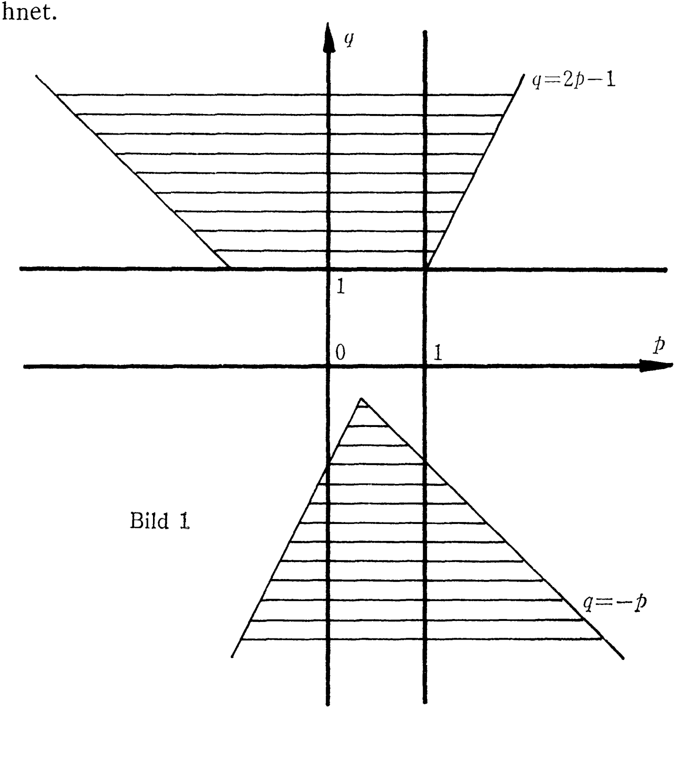

Bild 1

Die Randpunkte nach links und nach rechts sind den Bereichen zuzurechnen; der zum unteren Bereich gehörige Eckpunkt hat die Koordinaten $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Liegt der Punkt (p, q) in einem dieser Bereiche, so sind T_p^R und T_q^S nicht verträglich. Für alle anderen Punkte (p, q) stellt sich das Verträglichkeitsproblem für T_p^R und T_q^S nicht. Diese letzteren Fälle lassen sich durchweg und unmittelbar durch die folgende Überlegung erledigen: Ist

$$T_p^R-\sum a_n=s\,, \qquad T_q^S-\sum a_n=t\,, \tag{16}$$

so kann die Stelle $z=q$ der komplexen Zahlenebene weder im Kreis $|z|<|p|$ noch im Kreis $|z-p|<|1-p|$ liegen. Wir brauchen uns jetzt also nur noch mit dem schraffierten Teil der p, q-Ebene zu beschäftigen.

4.2. Zuerst betrachten wir diejenigen beiden schraffierten Teilbereiche, die im ersten bzw. dritten Quadranten der p, q-Ebene liegen. Wir beschränken uns auf den im dritten Quadranten gelegenen Teilbereich; ganz analog würde man die dem Teilbereich im ersten Quadranten entsprechenden Fälle behandeln. Es sei also

$$-\infty<p<0\,, \qquad -\infty<q\leqq 2p-1\,. \tag{17}$$

Wir knüpfen an das unendliche lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_0+\quad a_1+\quad a_2+\cdots &=1 \\ b_{00}a_0+b_{01}a_1+b_{02}a_2+\cdots &=0 \\ b_{10}a_0+b_{11}a_1+b_{12}a_2+\cdots &=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned} \tag{18}$$

für die Unbekannten $a_0, a_1, \cdots$ an; dabei sind die b_{nk} die Elemente der Matrix T_q. Die Auflösbarkeitsbedingung des Kriteriums 2.3.1 ist erfüllt, wobei $|q|>1$ von Bedeutung ist. Eine Lösung $\{a_0, a_1, \cdots\}$, die notwendig $\neq\{0, 0, \cdots\}$ ist, halten wir nun fest. Offenbar ist $T_q-\sum a_n=0$, genauer sogar (vgl. die zu (13) führende Schlußweise)

$$T_q^S-\sum a_n=0\,. \tag{19}$$

Unser Ziel ist jetzt (20), womit der erstrebte Unverträglichkeitsbeweis geführt sein wird. Für den Konvergenzradius r der Potenzreihe $f(z)=\sum a_n z^n$ gilt $r=|q| \geqq 1-2p$. Insbesondere liegt die Stelle $z=1$ in diesem Kreis, woraus $f(1)=1$ folgt (vgl. die oberste der Gleichungen (18)). Ferner liegt die Stelle $z=p$ in diesem Kreis; also ist T_p auf $\sum a_n$ anwendbar und es gilt (4). Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens sei $q<2p-1$. Dann ist $f(z)$, weil regulär für $|z|<|q|$, regulär im Innern und auf dem ganzen Rand des Kreises $|z-p|=|1-p|$; nach (4) ist also $\sum a_n=f(1)=1$ und somit

$$T_q^R-\sum a_n=1\,. \tag{20}$$

Zweitens sei $q=2p-1$. Da $\sum a_n z^n$ (wegen der Anwendbarkeit von T_q auf $\sum a_n$) für $z=q$ absolut konvergent, schließen wir in diesem Fall nach Satz 2.4.1, daß die Potenzreihe (4) bei $z=q$ ebenfalls absolut konvergiert und damit bei $z=1$ jedenfalls konvergiert, womit (20) auch jetzt wieder gesichert ist.

4.3. Die Methode, nach der wir alle restlichen Fälle (es handelt sich nur noch um Unverträglichkeitsfälle) erledigen, erläutern wir an Hand des Falles $\{-\infty<p<-1,\ q=-p\}$. Es sei also

$$q>1; \tag{21}$$

verglichen werden T^R_{-q} und T^S_q. Wir setzen

$$\gamma=\frac{1+q}{2q} \qquad \left(\text{man beachte}: \frac{1}{2}<\gamma<1\right) \tag{22}$$

und betrachten das unendliche lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
A_0+\quad \gamma A_1+\quad \gamma^2A_2+\quad \gamma^3A_3+\cdots&=1\\
\binom{0}{0}A_0+\binom{1}{0}A_1+\binom{2}{0}A_2+\binom{3}{0}A_3+\cdots&=0\\
\binom{1}{1}A_1+\binom{2}{1}A_2+\binom{3}{1}A_3+\cdots&=0\\
\binom{2}{2}A_2+\binom{3}{2}A_3+\cdots&=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&
\end{aligned} \tag{23}$$

für die Unbekannten $A_0, A_1, \cdots$; die hinreichende Bedingung von Kriterium 2.3.1 ist erfüllt. Eine Lösung $\{A_0, A_1, \cdots\}$, für die notwendig

$$\{A_0, A_1, \cdots\}\neq\{0, 0, \cdots\} \tag{24}$$

ist, halten wir jetzt fest. Wir setzen

$$F(w)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k w^k \qquad \text{für} \quad |w|<1, \quad \text{mit } F(\gamma)=1. \tag{25}$$

Für $n=0, 1, \cdots$ ist

$$\frac{1}{n!}F^{(n)}(w)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}A_k w^{k-n} \qquad \text{für} \quad |w|<1;$$

wegen der Konvergenz der rechten Seite für $w=1$ folgt daraus

$$\frac{1}{n!}F^{(n)}(w)\to\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}A_k=0 \qquad \text{für} \quad w\to 1- \ (w \text{ reell}). \tag{26}$$

Wäre also $w=1$ eine reguläre Stelle von $F(w)$, so wäre $F(1)=F'(1)=\cdots=0$, d.h. $F(w)$ würde identisch verschwinden, im Widerspruch zu (24). Damit wissen wir, daß $w=1$ singuläre Stelle für $F(w)$ ist. Vermöge

$$w=\frac{z+q}{2q}, \qquad z=q(2w-1), \qquad f(z)=F\left(\frac{z+q}{2q}\right)=\sum a_n z^n \tag{27}$$

gehen wir von unserer w- zu einer z-Ebene über; $f(z)$ ist regulär im Kreis $|z+q|<2q$, singulär bei $z=q$, und $\sum a_n z^n$ hat den Konvergenzradius $r=q$. Für $n=0, 1, \cdots$ und $|z+q|<2q$ gilt

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\frac{A_k}{2^k q^k}(z+q)^{k-n},$$

wobei die rechte Seite für $z=q$ konvergiert. Andererseits ist für dieselben n und für $|z|<q$

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k z^{k-n}, \tag{28}$$

und nach Satz 2.4.1 konvergiert auch hier die rechte Seite für $z=q$. Daraus schließen wir, daß die T_q-Transformation $\sum \beta_n$ von $\sum a_n$ existiert:

$$\beta_n=(1-q)^n\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}q^{k-n}a_k \qquad (n=0, 1, \cdots).$$

Für die β_n gilt weiter (z und w reell; vgl. (28), (27), (26))

$$\beta_n=\frac{(1-q)^n}{n!}\lim_{z\to q-}f^{(n)}(z)=\frac{(1-q)^n}{2^n q^n n!}\lim_{z\to q-}F^{(n)}\left(\frac{z+q}{2q}\right)$$
$$=\frac{(1-q)^n}{2^n q^n n!}\lim_{w\to 1-}F^{(n)}(w)=0.$$

Also ist $T_q-\sum a_n=0$. Weil $f(z)$ bei $z=q$ singulär ist, gilt genauer

$$T_q^S-\sum a_n=0. \tag{29}$$

Mit T_q ist auch T_{-q} auf $\sum a_n$ anwendbar (vgl. (2)). Dies, zusammen mit dem Umstand, daß $f(z)$ für $|z+q|<2q$ regulär und $q>1$ ist, ergibt

$$T_{-q}^R-\sum a_n=f(1)=F(\gamma)=1. \tag{30}$$

Damit sind wir am Ziel: Wir haben die Existenz einer Reihe $\sum a_n$ nachgewiesen, für die (29) und (30) gilt. Beiläufig erwähnen wir noch, daß sich die a_n leicht in den A_k ausdrücken lassen; man findet

$$a_n=\frac{1}{q^n}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\frac{A_k}{2^k} \qquad (n=0, 1, \cdots),$$

mit gesicherter Konvergenz der rechten Seite.

4.4. Wir haben in 4.3 bewiesen: T_{-q}^R und T_q^S sind für $q>1$ nicht verträglich. Unser Beweis zeigt mehr: Liegt neben dem q aus (21) noch ein p mit $-q<p<0$ vor und ist $\sum a_n$ die durch (27) definierte Reihe, für die (29) und (30) gilt, so ist auch T_p auf $\sum a_n$ anwendbar, und wegen der Regularität des $f(z)$ für $|z+q|<2q$ gilt

$$T_p^R-\sum a_n=f(1)=1. \tag{31}$$

T_p^R und T_q^S sind also nicht verträglich, wenn der Punkt (p, q) im zweiten Quadranten und gleichzeitig im (oberen) schraffierten Bereich der p, q-Ebene (vgl.

Bild 1) liegt.

Jetzt handelt es sich nur noch um diejenigen Punkte (p, q), die im vierten Quadranten und gleichzeitig im (unteren) schraffierten Bereich der p, q-Ebene liegen. Wir begnügen uns mit dem Hinweis, daß sich alle diese Fälle nach der in 4.3 dargestellten Methode erledigen lassen. Bei den Randfällen macht man teilweise (nämlich dann, wenn $0<p\leqq 1/3$ ist) auch von dem auf die absolute Konvergenz bezüglichen Teil des Satzes 2.4.1 Gebrauch (vgl. die Schlußüberlegung von 4.2).

Damit dürfen wir das in Bild 1 niedergelegte Ergebnis über den Vergleich von T_p^R und T_q^S als bewiesen ansehen.

5. Schlußbemerkung.

M. Eidelheit ([3] S. 153) hat bezüglich der Lösbarkeit des Gleichungssystems (5) das nachstehende Kriterium 5.1 angegeben. (Wegen der Notwendigkeit, dabei zusätzlich etwas über die nullte Zeile von C vorauszusetzen, vgl. [9] S. 5 Mitte.)

Kriterium 5.1. *Das Gleichungssystem* (5), *dessen Matrix C in der nullten Zeile unendlich viele Nichtnullen aufweist, besitzt sicher dann mindestens eine Lösung, wenn die folgende hinreichende Bedingung erfüllt ist: Für jedes* $n=0, 1, \cdots$ *gibt es eine Folge* $\{\xi_k\}$ *so, dass*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}\xi_k \begin{cases} \textit{konvergiert für } m=0, \cdots, n. \\ \textit{divergiert für } m=n+1. \end{cases}$$

Statt des Kriteriums 2.3.1 hätten wir bei unseren Unverträglichkeitsbeweisen auch Kriterium 5.1 verwenden können. Daß z. B. im Fall (18) die Bedingung von Kriterium 5.1 erfüllt ist, zeigen nacheinander die Folgen

$$\xi_k=\frac{1}{(k+1)q^k},\ \xi_k=\frac{1}{(k+1)^2q^k},\ \xi_k=\frac{1}{(k+1)^3q^k},\ \cdots.$$

Literatur

[1] Cooke, R. G., Infinite matrices and sequences spaces, Macmillan and Co. (1950).

[2] Eidelheit, M., Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math., 6 (1936), 139–148.

[3] Eidelheit, M., Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II), Studia Math., 7 (1938), 150–154.

[4] Ishiguro, K., Meyer-Konig, W. und Strasser, F., Über die Verträglichkeit der Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei reellen Ordnungen, Math. Zeitschr., 120 (1971), 107–123.

[5] Ishiguro, K., Über die Verträglichkeit der Kreisverfahren der Limitierungstheorie bei komplexen Ordnungen, Kōdai Math. Sem. Rep., 24 (1972), 91–105.

[6] Knopp, K. und Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung, Arch. der Math., 2 (1949/50), 10–16.

[7] MEYER-KONIG, W. UND ZELLER, K., Über das Taylorsche Summıerungsverfahren, Math. Zeitschr., **60** (1954), 348–352.

[8] MEYER-KONIG, W. UND ZELLER, K., Matrixtransformatıonen mit voller Reıchweite, Enseignement Math., II. Sér., **15** (1969), 233–235.

[9] NIETHAMMER, W. UND ZELLER, K., Unendliche Gleichungssysteme mit beliebiger rechter Seite, Math. Zeitschr., **96** (1967), 1–6.

[10] PÓLYA, G., Eine einfache, mit funktionentheoretischen Aufgaben verknüpfte, hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen, Commentarii Math. Helvet, **11** (1938/39), 234–252.

[11] PÓLYA, G., Sur l'existence de fonctions entières satisfaisant à certaines conditions linéaires, Trans. Amer. Math. Soc., **50** (1941), 129–139.

[12] ZELLER, K. UND BEEKMANN, W., Theorier der Limitiergungsverfahren, 2. Aufl. Springer-Verlag (1970).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
HOKKAIDO UNIVERSITY

MATHEMATISCHES INSTITUT A
UNIVERSITAT STUTTGART