Γ. V. DUC
KŌDAI MATH. SEM. REP.
26 (1975), 349—408

SUR LA GEOMETRIE DIFFERENTIELLE DES FIBRES VECTORIELS

PAR TONG VAN DUC

SOMMAIRE

Received Oct. 11, 1973.

INTRODUCTION

Dans ce travail, je me suis proposé d'étudier certains aspects géométriques des fibrés vectoriels. Souvent pour établir les propriétés des fibrés vectoriels, on doit recourir aux fibrés principaux associés. Il serait plus logique et plus intéressant de faire une étude directe des fibrés vectoriels, ce qui permettrait, en l'occurence, d'élaborer des théories propres à ces derniers. D'autre part, les connexions jouent un rôle important en géométrie différentielle. Les connexions linéaires ne suffisent plus puisqu'en géométrie finslérienne par exemple, on est obligé de travailler avec des connexions qui ne sont ni linéaires, ni homogènes. Pour cette raison, j'ai adopté, dans ce travail, une définition des connexions sous sa forme la plus générale. Par ailleurs, l'étude des fibrés vectoriels permet de mieux voir ce qui se passe dans le fibré tangent dont les innombrables propriétés n'ont cessé d'être mises à jour par divers auteurs. Seulement, les méthodes utilisées dans le fibré tangent ont la plupart du temps un caractère particulier, en ce sens qu'elles s'étendent rarement aux fibrés vectoriels. De nouvelles méthodes s'imposent donc. Le formalisme de A. Frölicher et A. Nijenhuis se prête parfaitement à cette fin et le travail que j'avais entrepris a pu être fait grace à l'opérateur de différentielle extérieure des formes à valeurs dans un fibré vectoriel de J. L. Koszul et aux diverses notions qui s'y rattachent.

Dans le chapitre I —chapitre préliminaire— après avoir rappelé les résultats de A. Frölicher et de A. Nijenhuis sur les dérivations de l'algèbre extérieure, outils essentiels de ce travail, j'étudie quelques G-structures dont j'aurai l'occasion de montrer l'existence. Je commence par la structure définie par un tenseur K de type $\binom{1}{1}$ de rang constant et tel que $K^3=K$; lorsque le range de K est égal à la dimension de la variété sur laquelle K est défini, on obtient la structure presque-produit. Utilisant le polynôme minimal de K, j'étudie l'intégrabilité de cette structure, son tenseur de structure...K. Yano a étudié la structure définie par un tenseur F de même type que K et tel que $F^3+F=0$. Les résultats suivants sont à ajouter à ceux de K. Yano: le tenseur de structure de la structure F est l'opposé de la torsion de Nijenhuis N_{F^2} de F^2 et pour que cette structure soit intégrable, il faut et il suffit que N_{F^2} soit nulle.

Dans le chapitre II, j'adopte le point de vue de J. Vilms qui définit une connexion sur un fibré vectoriet (E, p, M) comme une scission à gauche de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow VE \longrightarrow TE \longrightarrow E\times TM \longrightarrow 0\,.$$

Ce formalisme est très intéressant puisqu'il permet non seulement de retrouver, dans le cas linéaire, des résultats classiques mais aussi d'en obtenir de nouveaux. J'établis d'abord l'existence d'une connexion sur un fibré vectoriel dont la base est paracompacte. Je démontre ensuite des théorèmes généraux sur des connexions sur différents types de fibrés vectoriels. L'un de ces théorèmes qui va beaucoup servir dans la suite consiste à prouver l'existence de l'image réciproque d'une connexion par un morphisme de fibrés vectoriels qui est un isomorphisme sur les fibrés.

Comme le fibré vertical VE est isomorphe au fibré induit $E\underset{M}{\times}E$, toute connexion sur E induit une connexion sur VE d'après le théorème précédent. Néanmoins, c'est la connexion linéaire de Berwald mise en évidence par J. Vilms que j'utilise pour introduire dans le cas d'une connexion non-linéaire la notion de différentielle absolue des formes différentielles sur l'espace total E à valeurs dans VE et je démontre une formule importante de la différentielle absolue des formes semi-basiques à valeurs dans le fibré vertical. Ainsi la forme de courbure va apparaître sous la forme d'un crochet de Nijenhuis et la formule précédente donne immédiatement la 2^e identité de Bianchi qui, dans le cas linéaire, n'est autre que l'identité de Bianchi classique.

Lorsqu'on utilise les connexions à d'autres fins, souvent les connexions linéaires suffisent. Aussi une partie du chapitre est-elle consacrée aux connexions linéaires. J'y établis, entre autres, une équivalence entre lois de dérivation et connexions linéaires.

Dans le cas du fibré tangent, je trouve une forme canonique dont la différentielle absolue donne la forme de torsion.

La donnée d'une connexion sur un fibré vectoriel dote celui-ci de riches structures comme le montrent les résultats du chapitre III. A chaque connexion est canoniquement associée une structure presque-produit dont l'intégrabilité est équivalente à la nullité de la forme de courbure. C'est un fait bien connu dans le cas du fibré tangent muni d'une connexion linéaire. Je suppose de plus que la base du fibré vectoriel soit munie d'une connexion, j'obtiens alors sur la somme de Whitney $TM\oplus E$ une structure $F^3+F=0$. Les mêmes hypothèses conduisent au même résultat sur le fibré $TM\underset{M}{\times}E$. Enfine, je démontre que toute connexion sur un fibré vectoriel donne naissance à une structure $\bar{K}^3=\bar{K}$ sur le fibré vertical, structure qui est encore intégrable si et seulement si la forme de courbure de la connexion est nulle.

Dans le chapitre IV, je considère un fibré vectoriel sur lequel existe déjà une connexion et je définis divers types de relèvements. D'abord, je munis le fibré vectoriel et sa base des métriques riemanniennes $\hat{g}$ et g ; il en résulte une métrique riemannienne sur l'espace total du fibré, ce qui me conduit à examiner les objets mathématiques attachés à ces métriques: connexions riemanniennes, géodésiques, champs de Killing...D'autre part, l'existence d'une connexion sur la base du fibré vectoriel entraîne celle d'une connexion sur son espace total et j'étudie la relation entre courbes autoparallèles d'en haut et d'en bas. Si la base est munie de G-structures définies par une 1-forme vectorielle, grâce à un procédé nouveau qui utilise surtout les propriétés des espaces fibrés, j'obtiens sur l'espace total des structures de même nature.

Dans le chapitre V, j'adopte un formalisme analogue pour étudier les fibrés principaux. Soit (P, p, M, G) un fibré principal de groupe structural G. Une connexion sur (P, p, M, G) sera une scission à gauche Γ de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow VP \longrightarrow TP \longrightarrow P \times_M TM \longrightarrow 0$$

et qui vérifie la condition d'équivariance $\Gamma \circ R_a^T = R_a^T \circ \Gamma$, R_a étant la translation à droite définie par un élément a de G. Une connexion étant donnée sur un fibré principal, je prouve l'existence d'une connexion linéaire sur son fibré vertical, ce qui me permet d'introduire sur le fibré principal un autre opérateur différentiel que j'appelle différentielle absolue par analogie avec la différentielle absolue classique. J'obtiens ainsi de nouvelles équations de structure. Résultat important: les nouvelles équations de structures déterminent, sur les fibrés vectoriels associés munis des connexions induites, les équations de structure telles que je les ai obtenues au chapitre II. Ici encore, la technique déjà utilisée et les résultats du chapitre IV permettent de relever, sur l'espace total d'un fibré principal, connexions et G-structures existant sur sa base. Tous ces résultats s'appliquent bien entendu au fibré des repères. En voici deux principaux: toute connexion sur le fibré des repères $\mathcal{R}$ induit une connexion linéaire sur son espace total et l'image de la forme de courbure par le morphisme canonique de $V\mathcal{R}$ sur le fibré associé $\mathcal{R}[\mathrm{gl}(m, \boldsymbol{R})]$ est la courbure de la connexion induite sur le fibré tangent.

Dans le chapitre VI, j'applique les résultats acquis dans les chapitres précédents à des fibrés vectoriels d'un type spécial: les fibrés tangents d'ordre supérieur. Une connexion d'ordre r sur une variété sera tout simplement une connexion sur son fibré tangent d'ordre r. Je montre d'abord que sur chaque fibré tangent d'ordre supérieur il existe une forme canonique dont j'étudie les propriétés essentielles, et dont la différentielle absolute prise par rapport à une connexion d'ordre supérieur donne ce que j'appellerai la forme de torsion de la connexion d'ordre supérieur. Ensuite, je démontre que l'existence d'une métrique riemannienne sur un fibré tangent d'ordre supérieur entraîne celle d'une connexion d'ordre supérieur et par suite celle d'une métrique riemannienne sur l'espace total du fibré tangent d'ordre supérieur d'après les résultats du chapitre III. Enfin, j'introduis la notion de spray d'ordre supérieur et montre qu'à toute connexion d'ordre supérieur est canoniquement associée un spray d'ordre supérieur.

CHAPITRE I. Péliminaires

Dans ce travail, toutes les variétés et toutes les applications différentiables sont de classe C^∞.

1. Notations.

Soit M une variété différentiable. On désignera par:

$\mathcal{F}(M)$: le $\boldsymbol{R}$-algèbre des fonctions différentiables sur M.
$\mathcal{X}(M)$: le $\mathcal{F}(M)$-module des champs de vecteurs sur M.
TM : le fibré tangent à M.
I : la transformation identique de TM.
$X, Y, Z, \cdots$ les éléments de TM ou de $\mathcal{X}(M)$.

Soit (E, p, M) un fibré vectoriel d'espace total E et de base M. On notera par:

E^*: le dual de E.
$\underline{E}$: le $\mathcal{F}(M)$-module des sections de E.
$\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}, \cdots$ les éléments de E ou de $\underline{E}$.
$A, B, C, \cdots$ les éléments de TE ou de $\mathcal{X}(E)$.

Soit f une application différentiable d'une variété N dans M. L'image réciproque de E par f sera notée par $N \underset{M}{\times} E$ ou $f^*(E)$ et l'application linéaire tangente à f par f^T.

2. Rappel sur les dérivations de l'algèbre extérieure.

Dans ce paragraphe, on désignera par $A = \bigoplus_{q=0}^{\infty} A_q$ l'algèbre extérieure des formes différentielles sur une variété M, $B = \bigoplus_{l=0}^{\infty} B_l$ le $\mathcal{F}(M)$-module gradué des formes vectorielles sur M.

Soient $L \in B_l$ et $\omega \in A_q$ ou $\omega \in B_q$. A. Frölicher et A. Nijenhuis définissent la contraction $\omega \overline{\wedge} L = \iota_L \omega$ de ω par L de la façon suivante:

$$\omega \overline{\wedge} L(X_1, \cdots, X_{l+q-1})$$
$$= \frac{1}{l!(q-1)!} \sum_{\alpha} (\operatorname{sig} \alpha) \omega(L(X_{\alpha 1}, \cdots, X_{\alpha l}), X_{\alpha l+1}, \cdots, X_{\alpha l+q-1})$$
$$\forall X_1, \cdots, X_{l+q-1} \in \mathcal{X}(M).$$

Une dérivation D de degré r de l'algèbre extérieure A est un $\boldsymbol{R}$-endomorphisme de A tel que:

1°) $DA_p \subset A_{p+r}$.

2°) $D(\omega \wedge \pi) = D\omega \wedge \pi + (-1)^{pr} \omega \wedge D\pi$, $\forall \omega \in A_p$ et $\forall \pi \in A$.

Soient D_1 et D_2 deux dérivations de degré r et s. Alors le crochet:

$$[D_1, D_2]=D_1D_2-(-1)^{rs}D_2D_1$$

est une dérivation de degré $r+s$.

Une dérivation D est dite de type i_* si elle opère trivialement sur A_0.

PROPOSITION 1. *Il y a une correspondance biunivoque entre B_{r+1} et l'ensemble des dérivations D de degré r de type i_*, cette correspondance étant donnée par:*

$$L \longleftrightarrow D=i_L .$$

Une dérivation D est dite de type d_* si elle commute avec la différentielle extérieure d au sens de l'algèbre graduée, i. e. si:

$$Dd=(-1)^r dD .$$

PROPOSITION 2. *Il y a une correspondance biunivoque entre B_r et l'ensemble des dérivations D de degré r de type d_*, cette correspondance étant donnée par:*

$$L \longleftrightarrow D=d_L=[i_L, d] .$$

Pour $L=X\in B_1$, d_X est tout simplement la dérivée de Lie θ_X par rapport au champ de vecteurs X.

PROPOSITION 3. *Toute dérivation de l'algèbre extérieure se décompose d'une façon unique en une somme de deux dérivations, l'une de type i_*, l'autre de type d_*.*

Soient $L\in B_l$ et $M\in B_m$. Comme le crochet de deux dérivations préserve le type de celles-ci, il existe une forme vectorielle de degrè $l+m$, notée par $[L, M]$ et telle que:

$$[d_L, d_M]=d_{[L,M]} .$$

Ce crochet munit B d'une structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre de Lie graduée, i. e.:

(1) $$[M, L]=(-1)^{lm+1}[L, M] .$$

(2) $$(-1)^{ln}[L, [M, N]]+(-1)^{ml}[M, [N, L]]+(-1)^{nm}[N, [L, M]]=0 .$$

Voici quelques propriétés importantes du crochet de deux formes vectorielles dont on se servira dans la suite.

(3) $$[I, M]=0 .$$

(4) $$[L\overline{\wedge}N, M]+(-1)^{l(n-1)}[L, M\overline{\wedge}N]-[L, M]\overline{\wedge}N$$
$$=(-1)^{m(l-1)}L\overline{\wedge}[N, M]+(-1)^{l-1}M\overline{\wedge}[N, L] .$$

Pour $L=M=N=\Gamma\in B_1$, la formule (2) implique:

(5) $$[\Gamma, [\Gamma, \Gamma]]=0 .$$

Si dans la formule (4) on prend $l=1$ et $N=X\in B_0$, on obtient

(6) $$i_X[L, M]=[i_X L, M]-[L, i_X M]-i_{\theta_X M}L-i_{\theta_X L}M .$$

Enfine, pour $L, M \in B_1$ et $X, Y \in B_0$, on a:

(7) $$[L, M](X, Y)=[LX, MY]+[MX, LY]+ML[X, Y]+LM[X, Y]$$
$$-L[MX, Y]-L[X, MY]-M[LX, Y]-M[X, LY].$$

On en déduit, en faisant $L=M=F$.

$$\frac{1}{2}[F, F](X, Y)=[FX, FY]+F^2[X, Y]-F[FX, Y]-F[X, FY].$$

Le crochet $N_F=\frac{1}{2}[F, F]$ s'appelle *la torsion de Nijenhuis de F*. Soit U le domaine d'une carte locale de la variété M muni de coordonnées locales (x^i) N_F a pour expression locale:

$$N_F=\left(\frac{1}{2}N^i_{jk}dx^j \wedge dx^k\right)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}$$

où

(8) $$N^i_{jk}=F^i_l\left(\frac{\partial F^l_j}{\partial x^k}-\frac{\partial F^l_k}{\partial x^j}\right)+F^l_j\frac{\partial F^i_k}{\partial x^l}-F^l_k\frac{\partial F^i_j}{\partial x^l}.$$

3. Etude d'une structure K telle que $K^3=K$.

Soit sur une variété différentiable M de dimension m une 1-forme vectorielle K de rang constant r et telle que $K^3=K$.

On remarque tout d'abord que si le rang de K est égal à m on a une structure presque produit.

Soit $p(\lambda)$ le polynôme minimal de K:

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Soient $T_1=\operatorname{Ker} K_x$, $T_2=\operatorname{Ker}(K-I)_x$, $T_3=\operatorname{Ker}(K+I)_x$ pour $x \in M$. On sait qu'il existe des polynômes $h_i(X)$ $(i, j, \cdots =1, 2, 3)$ tels qu'en posant $P_i=h_i(K)$ on obtienne un système de projecteurs supplémentaires et que:

$$T_i=P_i(T_xM),$$
$$T_xM=T_1\oplus T_2\oplus T_3.$$

On trouve:

$$P_1=I-K^2, \qquad P_2=\frac{1}{2}(K+K^2), \qquad P_3=\frac{1}{2}(-K+K^2).$$

Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ les distributions définies par K.

a) **Intégrabilité.**

DÉFINITION. *La structure K sera dite intégrable si les distributions $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_i+\mathcal{D}_j$ sont intégrables.*

Chaque distribution $\mathcal{D}_i$ est intégrable ainsi que son supplémentaire si et seulement si $[P_i, P_i]=0$. Donc si K est intégrable, on a:

$$[P_1, P_1]=[K^2, K^2]=0\,,$$

$$[P_2, P_2]=\frac{1}{4}[K, K]+\frac{1}{2}[K, K^2]+\frac{1}{4}[K^2, K^2]=0\,.$$

$$[P_3, P_3]=\frac{1}{4}[K, K]-\frac{1}{2}[K, K^2]+\frac{1}{4}[K^2, K^2]=0\,.$$

On en déduit: $N_K=0$.

Réciproquement, si $N_K=0$, on obtient, d'après la formule (4):

$$[K, K^2]=i_K N_K+2KN_K=0\,,$$

$$[K^2, K^2]=-2N_K+4K^2N_K+3i_K N_K+i_K i_K N_K=0$$

i. e.: $[P_i, P_i]=0$, $\forall i\in\{1, 2, 3\}$; d'où le:

THÉORÈME 1. *Pour que la structure K telle que $K^3=K$ soit intégrable, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis de K soit nulle.*

Dans le cas où $r=m$, on a deux distributions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par les projecteurs:

$$Q_1=\frac{1}{2}(I+P)\,,\qquad Q_2=\frac{1}{2}(I-P)$$

et le théorème 1 permet de retrouver la condition d'intégrabilité de la structure presque produit.

On revient au cas général $r\neq m$. Soient $p=\dim T_2$, $q=\dim T_3$; on a $p+q=r$. Une base $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ de T_xM sera dite adaptée à la structure K si les $m-r$ premiers vecteurs appartiennent à T_1, les p suivants à T_2 et les q derniers à T_3. Soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base duale de $(e_1, \cdots, e_m)$. Dans ce qui suit, on adopte les conventions suivantes:

$I, J, \cdots =1, 2, \cdots, m,$

$a, b, c, \cdots =1, 2, 3,$

$i_1, j_1, k_1, \cdots =1, 2, \cdots, m-r,$

$i_2, j_2, k_2, \cdots =m-r+1, \cdots, m-r+p,$

$i_3, j_3, k_3, \cdots =m-r+p+1, \cdots, m,$

$\bar{i}_1$ (resp. $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$) désigne le complément de i_1 (resp. i_2, i_3) dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, m\}$.

Les composantes de K par rapport à une base adaptée sont:

$$K^{i_1}_I=0\,,\qquad K^{\bar{i}_2}_{j_2}=0\,,\qquad K^{i_2}_{j_2}=\delta^{i_2}_{j_2}\,,$$

$$K^{\bar{i}_3}_{j_3}=0\,,\qquad K^{i_3}_{j_3}=-\delta^{i_3}_{j_3}\,.$$

Donc K est représentée par une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix}. \tag{9}$$

L'ensemble des repères adaptés déterminent sur M une G-structure qu'on désigne encore par K et dont les éléments du groupe structural $G=Gl(m-r, p, q)$ sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} A_{m-r} & 0 & 0 \\ 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & A_q \end{bmatrix} \tag{10}$$

les matrices A étant régulières.

Comme les matrices (9) commutent avec tous les éléments de $Gl(m-r, p, q)$, K est représenté dans n'importe quel repère adapté par la matrice (9).

b) K-**connexion.**

DÉFINITION. *Une K-connexion est une connexion sur le fibré principal des repères adaptés.*

Toute K-connexion peut être prolongée en une connexion linéaire sur le fibré principal $\mathscr{R}$ de tous les repères de M. Soit un recouvrement ouvert de M muni de sections locales du fibré des repères adaptés. Ces sections sont également des sections de $\mathscr{R}$. Une K-connexion est déterminée dans chaque ouvert U du recouvrement par une forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie de $Gl(m-r, p, q)$ [16] ω peut être représentée par une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \omega^{i_1}_{j_1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{i_2}_{j_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{i_3}_{j_3} \end{bmatrix}.$$

On considère maintenant une connexion sur $\mathscr{R}$ et soit (ω^I_J) la matrice de connexion relative à un recouvrement de M par des ouverts munis de repères adaptés. Les composantes de la différentielle absolue ∇K de K sont :

$$\begin{array}{lll} \nabla K^{i_1}_{j_1}=0\,, & \nabla K^{i_1}_{j_2}=\omega^{i_1}_{j_2}\,, & \nabla K^{i_1}_{j_3}=-\omega^{i_1}_{j_3}\,, \\ \nabla K^{i_2}_{j_1}=\omega^{i_2}_{j_1}\,, & \nabla K^{i_2}_{j_2}=0\,, & \nabla K^{i_2}_{j_3}=-2\omega^{i_2}_{j_3}\,, \\ \nabla K^{i_3}_{j_1}=\omega^{i_3}_{j_1}\,, & \nabla K^{i_3}_{j_2}=2\omega^{i_3}_{j_2}\,, & \nabla K^{i_3}_{j_3}=0\,. \end{array}$$

Si la connexion sur $\mathcal{R}$ est le prolongement d'une K-connexion $\nabla K=0$. Réciproquement, si $\nabla K=0$, la forme de connexion est à valeurs dans l'algèbre de Lie de $Gl(m-r, p, q)$.

THÉORÈME 2. *Pour qu'une connexion sur $\mathcal{R}$ soit le prolongement d'une K-connexion, il faut et il suffit que la différentielle absolue de K soit nulle.*

c) **Groupe d'holonomie d'une K-connexion.**

On suppose que le fibré des repères adaptés soit muni d'une K-connexion. Le groupe d'holonomie ϕ de cette connexion est un sous-groupe de $Gl(m-r, p, q)$. Il en est de même du groupe d'holonomie du prolongement de la K-connexion. Réciproquement, si le fibré des repères est muni d'une connexion telle qu'en un point x de M il existe un repère adapté $(e_i)_{i\in I}$ pour lequel le groupe d'holonomie ϕ soit un sous-groupe de $Gl(m-r, p, q)$, les éléments de ϕ qui sont de la forme (10) laissent invariant le tenseur K de type $\binom{1}{1}$ représenté dans le repère $(e_i)_{i\in I}$ par la matrice (9). On en déduit par transport parallèle, un champ de tenseur K sur M dont la différentielle absolue est nulle et telle que $K^3=K$ [16]. Comme $\nabla K=0$ caractérise les connexions qui sont les prolongements d'une K-connexion, on a :

THÉORÈME 3. *Pour qu'une connexion sur le fibré des repères $\mathcal{R}$ soit le prolongement d'une K-connexion, il faut et il suffi que son groupe d'holonomie soit un sous-groupe de $Gl(m-r, p, q)$.*

d) **Tenseur de structure.**

Soit T la torsion de la connexion linéaire sur M induite par le prolongement d'une K-connexion [cf. 10°), chap. II]. Soit q la projection canonique de $\Lambda^2T^*M \otimes TM$ sur $\Lambda^2T^*M\otimes TM/\partial(T^*M\otimes\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ où $\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ est l'espace fibré de fibre type $\mathfrak{g}$ (algèbre de Lie de $Gl(m-r, p, q)$) associé au fibré des repères $\mathcal{R}$ et ∂ l'opérateur d'antisymétrisation. Par définition, le tenseur de la G-structure définie par K est $S=q(T)$ [15].

Si l'on pose :

$$\omega^i_k=\gamma^i_{jk}\theta^j\,,$$

$$d\theta^i=\frac{1}{2}C^i_{jk}\theta^j\wedge\theta^k$$

alors

$$T=\frac{1}{2}(\gamma^i_{jk}-\gamma^i_{kj}-C^i_{jk})\theta^j\wedge\theta^k\otimes e_i$$

et $\gamma^{ia}_{jk_{\underline{a}}}=0$ car ω est à valeurs dans $\mathfrak{g}$.

Comme d'autre part, $\theta^{ja}\wedge\theta^{ka}\otimes e_{i_a}$ constituent une base du module des sections de $\partial(T^*M\otimes\mathcal{R}(\mathfrak{g}))$, par passage au quotient, on peut écrire :

$$S=-\frac{1}{2}C^{i_a}_{\bar{j}_a\bar{k}_a}\theta^{\bar{j}_a}\wedge\theta^{\bar{k}_a}\otimes e_{i_a}.$$

Ainsi S est l'opposé du tenseur de torsion τ de Lichnerowicz, tenseur défini par :

$$\tau=\frac{1}{2}\tau^i_{jk}\theta^j\wedge\theta^k\otimes e_i$$

avec $\tau^{i_a}_{\bar{j}_a\bar{k}_a}=C^{i_a}_{\bar{j}_a\bar{k}_a}$ et $\tau^i_{jk}=0$ pour tous les autres indices.

De plus, on voit que S ne dépend pas de la K-connexion.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$4i_S\varphi=4K^2d\varphi-2i_KdK\varphi+i_KKdK\varphi+4dK^2\varphi-2i_{K^2}dK^2\varphi+KdK^2\varphi \tag{11}$$

où φ est une 1-forme quelconque.

On rappelle que si π est une p-forme, $K\pi$ est encore une p-forme définie par :

$$K\pi(X_1, \cdots, X_p)=\pi(KX_1, \cdots, KX_p) \qquad \forall X_1, \cdots, X_p\in\mathcal{X}(M).$$

Une forme φ est dite de type (l, m, n) si :

$$\omega(X_1, \cdots, X_{l+m+n})=0$$

pour toute suite de vecteurs $X_1, \cdots, X_{l+m+n}$ contenant plus de l vecteurs de T_1, ou plus de m vecteurs de T_2 ou plus de n vecteurs de T_3.

Soit $\varphi^{1,0,0}=\varphi_{i_1}\theta^{i_1}$ une 1-forme de type $(1, 0, 0)$. On a :

$$d\varphi^{1,0,0}=d\varphi_{i_1}\wedge\theta^{i_1}+\varphi_{i_1}d\theta^{i_1}.$$

$d\varphi^{1,0,0}$ est la somme des formes des 6 types suivants :

$$(2, 0, 0), \quad (0, 2, 0), \quad (0, 0, 2),$$
$$(1, 1, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (0, 1, 1).$$

En remplaçant dans (11) φ par $\varphi^{1,0,0}$, on trouve que les coefficients des formes des types en question qui figurent aux deux membres de (11) sont égaux à $0, 2\varphi_{i_1}, 2\varphi_{i_1}, 0, 0, -\varphi_{i_1}$. On vérifie facilement que la formule (11) est encore vraie si l'on remplace φ par une forme de type $(0, 1, 0)$ ou $(0, 0, 1)$.

Enfin, la formule (11) implique :

$$S=-\frac{1}{8}(4[K^2, K^2]-3K^2[K^2, K^2]+K^2[K, K]+2K[K, K^2])$$

soit

$$S=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}P_i[P_i, P_i].$$

4. Etude d'une structure F telle que $F^3+F=0$.

Toujours sur la variété différentiable M, on considère maintenant une 1-forme vectorielle F de rang constant r telle que $F^3+F=0$. On en déduit que r est pair et que si $r=m$, F se réduit à une structure presque-complexe. Dans la suite, on supposera $r\neq m$.

Soit $p(\lambda)$ le polynôme minimal de F:

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda^2+1).$$

Les polynômes λ et λ^2+1 étant premiers entre eux et irréductibles sur les réels, il existe deux polynômes uniques g_1 et g_2 en λ tels que:

$$\lambda g_1+(\lambda^2+1)g_2=1.$$

Il est évident que $g_1=-\lambda$ et $g_2=1$.

Si l'on pose:

$$h_1(\lambda)=\lambda g_1 \quad \text{et} \quad h_2(\lambda)=(\lambda^2+1)g_2$$

alors:

$$P_1=h_1(F)=-F^2 \quad \text{et} \quad P_2=h_2(F)=F^2+I$$

forment un système de projecteurs supplémentaires. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les distributions définies par P_1 et P_2.

DÉFINITION. *La structure F telle que $F^3+F=0$ sera dite intégrable si les distributions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont intégrables.*

La distribution $\mathcal{D}_1$ est intégrable si et seulement si:

$$(F^2+I)[-F^2X, -F^2Y]=0 \qquad \forall X, Y\in\mathfrak{X}(M)$$

i.e. si et seulement si:

$$[F^2X, F^2Y]=-F^2([F^2X, F^2Y]).$$

La distribution $\mathcal{D}_2$ est intégrable si et seulement si:

$$F^2([(F^2+I)X, (F^2+I)Y])=0$$

i.e. si et seulement si:

$$F^2[X, Y]+F^2[F^2X, Y]+F^2[X, F^2Y]=-F^2[F^2X, F^2Y]$$

et puisque $F^4=-F^2$, on a:

THÉORÈME 4. *Pour que les distributions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient intégrables, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis N_{F^2} de F^2 soit nulle.*

Une base $(e_1, \cdots, e_m)$ de T_xM sera dite adaptée à F si les r premiers vecteurs appartiennent à $\mathcal{D}_1$ et les $m-r$ derniers à $\mathcal{D}_2$. L'ensemble des repères adaptés forme une G-structure qui n'est autre qu'une structure presque-produit définie par le tenseur F et l'intégrabilité de cette structure presque-produit est équivalente, d'après le théorème 4, à la nullité de N_{F^2}.

Soit S le tenseur de structure de la structure presque-produit définie par F. En appliquant la même méthode que précédemment, on trouve :

$$i_S\varphi=d^2\varphi+i_{F^2}dF^2\varphi-F^2d\varphi$$

où φ est une 1-forme quelconque. On en déduit :

$$S=-N_{F^2}.$$

CHAPITRE II. Connexions sur les fibrés vectoriels

1. Définitions. Soit (E, p, M) un fibré vectoriel de dimension n, sa base M ayant pour dimension m.

Comme Jaak Vilms, on adoptera la définition suivante [16] :

DÉFINITIONS. *Une connexion C sur (E, p, M) est une scission à gauche Γ de la suite exacte*

(1)
$$0\longrightarrow VE\xrightarrow{i} TE\longrightarrow E\underset{M}{\times}TM\longrightarrow 0.$$

Une connexion sur (TM, p, M) sera appelée connexion sur M.

Soient i_{VE} l'isomorphisme canonique de VE sur $E\underset{M}{\times}E$ et p_2 la deuxième projection de $E\underset{M}{\times}E$ sur E. Si une connexion est donnée sur (E, p, M) on obtient un morphisme $D=p_2\circ i_{VE}\circ\Gamma$ de TE sur E. D sera appelé *application de connexion* de C. On sait d'autre part que (TM, p^T, TM) est aussi un fibré vectoriel. Par sa définition, D est linéaire sur les fibres de (TE, p_E, E) mais ne l'est pas sur celles de (TE, p^T, TM). Si D est linéaire ou homogène de degré 1 sur les fibres de ce dernier, la connexion sera dite *linéaire ou homogène.*

Remarque. Lorsqu'il s'agit de connexions homogènes, on suppose toujours que celles-ci soient définies sur le fibré $E_0=E-\{0\}$.

2. Caractérisation d'une connexion [18]. Soit U le domaine d'une carte locale de M tel que $p^{-1}(U)$ soit trivial au-dessus de U. On appellera carte vectorielle de E, le couple (U, φ) où φ est un difféomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur $U\times\boldsymbol{R}^n$. La restriction de la suite (1) à $p^{-1}(U)$ donne :

(2)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U\times\boldsymbol{R}^n\times 0\times\boldsymbol{R}^n & \longrightarrow & U\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n & \longrightarrow & U\times\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m & \longrightarrow & 0. \\ 0 & \longrightarrow & (x, z, 0, t) & \longrightarrow & (x, z, y, t) & \longrightarrow & (x, z, y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Si l'on se donne une connexion C sur (E, p, M) d'application de connexion D, alors

$$D(x, z, 0, t)=(x, t)$$

car $\Gamma\circ i=id_{VE}$, i étant l'injection canonique de VE dans TE.

Comme D est linéaire sur les fibrés, il existe une application différentiable $\omega: U\times\boldsymbol{R}^n\to\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ telle que:

$$D(x, z, y, 0)=(x, \omega(x, z)y)$$

ω sera appelée *composante locale* de la connexion dans la carte vectorielle (U, φ). Donc, localement, on a:

$$D(x, z, y, t)=(x, t+\omega(x, z)y)\,. \tag{3}$$

THÉORÈME 1. *Pour qu'une application D de TE dans E soit l'application de connexion d'une connexion sur E il faut et il suffit que D soit définie par la formule* (3) *où $\omega: U\times\boldsymbol{R}^n\to\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ est différentiable.*

Preuve: La condition est nécessaire d'après ce qui précède.

Réciproquement, si D est donnée par la formule (3) où ω est différentiable, alors D préserve les fibrés. De plus D est différentiable et linéaire sur les fibrés de (TE, p_E, E). Donc, c'est un morphisme de fibrés vectoriels et par suite D se factorise en $D=p_2\circ\Gamma$ où Γ est un morphisme de TE dans VE défini par:

$$\Gamma(x, z, y, t)=(x, z, 0, t+\omega(x, z)y)\,.$$

Pour $y=0$, on trouve $\Gamma\circ i=id_{VE}$. Donc Γ est une scission à gauche de la suite (1).

La connexion C est linéaire ou homogène si et seulement si sa composante locale $\omega(x, z)$ est linéaire ou homogène de degré 1 en z. On verra dans la suite d'autres caractérisations des connexions linéaires et homogènes.

3. Existence. S'il existe une connexion sur (E, p, M) en posant $HE=\operatorname{Ker} D$ $(=\operatorname{Ker}\Gamma)$, on obtient, en chaque point $\hat{Z}$ de E, la décomposition suivante:

$$T_{\hat{Z}}E=VE_{\hat{Z}}\oplus HE_{\hat{Z}}\,. \tag{4}$$

Réciproquement, si on a (4), on peut définir un morphisme Γ de TE sur VE en prenant pour Γ la deuxième projection de $T_{\hat{Z}}E$ sur $VE_{\hat{Z}}$ et on a bien $\Gamma\circ\iota=id_{VE}$.

Les éléments de $VE_{\hat{Z}}$ seront appelés *vecteurs verticaux*, ceux de $HE_{\hat{Z}}$ *vecteurs horizontaux.*

L'ensemble des vecteurs horizontaux forme un fibré vectoriel HE de base E qu'on appellera fibré horizontal. D'après la décomposition (4), la restriction de p^T à HE est un morphisme de HE dans TM qui est un isomorphisme sur les fibrés. Par suite, à chaque section X de TM correspond une section X^h de HE appelée *relèvement horizontal de X* et telle que $p^T(X^h)=X$.

THÉORÈME 2. *Il existe une connexion sur tout fibré vectoriel dont la base est paracompacte.*

Si la base d'un fibré vectoriel (E, p, M) est paracompacte, l'espace total E est paracompact. Il existe donc sur la variété E une métrique riemannienne G. Soit $HE_{\hat{z}}=\{A\in T_{\hat{z}}E$ tel que $G(A, B)=0\ \forall B\in VE_{\hat{z}}\}$. Alors $T_{\hat{z}}E=VE_{\hat{z}}\oplus HE_{\hat{z}}$ et on a une connexion sur E.

4. Théorèmes généraux.

PROPOSITION 1. *Soient (E_1, p_1, M_1) et (E_2, p_2, M_2) deux fibrés vectoriels munis de connexions C_1 et C_2. Alors, il existe une connexion C sur le produit fibré $(E_1\times E_2, p_1\times p_2, M_1\times M_2)$ de même nature que C_1 et C_2, i.e. C est linéaire ou homogène si et seulement si il en est ainsi de C_1 et C_2.*

On a les suites exactes suivantes $(\alpha=1, 2)$

$$0 \longrightarrow VE_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} TE_\alpha \longrightarrow E_\alpha \underset{M_\alpha}{\times} TM_\alpha \longrightarrow 0. \tag{5}$$

Comme $T(N_1\times N_2)$ est isomorphe à $TN_1\times TN_2$ quelles que soient les variétés N_1 et N_2, on a aussi la suite exacte:

$$0 \longrightarrow V(E_1\times E_2) \xrightarrow{i_1\times i_2} T(E_1\times E_2) \longrightarrow (E_1\times E_2) \underset{M_1\times M_2}{\times} T(M_1\times M_2) \longrightarrow 0.$$

Soient ${}_1\Gamma$ et ${}_2\Gamma$ les scissions à gauche des suites (5). Si l'on pose $\Gamma={}_1\Gamma\times{}_2\Gamma$, alors $\Gamma\circ(i_1\times i_2)=id_{V(E_1\times E_2)}$.

PROPOSITION 2. *Soit (u, f) un morphisme d'un fibré vectoriel (E, p, M) dans un autre fibré vectoriel (F, q, N) tel que la restriction de u à chaque fibre de (E, p, M) soit un isomorphisme sur les fibres. Alors:*

1°) *L'espace vertical en un point $\hat{X}$ de E est isomorphe à l'espace vertical au point $\hat{Y}=u(\hat{X})$ de F.*

2°) *Toute connexion C sur (F, q, N) induit une connexion C sur (E, p, M) de même nature que C. De plus, si u est surjectif:*

$$u^T(HE_{\hat{X}})=HF_{\hat{Y}} \quad et \quad \operatorname{Ker} u^T_{\hat{X}}=(VT_xM)^h_{\hat{X}}$$

où $x=p(\hat{X})$ et $(VT_xM)^h_{\hat{X}}$ est le relèvement horizontal des vecteurs $X\in T_xM$ tel que $f^T(X)=0$.

Preuve:

1°) Est évident puisque les vecteurs verticaux sont des vecteurs tangents aux fibres.

2°) On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & VE & \longrightarrow & TE & \longrightarrow & E\underset{M}{\times}TM & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u^T|VE} & & \downarrow{\scriptstyle u^T} & & \downarrow{\scriptstyle (u\times f^T)} & & \\
0 & \longrightarrow & VF & \longrightarrow & TF & \longrightarrow & F\underset{N}{\times}TN & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On obtient une connexion sur (E, p, M) en posant:

(6) $$\Gamma'(A)=(u^T \mid VE)^{-1}\circ\Gamma\circ u^T(A)\,, \qquad \forall A\in TE\,.$$

La linéarité (resp. l'homogénéité) de Γ' découle de celle de Γ en appliquant une autre caractérisation de cette dernière [cf. 8°)].

Soit $A\in T_{\hat{X}}E$ tel que $\Gamma'(A)=0$, alors $\Gamma(u^T A)=0$ et par conséquent $u^T(HE_{\hat{X}})\subset EF_{\hat{Y}}$. D'autre part, si u est surjectif, soit $B\in TF_{\hat{Y}}$. Alors il existe $A\in T_{\hat{Y}}E$ tel que $u^T(A)=B$. Or $u^T(A)=u^T(HA)+u^T(VA)$ où H et V sont les projecteurs associés à la décomposition $T_{\hat{X}}E=VE_{\hat{X}}\oplus HE_{\hat{X}}$. D'après ce qui précède, $u^T(HA)$ est horizontal et $u^T(VA)$ est vertical, donc $u^T(VA)=0$, ce qui implique $VA=0$ et on a $u^T(HE_{\hat{X}})\supset HF_{\hat{Y}}$.

Enfin soit $A\in(\operatorname{Ker} u^T)_{\hat{X}}$. Alors $p^T(A)\in VT_{\hat{X}}M$ et $A-(p^T(A))^h$ est vertical. Comme $u^T(A)=u^T(VA)+u^T(HA)=0$, on a $VA=0$ et A est horizontal. D'où $A=(p^T A)^h$. Réciproquement, si $A\in(VT_x M)^h_{\hat{X}}$, $u^T(A)$ est horizontal. De plus, A est vertical car si $A=X^h$, $q^T(u^T(A))=f^T(X)=0$.

DÉFINITION. *La connexion C' sera appelée image réciproque de C par le morphisme (u, f) et sera notée par $u^*(C)$.*

COROLLAIRE 1. *Toute connexion sur (E, p, M) induit une connexion de même nature sur le fibré vertical VE. Réciproguement, toute connexion non-homogène sur le fibré vertical induit une connexion de même nature sur (E, p, M).*

Preuve: La restriction de D à VE est un isomorphisme sur les fibres. Par ailleurs, la section nulle S_0 de (E, p, M) détermine un morphisme V_0 de E dans $E\times_M E$. En composant V_0 avec $(i_{VE})^{-1}$, on obtient un morphisme u_0 de VE dans E qui est un isomorphisme sur les fibres.

COROLLAIRE 2. *Soient (u, f) un morphisme de (E, p, M) dans (F, q, N) et (v, q) un morphisme de (F, q, N) dans (G, r, P) tels que les restrictions de u et de v aux fibres soient des isomorphismes. Pour toute connexion C sur (G, r, P), on a:*

$$(v\circ u)^*(C)=u^*(v^*(C))\,.$$

PROPOSITION 3. *Soit (u, f) un morphisme d'un fibré vectoriel (E, p, M) dans un autre fibré (F, q, N) tel que u soit surjectif et que sa restriction aux fibres soit un isomorphisme. Pour qu'une connexion sur (E, p, M) soit l'image réciproque d'une connexion sur (F, q, N), il faut et il suffit que:*

1°) $u^T(HE_{\hat{X}})=u^T(HE_{\hat{X}'})$ $\forall \hat{X}, \hat{X}'\in E$ *tels que* $u(\hat{X})=u(\hat{X}')$.

2°) $u^T(VT_x M)^h_{\hat{X}}=0$ *où* $x=p(\hat{X})$.

S'il en est ainsi, les connexions sur les deux fibrés vectoriels sont de même nature.

Preuve: La condition est nécessaire d'après la proposition 2. Réciproquement, soit C une connexion sur (E, p, M) qui satisfait aux conditions 1°) et 2°). Soient $\hat{X}\in E$ et $\hat{Y}=u(\hat{X})$. Si l'on pose $HF_{\hat{Y}}=u^T(HE_{\hat{X}})$, alors $HF_{\hat{Y}}$ ne dépend pas de $\hat{X}$

tel que $u(\hat{X})=\hat{Y}$ en vertu de 1°). D'autre part, soient $B\in T_{\hat{Y}}F$ et $A\in T_{\hat{X}}E$ tel que $u^T(A)=B$. Comme $A=HA+VA$, on a: $B=u^T(VA)+u^T(HA)$. $u^T(A)$ est vertical d'après la proposition 2 et $u^T(HA)\in HF_{\hat{Y}}$. Donc $T_{\hat{Y}}F=VF_{\hat{Y}}+HF_{\hat{Y}}$. Enfin, soit $B\in HF_{\hat{Y}}\cap VF_{\hat{Y}}$. Il existe $A\in HE_{\hat{X}}$ tel que $B=u^T(A)$. Common B est vertical $f^T(p^T(A))=q^T(B)=0$, donc $p^T(A)\in VT_xM$ et $A\in(VT_xM)^h_{\hat{X}}$ puisque B est horizontal. Donc $B=0$ et $T_{\hat{Y}}F=VF_{\hat{Y}}\oplus HF_{\hat{Y}}$.

PROPOSITION 4. *Soient (E_1, p_1, M) et (E_2, p_2, M) deux fibrés vectoriels de même base M munis de connexions C_1 et C_2. Alors il existe sur la somme de Whitney $(E_1\oplus E_2, p, M)$ une connexion C de même nature que C_1 et C_2. Réciproquement, toute counexion C sur $(E_1\oplus E_2, p, M)$ induit une connexion C_α $(\alpha=1, 2)$ sur (E_α, p, M) de même nature que C.*

Preuve· On a la suite exacte:

$$0\longrightarrow V(E_1\oplus E_2)\longrightarrow T(E_1\oplus E_2)\longrightarrow E_1\oplus E_2\times_M TM\longrightarrow 0\,,$$
$$0\longrightarrow (x, z_1+z_2, 0, t_1+t_2)\longrightarrow (x_1, z_1+z_2, y, t_1+t_2)\longrightarrow (x, z_1+z_2, y)\longrightarrow 0\,.$$

Soient ${}_1D$ et ${}_2D$ les applications de connexion de C_1 et C_2. Si l'on pose:

$$D(x, z_1+z_2, y, t_1+t_2)={}_1D(x, z_1, y, t_1)+{}_2D(x, z_2, y, t_2) \tag{7}$$

en tenant compte du fait que:

$${}_1D(x, z_1, y, t_1)=(x, t_1+{}_1\omega(x, z_1)y)\,,$$
$${}_2D(x, z_2, y, t_2)=(x, t_2+{}_2\omega(x, z_2)y)$$

on obtient:

$$D(x, z_1+z_2, y, t_1+t_2)=(x, t_1+t_2+{}_1\omega(x, z_1)y+{}_2\omega(x, z_2)y)\,.$$

En posant $\omega(x, z_1+z_2)y={}_1\omega(x, z_1)y+{}_2\omega(x, z_2)y$, on voit que ω est une application différentiable de $U\times \boldsymbol{R}^{n_1+n_2}$ dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^{n_1+n_2})$. La nature de D découle facilement de l'expression de ω.

Réciproquement, soient j_α l'injection canonique de E_α dans $E_1\oplus E_2$ et π_α la projection canonique de $E_1\oplus E_2$ sur E_α. S'il existe une connexion C sur $(E_1\oplus E, p, M)$ d'application de connexion D, en peut écrire:

$$D(x, z_1+z_2, y, t_1+t_2)=(x, t_1+t_2+{}_1\omega(x, z_1+z_2)y+{}_2\omega(x, z_1+z_2)y)$$

où $\omega_\alpha: U\times\boldsymbol{R}^{n_1+n_2}\to\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^{n_\alpha})$ est différentiable.

On obtient un morphisme ${}_\alpha D$ de TE_α dans E_α en prenant:

$${}_\alpha D=\pi_\alpha D^T_{j_\alpha}\,,$$

i. e.

$${}_1D(x, z_1, y, t_1)=(x, t_1+{}_1\omega(x, z_1)y)\,,$$
$${}_2D(x, z_2, y, t_2)=(x, t_2+{}_2\omega(x, z_2)y)\,.$$

En identifiant $\boldsymbol{R}^{n_1}\times 0$ et $0\times\boldsymbol{R}^{n_2}$ avec $\boldsymbol{R}^{n_1}$ et $\boldsymbol{R}^{n_2}$, on obtient deux applications différentiables de $U\times\boldsymbol{R}^{n_1}$ dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^{n_1})$ et de $U\times\boldsymbol{R}^{n_2}$ dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^{n_2})$.

Remarque. Soient (E_1, p_1, M) et (E_2, p_2, M) deux fibrés vectoriels de même base M. On a un morphisme canonique (q, δ) de $(E_1 \oplus E_2, p_1, M)$ dans $(E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, M \times M)$ défini par $u(\hat{Z}_1 \oplus \hat{Z}_2) = (\hat{Z}_1, \hat{Z}_2)$, δ étant l'application diagonale de M dans $M \times M$. Comme u est un isomorphisme sur les fibres, la première partie de la proposition 4 peut être obtenue directement à partir des propositions 1 et 2.

PROPOSITION 5. *Toute connexion linéaire C sur un fibré vectoriel (E, p, M) induit une connexion linéaiae C^* sur son dual (E^*, p^*, M).*

Preuve· En considérant la restriction de E^* à un ouvert de M qui le trivialise, on a la suite exacte:

$$(8)\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U \times \boldsymbol{R}^{n^*} \times 0 \times \boldsymbol{R}^{n^*} & \longrightarrow & U \times \boldsymbol{R}^{n^*} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n^*} & \longrightarrow & U \times \boldsymbol{R}^{n^*} \times \boldsymbol{R}^m & \longrightarrow & 0\,, \\ 0 & \longrightarrow & (x, z^*, 0, t^*) & \longrightarrow & (x, z^*, y, t^*) & \longrightarrow & (x, z^*, y) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

Puisque C est linéaire, on a une scission à gauche Γ de la suite exacte (2):

$$\Gamma(x, z, y, t) = (x, t + \omega(x, z)y) = (x, t + \bar{\omega}(x)(z)(y))$$

où on a posé $\omega(x, z) = \bar{\omega}(x)(z)$ de telle sorte que $\bar{\omega}$ est une application différentiable de U dans $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)) \cong \boldsymbol{R}^{n^*} \otimes \boldsymbol{R}^{m^*} \otimes \boldsymbol{R}^n$. Soit g l'isomorphisme canonique de $\boldsymbol{R}^{n^*} \otimes \boldsymbol{R}^{m^*} \otimes \boldsymbol{R}^n$ sur $\boldsymbol{R}^n \otimes \boldsymbol{R}^{m^*} \otimes \boldsymbol{R}^{n^*}$ et soit ${}^t\bar{\omega} = g \circ \bar{\omega}$; ce qui permet de définir une scission à droite δ^* de la suite (8):

$$\delta^* : (x, z^*, y) \longrightarrow (x, z^*, y, {}^t\bar{\omega}(x)(z^*)(y))$$

et par suite une application D^* de TE^* dans E^*:

$$(9)\qquad D^* : (x, z^*, y, t^*) \longrightarrow (x, t^* - {}^t\bar{\omega}(x)(z^*)(y))\,.$$

On vérifie aisément que D^* ainsi défini ne dépend pas des cartes vectorielles utilisées.

PROPOSITION 6. *Si deux fibrés vectoriels (E_1, p_1, M) et (E_2, p_2, M) sont munis chacun d'une connexion linéaire, il en est de même de leur produit tensoriel.*

Preuve· On définit une scission à gauche Γ de la suite exacte:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow U \times \boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2} \times 0 \times \boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2} &\longrightarrow U \times \boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2} \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2} \\ &\longrightarrow U \times \boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2} \times \boldsymbol{R}^m \longrightarrow 0\,, \\ 0 \longrightarrow (x, \textstyle\sum z_1 \otimes z_2, 0, \sum t_1 \otimes t_2) &\longrightarrow (x, \textstyle\sum z_1 \otimes z_2, y, \sum t_1 \otimes t_2) \\ &\longrightarrow (x, \textstyle\sum z_1 \otimes z_2, y) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

de la façon suivante:

$$(10)\qquad \Gamma(x, \textstyle\sum z_1 \otimes z_2, y, \sum t_1 \otimes t_2) = (x, \sum z_1 \otimes z_2, 0, \sum t_1 \otimes t_2 + \bar{\omega}(x)(\sum z_1 \otimes z_2)(y))$$

où on a posé:

$$(11)\qquad \bar{\omega}(x)(\textstyle\sum z_1 \otimes z_2)(y) = \sum[{}_1\bar{\omega}(x)(z_1)(y) \otimes z_2 + z_1 \otimes {}_2\bar{\omega}(x)(z_2)(y)]$$

${}_1\bar{\omega}$ et ${}_2\bar{\omega}$ étant les composantes locales des connexions sur (E_1, p_1, M) et (E_2, p_2, M). D'où l'existence d'une connexion sur leur produit tensoriel, l'application $\bar{\omega}: 0 \to \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^{n_1} \otimes \boldsymbol{R}^{n_2}, \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^{n_1} \times \boldsymbol{R}^{n_2})$ étant différentiable.

5. Dérivée covariante. Soit (E, p, M) un fibré vectoriel muni d'une connexion C d'application de connexion D.

Soient $X \in \mathcal{X}(M)$ et $\hat{Y} \in E$. La *dérivée covariante de $\hat{Y}$ par rapport au champ de vecteurs X* est une section $D_X \hat{Y}$ de E définie par:

$$D_X \hat{Y}(x) = D(\hat{Y}^T X_{(x)}) .$$

Soit (U, φ) une carte vectorielle de (E, p, M) et soient (x^i) $(i, j, \cdots = 1, 2, \cdots, m)$ les coordonnées locales de M dans U. On prendra $(x^i, y^i = dx^i)$ comme coordonnées locales dans TM. Pour chaque $x \in U$, soit $E_\alpha(x) = \varphi^{-1}(x, e_\alpha)$ où (e_α) $(\alpha, \beta, \cdots = 1, 2, \cdots, n)$ est la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$. On obtient ainsi n sections linéairement indépendantes de E au-dessus de U.

Soit $\hat{Y}$ une section quelconque de E au-dessus de U; on peut écrire:

$$\hat{Y}(x) = \hat{Y}^\alpha(x) E_\alpha(x) = z^\alpha(\hat{Y}) E_\alpha(x) \qquad \forall x \in U .$$

Les (x^i, z^α) seront choisis comme coordonnées locales de E dans la carte vectorielle (U, φ). Dans la suite, sauf mention contraire, les expressions locales des objets mathématiques qu'on étudie seront données en fonction des coordonnées locales q'on vient d'expliciter.

Enfin on pose $\omega(x, z)(e_i) = \Gamma_i^\alpha(x, z) e_\alpha$ et dans le cas d'une connexion linéaire $\Gamma_i^\alpha(x, z) = \Gamma_{i\beta}^\alpha(x) z^\beta$. Aux fonctions Γ_i^α on donnera le nom de *coefficients* de la connexion C.

Soit A un champ de vecteurs sur l'espace total E, $A = A^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + A^\alpha \dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$ alors on a:

$$DA = (A^\alpha + \Gamma_i^\alpha A^i) E_\alpha . \tag{12}$$

Soient (U', φ') une autre carte vectorielle de (E, p, M) telle que $U \cap U' \neq \emptyset$ et soient $x^{i'}$ les coordonnées locales dans U'. On a $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ et il existe une application différentiable $M: U \cap U' \to Gl(n, \boldsymbol{R})$ telle que $E_\alpha(x) = M_\alpha^{\alpha'}(x) E_{\alpha'}(x)$ et $z^{\alpha'} = M_\alpha^{\alpha'} z^\alpha$. On en déduit la matrice de changement de coordonnées locales dans E:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & 0 \\ \dfrac{\partial M_\alpha^{\alpha'}}{\partial x^i} z^\alpha & M_\alpha^{\alpha'} \end{bmatrix} .$$

On voit d'après la formule (12) que les Γ_i^α se transforment suivant la loi:

$$\Gamma_{i'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = M_\alpha^{\alpha'} \Gamma_i^\alpha - \frac{\partial M_\alpha^{\alpha'}}{\partial x^i} z^\alpha . \tag{13}$$

Pour $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, on déduit de (12) l'expression locale de la dérivée covariante:

$$D_X\hat{Y}=X^i\Big(\frac{\partial\hat{Y}^\alpha}{\partial x^i}+\Gamma_i^\alpha(x,\ \hat{Y})\Big)E_\alpha. \tag{14}$$

Soit $c:t\to c(t)$ une courbe différentiable dans M. On pose:

$$\frac{D\hat{Y}}{dt}=D_{\dot{c}}\hat{Y}. \tag{15}$$

La section $\hat{Y}$ sera dite parallèle le long de c si:

$$\frac{D\hat{Y}}{dt}=0$$

i. e. si

$$\frac{d\hat{Y}^\alpha}{dt}+\Gamma_i^\alpha\frac{dx^i}{dt}=0 \qquad \forall\alpha\in\{1, 2, \cdots, n\}.$$

Puisqu'il y a un isomorphisme canonique de $\underline{E_1\oplus E_2}$ sur $\underline{E_1}\oplus\underline{E_2}$, on identifiera toujours ces deux $\mathcal{F}(M)$-modules. Soit donc $\hat{Y}_1\oplus\hat{Y}_2$ une section de $E_1\oplus E_2$. On a, d'après la proposition (4):

$$D_X(\hat{Y}_1\oplus\hat{Y}_2)={}_1D_X\hat{Y}_1\oplus_2 D_X\hat{Y}_2. \tag{16}$$

On considère de nouveau la connexion C' de la proposition 2. Soit V un ouvert de N muni de coordonnées locales $(x^{i'})$ $(i'=1',\cdots,m')$ et soit $U=f^{-1}(V)$. On peut choisir des sections linéairement indépendantes E_α de (E,p,M) et F_α de (F,q,N) de telle sorte que $u(E_\alpha)=F_\alpha$. Alors, en vertu de (6):

$$D'_X\hat{Y}=X^i\Big(\frac{\partial\hat{Y}^\alpha}{\partial x^i}+\Gamma_{i'}^\alpha(f,u(\hat{Y}))\frac{\partial f^{i'}}{\partial x^i}\Big)E_\alpha. \tag{17}$$

En particulier, si $\hat{Y}$ est induite par une section $\hat{Y}'$ de F et si X est projetable et a pour projection $f^T(X)=X'$ [cf. 8]:

$$u(D'_X\hat{Y})=D_{X'}\hat{Y}'. \tag{18}$$

Dans le cas du fibré dual E^* de E, soit (E^α) la base duale de (E_α). Soit d'autre part $\hat{\omega}=\hat{\omega}_\alpha E^\alpha$ une section de E^*. Alors (9) implique:

$$D_X^*\hat{\omega}=X^i\Big(\frac{\partial\hat{\omega}_\alpha}{\partial x^i}-\Gamma_{i\alpha}^\beta\hat{\omega}_\beta\Big)E^\alpha \tag{19}$$

et D_X et D_X^* sont reliés par:

$$D_X^*\hat{\omega}(\hat{Y})=X\cdot\hat{\omega}(\hat{Y})-\hat{\omega}(D_X\hat{Y}) \qquad \forall\hat{Y}\in E. \tag{20}$$

Enfin, en identifiant $\underline{E_1\otimes E_2}$ avec $\underline{E_1}\otimes\underline{E_2}$, on a, pour tout $\hat{Y}_1\otimes\hat{Y}_2\in E_1\otimes E_2$

$$\begin{aligned}D_X(\hat{Y}_1\otimes\hat{Y}_2)&=\sum X^i\Big(\frac{\partial\hat{Y}_1^{\alpha_1}}{\partial x^i}\hat{Y}_2^{\alpha_2}+\hat{Y}_1^{\alpha_1}\frac{\partial\hat{Y}_2^{\alpha_2}}{\partial x^i}\Big)E_{\alpha_1}\otimes E_{\alpha_2}\\&+\sum X^i({}_1\Gamma_{i\beta_1}^{\alpha_1}\hat{Y}_1^{\beta_1}E_{\alpha_1}\otimes\hat{Y}_2+\hat{Y}_1\otimes{}_2\Gamma_{i\beta_2}^{\alpha_2}\hat{Y}_2^{\beta_2}E_{\alpha_2}) \quad \text{(d'après (11))}\end{aligned}$$

soit

$$D_X(\hat{Y}_1\otimes\hat{Y}_2)={}_1D_X\hat{Y}_1\otimes\hat{Y}_2+\hat{Y}_1\otimes D_X\hat{Y}_2\,. \tag{21}$$

6. Relèvement des sections de E, TM, E^* et T^*M.

On a vu que si un fibré vectoriel (E, p, M) est muni d'une connexion C, à tout champ de vecteurs X sur M correspond un champ de vecteurs X^h sur l'espace total E, appelé relèvement horizontal de X.

Si $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, on déduit facilement de la formule (12):

$$X^h=X^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)\,. \tag{22}$$

D'autre part, il existe un morphisme canonique $(\bar{u}, p)$ de $(VE, \bar{p}, E)$ sur (E, p, M) tel que la restriction de $\bar{u}$ aux fibres soit un isomorphisme. Donc chaque section $\hat{Y}=\hat{Y}^\alpha E_\alpha$ de (E, p, M) détermine un champ de vecteurs Y^v sur la variété E qu'on appellera *relèvement vertical* de $\hat{Y}$. On a

$$Y^v=\hat{Y}^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,. \tag{23}$$

Ces deux relèvements possèdent les propriétés suivantes:

$$(fX)^h=(f\circ p)X^h\,,\qquad (f\hat{Y})^v=(f\circ p)Y^v\,,$$
$$(X+Y)^h=X^h+Y^h\,,\qquad (X+Y)^v=X^v+Y^v\,,$$
$$[X^v, Y^v]=0\,.$$

On remarque que, contrairement au relèvement horizontal d'un champ de vecteurs sur M, le relèvement vertical d'une section de (E, p, M) ne dépend pas de la connexion C.

De la décomposition:

$$T_{\hat{z}}E=VE_{\hat{z}}\oplus HE_{\hat{z}}$$

il résulte une autre décomposition dans le fibré dual T^*E de TE:

$$T^*_{\hat{z}}E=(VE_{\hat{z}})^\perp\oplus(HE_{\hat{z}})^\perp\,.$$

Soit Φ une 1-forme scalaire sur l'espace total E:

$$\Phi=\Phi_i dx^i+\Phi_\alpha dz^\alpha\,.$$

On définit un morphisme ${}^*p^T$ de T^*E dans T^*M par:

$${}^*p^T\Phi(X)=\Phi(X^h)\qquad \forall X\in\mathcal{X}(M)$$

${}^*p^T\Phi$ a pour expression locale:

$${}^*p^T\Phi=(\Phi_i-\Phi_\alpha\Gamma_i^\alpha)dx^i\,.$$

Le morphisme ${}^*p^T$ a pour noyau le fibré $(HE)^\perp$ et sa restriction au fibré $(VE)^\perp$ est un isomorphisme sur les fibres.

Donc si $\omega=\omega_i dx^i$ est une forme scalaire sur M, il lui correspond une forme ω^h sur l'espace total E telle que $*p^T(\omega^h)=\omega$ et on a :

$$\omega^h=\omega_i dx^i . \tag{24}$$

De même, on définit un morphisme $*D$ de T^*E dans E^* par :

$$*D\Phi(\hat{X})=\Phi(X^v) \qquad \forall \hat{X}\in E$$

$*D\Phi$ a pour expression locale :

$$*D\Phi=\Phi_\alpha E^\alpha$$

$*D$ s'annule sur $(VE)^\perp$ et est un isomorphisme sur les fibrés de $(HE)^\perp$.

Soit $\hat{\omega}=\hat{\omega}_\alpha E^\alpha$ une section de E^*. Il lui correspond donc sur l'espace total E une forme ω^v telle que $*D(\omega^v)=\hat{\omega}$ et :

$$\omega^v=\Gamma_i^\alpha \hat{\omega}_\alpha dx^i+\hat{\omega}_\alpha dz^\alpha . \tag{25}$$

On appellera ω^h (resp. ω^v) le relèvement horizontal (resp. vertical) de ω (resp. $\hat{\omega}$).

7. Connexion linéaire. Dans ce paragraphe, on suppose que la connexion C donnée sur (E, p, M) soit linéaire. Comme premières conséquences de cette hypothèse supplémentaire, on a :

$$\begin{aligned} &D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E_\alpha=\Gamma_{i\alpha}^\beta E_\beta , \\ &[X^h, Y^v]=(D_X\hat{Y})^v , \qquad \forall X\in\mathcal{X}(M) , \quad \forall \hat{Y}\in \underline{E} . \end{aligned} \tag{26}$$

Ainsi la dérivée covariante D_X par rapport à un champ de vecteurs X sur M correspond à la dérivée de Lie θ_{X^h} sur la variété E et on a :

PROPOSITION 6. *Quel que soit le champ de vecteurs X sur M et quelle que soit la section $\hat{Y}$ de (E, p, M), $\theta_{X^h}Y^v$ est le relèvement vertical de $D_X\hat{Y}$.*

On vérifie facilement les propriétés suivantes de la dérivée covariante :

$$\begin{aligned} &D_{X+X'}\hat{Y}=D_X\hat{Y}+D_{X'}\hat{Y} , && \forall X, X'\in\mathcal{X}(M) , \\ &D_{fX}\hat{Y}=fD_X\hat{Y} , && \forall f\in\mathcal{F}(M) , \\ &D_X(\hat{Y}+\hat{Y}')=D_X\hat{Y}+D_X\hat{Y}' , && \forall \hat{Y}, \hat{Y}'\in\underline{E} , \\ &D_X(f\hat{Y})=(Xf)\cdot\hat{Y}+fD_X\hat{Y} . \end{aligned}$$

Autrement dit, une connexion linéaire induit une loi de dérivation $\mathcal{D}$ dans le $\mathcal{F}(M)$-*M*odule des sections de (E, p, M). [14].

Réciproquement, on va montrer que toute loi de dérivation dans le $\mathcal{F}(M)$-module des sections de (E, p, M) définit une connexion linéaire sur ce fibré. Pour cela, on a besoin du lemme suivant qui est analogue à la proposition 2.

LEMME. *Soit (u, f) un morphisme de (E, p, M) dans (F, q, N) tel que u soit un isomorphisme sur les fibres. Alors toute loi de dérivation dans F induit une loi de dérivation dans E.*

Preuve: Vérification immédiate à partir de (17). Une loi de dérivation $\mathscr{D}$ étant donnée dans $\underline{E}$, il existe donc une loi de dérivation $\overline{\mathscr{D}}$ dans le $\mathscr{F}(E)$-module des champs verticaux. D'autre part, il existe sur E un champ vertical qu'on a l'habitude de désigner sous le nom de *champ canonique* et qui est défini par:

$$C: E \to E \underset{M}{\times} E \cong VE,$$

$$z \to (z, z),$$

C a pour expression locale:

$$C = z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

On définit un morphisme Γ de TE dans VE de la façon suivante:

$$\Gamma: A \to \Gamma(A) = \bar{D}_A C = (A^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta} A^i z^\beta) \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

où $\Gamma^\alpha_{i\beta}$ est donné par $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} E_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta} E_\alpha$ et $A = A^i \frac{\partial}{\partial x^i} + A^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$. Il est évident que $\Gamma(A) = A$ si $A \in VE$ et que Γ est linéaire sur les fibres de (TE, p^T, TM).

THÉORÈME 4. *Il y a une correspondance biunivoque entre les connexions linéaires sur (E, p, M) et les lois de dérivation dans le $\mathscr{F}(M)$-module de ses sections.*

Voici une autre caractérisation des connexions linéaires (resp. homogènes).

THÉORÈME 5. *Une connexion sur (E, p, M) est linéaire (resp. homogène) si et seulement si la distribution horizontale $\hat{Z} \to HE_{\hat{z}}$ est invariante par le groupe (h_a) $(a \in \boldsymbol{R}^*_+)$ des homothéties positives de E.*

Si la connexion est linéaire, on a:

$$DA = (A^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta} A^i z^\beta) E_\alpha$$

d'où

$$Dh^T_a = h_a D.$$

Par suite $Dh^T_a(HE_{\hat{z}}) = h_a D(HE_{\hat{z}}) = 0$ et $h^T_a(HE_{\hat{z}}) \subset HE_{a\hat{z}}$. Ces deux espaces étant de même dimension, ils sont égaux:

$$h^T_a(HE_{\hat{z}}) = HE_{a\hat{z}}. \tag{27}$$

Réciproquement, si l'on a (27), alors $Dh^T_a\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h = 0$ et en vertu de (22):

$$\Gamma^\alpha_i(x, az) = a\Gamma^\alpha_i(x, z).$$

Des propositions 4 et 5, on déduit l'existence d'une connexion linéaire C^{ad} sur le fibré adjoint $E^* \otimes E$. Si $\hat{\omega} \otimes \hat{Y} \in E^* \otimes E$, on a:

$$D_X^{ad}(\hat{\omega}\otimes\hat{Y})=(D_X^*\omega)\otimes\hat{Y}+\hat{\omega}\otimes D_X\hat{Y}=D_X\circ(\hat{\omega}\otimes\hat{Y})-(\hat{\omega}\otimes\hat{Y})\circ D_X\,.$$

Donc pour $S\in\underline{E^*\otimes E}$, on a :

$$D_X^{ad}S=D_X\circ S-S\circ D_X\,. \tag{28}$$

DÉFINITION. *Une q-forme sur M à valeurs dans un fibré vectoriel (E,p,M) est une application $\mathcal{F}(M)$-q-linéaire ϕ qui à champs de vecteurs $X_1, X_2, \cdots, X_q$ sur M associe la section $\phi(X_1,\cdots,X_q)$ de (E,p,M).*

On définit la courbure d'une connexion linéaire par la formule :

$$R(X,X)\hat{Z}=D_XD_Y\hat{Z}-D_YD_X\hat{Z}-D_{[X,Y]}\hat{Z}\,,\qquad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M)\,,\quad \forall\hat{Z}\in\underline{E}\,.$$

R est donc une 2-forme sur M à valeurs dans le fibré adjoint. Si l'on pose $R\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^j}\right)E_\beta=R^\alpha_{ij,\beta}E_\alpha$, on trouve :

$$R^\alpha_{ij,\beta}=\partial_i\Gamma^\alpha_{j\beta}-\partial_j\Gamma^\alpha_{i\beta}+\Gamma^\gamma_{j\beta}\Gamma^\alpha_{i\gamma}-\Gamma^\gamma_{i\beta}\Gamma^\alpha_{j\gamma}\,. \tag{29}$$

Au lieu de mettre l'expression locale de R sous la forme :

$$R=\left(\frac{1}{2}R^\alpha_{ij,\beta}dx^i\wedge dx^j\right)\otimes E^\beta\otimes E_\alpha$$

on peut encore écrire :

$$R=R^\alpha_\beta E^\beta\otimes E_\alpha$$

où $R^\alpha_\beta=\frac{1}{2}R^\alpha_{ij,\beta}dx^i\wedge dx^j$. En posant $\omega^\alpha_\beta=\Gamma^\alpha_{i\beta}dx^i$, on trouve :

$$R^\alpha_\beta=d\omega^\alpha_\beta+\omega^\alpha_\gamma\wedge\omega^\gamma_\beta\,.$$

Soit R^* la courbure de C^*. $\forall X,Y\in\mathcal{X}(M)$, $R(X,Y): E\to E$ est un morphisme de $\mathcal{F}(M)$-modules. Soit ${}^t(R(X,Y))$ le transposé de cet homomorphisme. On a la relation suivante entre R et R^* :

$$R^*(X,Y)=-{}^t(R(X,Y))\,. \tag{30}$$

Si l'on désigne par ${}_1R$ et ${}_2R$ les courbures des connexions linéaires C_1 et C_2 sur (E_1,p_1,M) et (E_2,p_2,M) les courbures des connexions sur leur somme de Whitney et leur produit tensoriel sont données par les formules :

$$R(X,Y)(\hat{Z}_1\oplus\hat{Z}_2)={}_1R(X,Y)\hat{Z}_1\oplus{}_2R(X,Y)\hat{Z}_2\,. \tag{31}$$

$$R(X,Y)(\hat{Z}_1\otimes\hat{Z}_2)={}_1R(X,Y)(\hat{Z}_1)\otimes\hat{Z}_2+\hat{Z}_1\otimes{}_2R(X,Y))\hat{Z}_2)\,. \tag{32}$$

DÉFINITION. *La différentielle absolue $d\phi$ d'une q-forme ϕ sur M à valeurs dans un fibré vectoriel (E,p,M) muni d'une connexion linéaire est une $(q+1)$-forme à valeurs dans (E,p,M) définie par:*

$$\begin{aligned} d\phi(X_0,\cdots,X_q)&=\sum_{i=0}^{q}(-1)^iD_{X_i}(\phi(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_q))\\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\phi([X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_q)\\ &\qquad\forall X_0,\cdots,X_q\in\mathcal{X}(M) \end{aligned} \tag{33}$$

où le signe ^ au-dessus d'un symbole signifie la suppression de celui-ci dans les expressions où il figure.

En particulier, pour $q=1$, on a:

(34) $$d\phi(X, Y)=D_X(\phi(Y))-D_Y(\phi(X))-\phi[X, Y]$$

et pour $q=2$:

(35) $$d\phi(X, Y, Z)=\sum D_X(\phi(Y, Z))-\sum \phi([X, Y], Z).$$

Dans la formule (35), la sommation as fait sur les permutations circulaires de X, Y, Z.

Soit maintenant une q-forme Φ sur M à valeurs dans $E^*\otimes E$.

$$\Phi=\frac{1}{q!}\Phi^{\alpha}_{i_1\cdots i_q,\beta}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_q}\otimes E^{\beta}\otimes E_{\alpha}.$$

En posant:

$$\Phi^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{q!}\Phi^{\alpha}_{i_1\cdots i_q,\beta}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_q},$$

on trouve:

$$(d^{ad}\Phi)^{\alpha}_{\beta}=d\Phi^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\alpha}_{\gamma}\wedge\Phi^{\gamma}_{\beta}-(-1)^{q}\Phi^{\alpha}_{\gamma}\wedge\omega^{\gamma}_{\beta}.$$

En particulier [cf. (14)]: $d^{ad}R=0$.

8. **Champs de vecteurs projetables.** Un champ de vecteurs X^* sur l'espace total E d'un fibré vectoriel (E, p, M) sera dit projetable s'il existe un champ de vecteurs X sur M tel que $p^T_{\hat{Z}}(X^*)=X_{p(\hat{Z})}$ $\forall \hat{Z}\in E$. X sera appelé la projection de X^*.

Les champs verticaux sont projetables et constituent un $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{V}$. On désignera par $\mathfrak{p}$ l'ensemble des champs projetables. Puisque p^* est une application injective de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathcal{F}(E)$, $\mathfrak{p}$ peut être considéré comme un $\mathcal{F}(M)$-module. De plus, si X^* et Y^* sont projetables et ont pour projections X et Y, le crochet $[X^*, Y^*]$ est projetable et:

$$p^T[X^*, Y^*]=[X, Y].$$

La projection définie plus haut est donc un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{X}(M)$.

On peut énoncer la définition d'une connexion sur le fibré vectoriel (E, p, M) sous la forme équivalente suivante:

DÉFINITION. *Une connexion sur (E, p, M) est une 1-forme vectorielle Γ sur l'espace total E telle que*

1°) $\Gamma(\mathcal{X}(E))\subset\mathcal{V}$,
2°) $\Gamma(A)=A$, $\forall A\in\mathcal{V}$.

La connexion est linéaire (resp. homogène) si:

3°) $\Gamma\circ h^T_a=h^T_a\circ\Gamma$, $\forall a\in \boldsymbol{R}^*_+$.

En effet, la condition 3°) est équivalente au fait que la distribution $\hat{Z}\to HE_{\hat{Z}}$ est invariante par h_a ($a\in \boldsymbol{R}_+^*$).

Le noyau de Γ n'est autre que le $\mathcal{F}(E)$-module $\mathcal{H}$ des champs horizontaux. D'autre part, il y a une bijection de l'ensemble des champs horizontaux et projetables sur $\mathcal{X}(M)$. Il en résulte que le noyau du $\mathcal{F}(M)$-homomorphisme de $\mathfrak{p}$ sur $\mathcal{X}(M)$ est $\mathcal{V}$. Autrement dit:

$$\mathfrak{p}=\mathcal{V}\oplus\mathfrak{p}\cap\mathcal{H} .$$

9. Equations de structure. On revient au cas d'une connexion quelconque C sur (E, p, M). On a vu que C induit une connexion $\bar{C}$ sur le fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$. On prendra $(x^i, z^\alpha, t^\alpha)$ comme coordonnées locales dans la variété VE. Soient $\bar{\Gamma}^\alpha_i$ et $\bar{\Gamma}^\alpha_\beta$ les coefficients de $\bar{C}$. En vertu de (6), on a:

(39) $$\bar{\Gamma}^\alpha_i(x, z, t)=\Gamma^\alpha_i(x, t) , \qquad \bar{\Gamma}^\alpha_\beta=0 .$$

Il en résulte des relations suivantes entre les courbures de R et $\bar{R}$ de C et $\bar{C}$ lorsque C est linéaire:

$$\bar{R}^\alpha_{ij,\beta}=R^\alpha_{ij,\beta} , \qquad \bar{R}^\alpha_{i\beta,\gamma}=0 , \qquad \bar{R}^\alpha_{\beta\gamma,\delta}=0 .$$

D'autre part, J. Vilms a montré que C donne naissance sur le fibré vertical à une connexion linéaire, appelée connexion de Berwald et qu'on notera encore par $\bar{C}$. Les coefficients de la connexion de Berwald sont déterminés par:

(37) $$\bar{\Gamma}^\alpha_{i\beta}=\partial_\beta\Gamma^\alpha_i \quad \text{et} \quad \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}=0$$

en sorte que si $A=A^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+A^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}\in TE$ et $B=B^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}\in VE$, on ait:

(38) $$\bar{D}_A B=\Big[A^i\Big(\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^i}+\partial_\beta\Gamma^\alpha_i B^\beta\Big)+A^\beta\frac{\partial B^\alpha}{\partial z^\beta}\Big]\frac{\partial}{\partial z^\alpha} .$$

Donc dans le cas de la connexion de Berwald, on a:

(39) $$[X^h, Y^v]=\bar{D}_{X^h}Y^v , \qquad \forall X\in\mathcal{X}(M) , \quad \forall\hat{Y}\in\underline{E} .$$

Jusqu'à la fin du chapitre, on se servira de la connexion de Berwald dans le cas où C n'est pas linéaire et de la connexion induite par C dans le cas où C est linéaire.

LEMME. *Si A et B sont des champs verticaux:*

$$\bar{D}_A B-\bar{D}_B A=[A, B] .$$

Si A est horizontal et B vertical:

$$\bar{D}_A B=\Gamma[A, B] .$$

DÉFINITION. La *defférentielle absolue* d'une q-forme sur E à valeurs dans $(VP, \bar{p}, E)$ est la $(q+1)$-forme $\nabla\Phi$ définie par:

$$\nabla\Phi(A_0, \cdots , A_q)=\bar{d}\Phi(HA_0, \cdots , HA_q) , \qquad \forall A_0, \cdots , A_q\in\mathcal{X}(E) .$$

$\nabla\Phi$ est une forme *semi-basique*, i.e. $\nabla\Phi(A_0, \cdots, A_q)=0$ si l'un des champs de vecteurs $A_0, \cdots, A_q$ est vertical.

DÉFINITION. On appellera *forme de courbure* de la connexion C, la 2-forme $\Omega=\nabla\Phi$.

THÉORÈME 6. (*Equation de structure*).

$$\Omega=-N_\Gamma . \tag{40}$$

Preuve: Si A et B sont des champs verticaux, $\Omega(A, B)=0$ et $N_\Gamma(A, B)=[\Gamma A, \Gamma B]+\Gamma^2[A, B]-\Gamma[\Gamma A, B]-\Gamma[A, \Gamma B]=0$ car $\Gamma A=A$ et $\Gamma B=B$.

Si A est vertical et B horizontal, on a aussi $\Omega(A, B)=N_\Gamma(A, B)=0$ car $\Gamma B=0$. Enfin, si A et B sont horizontaux, on a:

$$\Omega(A, B)=-N_\Gamma(A, B)=-\Gamma[A, B] .$$

On déduit de la formule (40) l'expression locale de Ω:

$$\Omega=\frac{1}{2}\Omega^\alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \tag{41}$$

où on a posé:

$$\Omega^\alpha_{ij}=\partial_i\Gamma^\alpha_j-\partial_j\Gamma^\alpha_i+\Gamma^\beta_j\partial_\beta\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\beta_i\partial_\beta\Gamma^\alpha_j .$$

COROLLAIRE 4. *Quels que soient* $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$:

$$[X^h, Y^h]=[X, Y]^h-\Omega(X^h, Y^h) . \tag{42}$$

THÉORÈME 7. *Si la connexion C est linéaire:*

$$(R(X, Y), \hat{Z})^v=-[\Omega(X^h, Y^h), Z^v]$$

quels que soient $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ *et* $\hat{Z}\in\underline{E}$.

Preuve: Utiliser les formules (26) et (39).

COROLLAIRE 5. *Si la connexion est linéaire:*

$$\Omega=0 \Longleftrightarrow R=0 .$$

Avant d'aller plus loin, on va rappeler certaines notions utiles pour la suite.

DÉFINITION. *Soient L et L' deux r-formes vectorielles sur deux variétés différentiables M et M' et f une application différentiable de M dans M'. On dit que L et L' sont f-compatibles si pour tout $x\in M$*

$$f^T(L(X_1, \cdots, X_r))=L'(f^TX_1, \cdots, f^TX_r) , \qquad \forall X_1, \cdots, X_r\in T_xM .$$

A. Frölicher et A. Nijenhuis montrent que, si deux formes vectorielles sur deux variétés différentiables M et M' sont f-compatibles, il en est de même de leurs transformées par l'opération de contraction $\overline{\wedge}$. En particulier, les crochets des formes vectorielles f-compatibles sont f-compatibles [cf. (9)].

COROLLAIRE 6. *Soit Ω' la forme de courbure de la connexion C', image réciproque d'une connexion C par un morphisme (u,f) tel que u soit un isomorphisme sur les fibres. Alors:*

1°) *$\Omega=0$ implique $\Omega'=0$.*
2°) *Si u est surjectif, $\Omega'=0 \Leftrightarrow \Omega=0$.*

Preuve D'après la définition de Γ', on voit que Γ et Γ' sont u-compatibles. Par suite:

$$u^T(\Omega'(A, B))=\Omega(u^T A, u^T B), \qquad \forall A, B\in T_{\hat{z}}E.$$

Que $\Omega=0$ entraine $\Omega'=0$, cela provient du fait que la restriction de u^T au fibré vertical est un isomorphisme sur les fibres.

2°) D'aprés la proposition 2, $u^T(H_{\hat{z}}E)=H_{u(\hat{z})}F$; de plus Ω est une forme semi-basique; d'où le résultat.

THÉOREME 8. *Soit Φ une q-forme semi-basique à valeurs dans VE, alors:*

$$\nabla\Phi=-[\Gamma, \Phi]. \tag{43}$$

Preuve La démonstration se fait par récurrence sur le degré de Φ. Pour $q=1$, on a:

$$\begin{aligned}[\Gamma, \Phi](A, B)=&[\Gamma A, \Phi B]+[\Phi A, \Gamma B]+\Gamma\Phi[A, B]+\Phi\Gamma[A, B]\\ &-\Gamma[\Phi A, B]-\Gamma[A, \Phi B]-\Phi[\Gamma A, B]-\Phi[A, \Gamma B].\end{aligned}$$

Si A et B sont tous les deux verticaux ou si A est vertical et B horizontal, on a $\nabla\Phi(A, B)=[\Gamma, \Phi](A, B)=0$. Si A et B sont horizontaux, $\nabla\Phi(A, B)=-[\Gamma, \Phi](A, B)$ en vertu du lemme.

On suppose donc que le théorème soit vrai pour une forme de degré $q-1$. En faisant dans la formule (6) du chapitre I, $X=A_0$, $L=\Gamma$ et $M=\Phi$ et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on obtient:

$$\begin{aligned}[\Gamma, \Phi](A_0, \cdots, A_q)=&\theta_{\Gamma(A_0)}\Phi(A_1, \cdots, A_q)+\nabla i_{A_0}\Phi(A_1, \cdots, A_q)\\ &-\Gamma(\theta_{A_0}\Phi(A_1, \cdots, A_q))-\sum_{i=1}^{q}\Phi(A_1, \cdots, \theta_{A_0}\Gamma(A_i), \cdots, A_q).\end{aligned} \tag{44}$$

On remarque que si A_0 est vertical, $i_{A_0}\Phi=0$, $\theta_{A_0}\Gamma(A_i)=[A_0, \Gamma A_i]-\Gamma[A_0, A_i]$ est un champ vertical. Il en résulte que le 1[er] membre de (44) est nul si l'un des champs $A_0, \cdots, A_q$ est vertical. Si ces champs sont tous horizontaux, on a:

$$\begin{aligned}[\Gamma, \Phi](A_0, \cdots, A_q)&=\bar{d}i_{A_0}\Phi(A_1, \cdots, A_q)-\Gamma(\theta_{A_0}\Phi(A_1, \cdots, A_q))\\ &=\sum_{i=1}^{q}(-1)^{i-1}\bar{D}_{A_i}(\Phi(A_0, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, A_q))\\ &\quad+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Phi(A_0, [A_i, A_j], A_1, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, \hat{A}_j, \cdots, A_q)\\ &=-\{\sum_{i=0}^{q}(-1)^{i}\bar{D}_{A_i}(\Phi(A_0, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, A_q)\end{aligned}$$

$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Phi([A_i, A_j], A_0, \cdots, \hat{A}_i, \cdots, \hat{A}_j, \cdots, A_q)\}$$
$$=-\nabla\Phi(A_0, \cdots, A_q).$$

COROLLAIRE 7 (*Identité de Bianchi*). $\nabla\Omega=0$.

COROLLAIRE 8. *Quelle que soit la forme semi-basique Φ à valeurs dans le fibré vertical, on a:*

$$\nabla^2\Phi=\nabla(\nabla\Phi)=[\Omega, \Phi]. \tag{45}$$

Preuve: Conséquence immédiate de (43) et de la formule (1) du chapitre I. On va maintenant chercher la forme de courbure sur une somme de Whitney $E=E_1\oplus E_2$. On sait que les fibrés vectoriels $T(E_1\oplus E_2)$ et $TE_1\oplus TE_2$ de base TM sont isomorphes. Il en est donc de même de leurs restrictions $V(E_1\oplus E_2)$ et $VE_1\oplus VE_2$ à M considérée comme sous-variété de TM. On identifiera ces deux derniers fibrés. Soient ${}_1\Gamma$ et ${}_2\Gamma$ les 1-formes vectorielles qui définissent C_1 et C_2 sur E_1 et E_2. La forme Γ qui détermine C est, d'après la proposition 4, donnée par:

$$\Gamma={}_1\Gamma\circ\pi_1+{}_2\Gamma\circ\pi_2. \tag{46}$$

Un vecteur A tangent à E est vertical si et seulement si il en est ainsi de ses projections sur E_1 et E_2. Les vecteurs horizontaux de E possèdent la même propriété.

THÉORÈME 9. *Soient Ω, ${}_1\Omega$ et ${}_2\Omega$ les formes de courbures de C, C_1 et C_2. Alors*

$$\Omega={}_1\Omega\circ\pi_1^T+{}_2\Omega\circ\pi_2^T. \tag{47}$$

Preuve: Soient $A, B\in T_{\hat{z}_1\oplus\hat{z}_2}E$. Si l'un des vecteurs A ou B est vertical, on a vu que $N_\Gamma(A, B)=0$; d'où $N_{{}_1\Gamma}(\pi_1^TA, \pi_2^TB)=N_{{}_2\Gamma}(\pi_2^TA, \pi_2^TB)=0$ d'après les remarques ci-dessus.

Reste le cas où A et B sont horizontaux. On a $p_1^T(\pi_1^TA)=p_2^T(\pi_2^TA)$. D'autre part, on a l'isomorphisme $(j_1, j_2): E_1\times_M E_2\to E$. Soient $\tilde{A}_1$ et $\tilde{A}_2$ deux champs de vecteurs horizontaux sur E_1 et E_2 tels que $(\tilde{A}_1)_{\hat{z}_1}=\pi_1^TA$, $(\tilde{A}_2)_{\hat{z}_2}=\pi_2^TA$ et $p_1^T(\tilde{A}_1)=p_2^T(\tilde{A}_2)$. L'image de $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$ par $(j_1\times j_2)$ est un champ de vecteurs horizontaux $\tilde{A}$ sur E tel que $\tilde{A}_{\hat{z}_1\oplus\hat{z}_2}=A$. De plus $\pi_1^T\tilde{A}=\tilde{A}_1$ et $\pi_2^T\tilde{A}=\tilde{A}_2$. De même on peut prolonger B en un champ horizontal et projetable $\tilde{B}$. On a alors:

$$N_\Gamma(A, B)=\Gamma[\tilde{A}, \tilde{B}]_{\hat{z}_1\oplus\hat{z}_2},$$
$$N_{{}_1\Gamma}(\pi_1^TA, \pi_1^TB)={}_1\Gamma[\tilde{A}_1, \tilde{B}_1]_{\hat{z}_1}={}_1\Gamma(\pi_1^T[\tilde{A}, \tilde{B}])_{\hat{z}_1},$$
$$N_{{}_2\Gamma}(\pi_2^TA, \pi_2^TB)={}_2\Gamma[\tilde{A}_2, \tilde{B}_2]_{\hat{z}_2}={}_2\Gamma(\pi_2^T[\tilde{A}, \tilde{B}])_{\hat{z}_2},$$

et on a bien la formule (47) moyennant (46).

COROLLAIRE 9. $\Omega=0 \Leftrightarrow {}_1\Omega={}_2\Omega=0$.

10. Torsion d'une connexion sur le fibré tangent. Soit une connexion c de coefficients γ_j^i sur une variété différentiable M. La dérivée covariante par rapport à un champ de vecteurs X sera désignée par ∇_X.

DÉFINITION. *On appellera forme canonique sur TM, la forme θ définie par:*

$$\theta_Z(A)=(p^T A)_Z^v\,, \qquad \forall A\in T_Z TM\,.$$

C'est donc une 1-forme horizontale sur TM à valeurs dans le fibré vertical VTM. Puisque le relèvement vertical ne dépend pas de la connexion c, il en est de même de θ.

THÉORÈME 10. *Soit f une application différentiable d'une variété M dans une autre variété N. Alors les formes canoniques θ_M et θ_N sur TM et TN sont f^T-compatibles, i.e.:*

$$(f^T)^T\circ\theta_M=\theta_N\circ(f^T)^T\,.$$

Preuve· On peut vérifier facilement cette propriété de la forme canonique en utilisant les coordonnées locales.

DÉFINITION. On appellera *forme de torsion* la 2-forme $\tau=\nabla\theta$.

THÉORÈME 11 (*Equation de structure*). $\tau=-[\gamma,\theta]$.

Preuve· Il suffit de remplacer Φ par θ dans la formule (43).

COROLLAIRE 10 (*Identité de Bianchi*). $\nabla\tau=[\Omega,\theta]$.

COROLLAIRE 11. *τ a pour expression locale*·

$$\tau=\frac{1}{2}(\partial_{j^*}\gamma_k^i-\partial_{k^*}\gamma_j^i)dx^j\wedge dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}$$

où ∂_{j^*} désigne la dérivée partielle par rapport à y_j.

Jusqu'à la fin du chapitre, on suppose la connexion c linéaire. On appelle torsion de la connexion c, la différentielle extérieure $T=d^cI$ de la transformation identique I de TM [cf. (14)]

$$T(X, Y)=d^cI(X, Y)=\nabla_X Y-D_Y X-[X, Y]\,, \qquad \forall X, Y\in\mathfrak{X}(M)$$

soit en coordonnées locales:

$$T=\frac{1}{2}(\gamma_{jk}^i-\gamma_{kj}^i)dx^j\otimes dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

THÉORÈME 12. *Quels que soient les champs de vecteurs X et Y sur M,*

$$\tau(X^h, Y^h)=(T(X, Y))^v\,.$$

Preuve: C'est une conséquence immédiate des formules (48) et (26).

COROLLAIRE 12. $\tau=0 \Longleftrightarrow T=0$.

DÉFINITION. *Une connexion linéaire sur M est dite symétrique si τ ou T est nulle i.e.:*

$$\gamma^i_{jk}=\gamma^i_{kj}.$$

CHAPITRE III. *G*-structures sur les fibrés vectoriels

Dans ce chapitre, on considère un fibré vectoriel (E, p, M) muni d'une connexion C.

1. Structure preseque-product. Soient V $(=\Gamma)$ et H les projections de TE sur VE et HE suivant la décomposition:

$$TE=VE\oplus HE. \tag{1}$$

En posant:

$$P=V-H \tag{2}$$

on obtient $P^2=I$ et de plus:

$$V=\frac{I+P}{2}, \qquad H=\frac{I-P}{2}. \tag{3}$$

THÉORÈME 1. *Sur l'espace total d'un fibré vectoriel muni d'une connexion, il existe une structure presque-produit.*

Les champs de vecteur verticaux (resp. horiontaux) correspondent à la valeur propre $+1$ (resp. -1) de P.

Soient $X, Y\in TM$ (resp. $\hat{X}, \hat{Y}\in \underline{E}$) et X^h, Y^h (resp. X^v, Y^v) leurs relèvements horizontaux (resp. verticaux).

Puisque $PX^h=-X^h$ et $PX^v=X^v$, on a:

$$N_P(X^v, Y^v)=0 \text{ car } [X^v, Y^v] \text{ est vertical}$$

$$N_P(X^v, Y^v)=0$$

$$N_P(X^h, Y^h)=4V[X^h, Y^h]=-4\Omega(X^h, Y^h).$$

THÉORÈME 2. *Pour que la structure presque-produit sur la variété E soit intégrable, it faut et il suffit que la forme de courbure de la connexion C soit nulle.*

Soit C le champ canonique sur E. On a $PC=C$.

Soit θ_C la dérivée de Lie par rapport à C:

$$\theta_C P\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)=\theta_C\Big(P\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)-P\Big(\theta_C\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)$$

$$=-2V\Big(\theta_C\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)=2\Big(\frac{\partial \Gamma^\alpha_i}{\partial z^\beta}z^\beta-\Gamma^\alpha_i\Big)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\theta_C P\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)=2H\Big(\theta_C\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)\Big)=0\,.$$

On obtient ainsi une autre manière de caractériser les connexions linéaires (resp. homogènes).

THÉORÈME 3. *Pour qu'une connexion sur (E, p, M) soit linéaire (resp. homogène), il faut et il suffit que $\theta_C P=0$.*

On a alors:

$$\theta_C N_P=0 \tag{4}$$

car d'après la formule (2) du chapitre I:

$$-[P,[A, P]]+[A,[P, P]]+[P,[P, A]]=0\,, \qquad \forall A\in\mathscr{X}(E)\,. \tag{5}$$

D'autre part, si $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathscr{X}(M)$, $X^h=X^i\Big(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h$ et:

$$\theta_{X^h}P\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big)=-2V\Big[X^h,\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big]=\Omega\Big(X^h,\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big)=X^i\Omega\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h,\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big)$$

$$\theta_{X^h}\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)=2H\Big[X^h,\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big]=0\,.$$

De même, pour $\hat{Y}=\hat{Y}^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$, on a $Y^v=\hat{Y}^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$ et:

$$\theta_{Y^v}P\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)=-2V\Big[Y^v,\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big]=-2(\partial_i\hat{Y}^\alpha+\partial_\beta\Gamma_i^\alpha\hat{Y}^\beta)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\theta_{Y^v}P\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)=2H\Big[Y^v,\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big]=0\,.$$

On en déduit:

THÉORÈME 4. a) *Pour que le tenseur P soit invariant par un groupe local à un paramètre engendré par le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs quelconque de la base, il faut et il suffit que la forme de courbure de la connexion soit nulle.*

b) *Dans le cas linéaire ou homogéne, pour que le tenseur P soit invariant par un groupe local à un paramètre engendré par le relèvement vertical d'une section du fibré vectoriel, il faut et il suffit que cette section soit parallèle.*

S'il en est ainsi, on aura, d'après (5):

$$\theta_{X^h}N_P=0 \quad \text{et} \quad \theta_{Y^v}N_P=0\,. \tag{6}$$

2. Structure F telle que $F^3+F=0$. Dans ce paragraphe, on suppose que la base M de (E, p, M) soit munie d'une connexion c de coefficients γ_j^i. Alors on sait qu'il existe une connexion C' sur la somme de Whitney $E'=TM\oplus E$. On prendra (x^i, y^j, z^α) comme coordonnées locales dans E'. En chaque point $\hat{Z}$ de

E', on a:

$$T_{\hat{z}}E'=HE'_{\hat{z}}\oplus VE'_{\hat{z}}\,.$$

D'autre part, la restriction de D' (application de connexion de C') à $VE'_{\hat{z}}$ est un isomorphisme de $VE'_{\hat{z}}$ sur $(TM\oplus E)_{p'(\hat{z})}$, p' étant la projection de E' sur M. Il en résulte que:

$$TE'=HE'\oplus V_2\oplus V_3$$

où V_2 et V_3 sont deux fibrés vectoriels de base E' ayant même dimension que M et E.

Soient π la projection canonique de E' sur TM et j et j' les injections canoniques de TM et de E dans E'. Pour chaque vecteur $A\in T_{\hat{z}}E'$, il existe un seul vecteur $FA\in T_{\hat{z}}E'$ tels que:

$$\text{(7)}\qquad \begin{aligned} p'^T(FA)&=\pi\circ D'(A)\\ D'(FA)&=-j\circ p'^T(A)\,. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $F^3+F=0$.

THÉOREME 5. *Si le fibré vectoriel E et sa base M sont munis chacun d'une connexion, il existe sur la variété $TM\oplus E$ une structure F telle que $F^3+F=0$.*

Comme $j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ et $j(E_\alpha)$ forment une base des sections locales de E', les champs de vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h$, $\left(j\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^v$ et $(j'(E_\alpha))^v$ constituent des bases des sections locales de HE', V_2 et V_3. On a ici:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h=\frac{\partial}{\partial x^i}-\gamma_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}-\Gamma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\left(j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)^v=\frac{\partial}{\partial y^i}\,,\qquad (j'(E_\alpha))^v=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,.$$

D'après la définition de F:

$$F\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)=\frac{\partial}{\partial y^i}\,,\quad F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\quad F\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0\,.$$

En remarquant que:

$$F^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)=-\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\quad F^2\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=-\frac{\partial}{\partial y^i}\,,\quad F^2\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0\,,$$

on obtient:

$$\begin{aligned} N_{F^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^h\right)&=(I+F^2)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^h\right]\\ &=-(\partial_i\Gamma_j^\alpha-\partial_j\Gamma_i^\alpha+\Gamma_j^\beta\partial_\beta\Gamma_i^\alpha-\Gamma_i^\beta\partial_\beta\Gamma_j^\alpha)\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \end{aligned}$$

$$N_{F^2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=(I+F^2)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h,\frac{\partial}{\partial y^i}\right]=0$$

$$N_{F2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right)=0$$

$$N_{F2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0$$

$$N_{F2}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right)=0$$

THÉORÈME 6. *Pour que la structure F telle que $F^3+F=0$ sur E' soit intégrables, il faut et il suffit que la forme de courbure de la connexion sur E soit nulle.*

Soit C' le champ canonique sur $TM\oplus E$:

$$C'=y^i\frac{\partial}{\partial y^i}+z^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

On a:

$$\theta_{C'}F\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)=-F\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)+(\gamma_i^j-y^k\partial_{k^*}\gamma_i^j)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$\theta_{C'}F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=-F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)+(\partial_{k^*}\gamma_i^j y^k-\gamma_i^j)\frac{\partial}{\partial y^j}+(\partial_\beta\Gamma_i^\alpha-\Gamma_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\theta_{C'}F\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0$$

où on a posé $\partial_{k^*}=\dfrac{\partial}{\partial y^k}$.

THÉORÈME 7. *Pour que la connexion induite sur $TM\oplus E$ soit linéaire (resp. homogène), il faut et il suffit que $\theta_{C'}F=-F$.*

S'il en est ainsi, on a:

$$\theta_{C'}N_F=-2N_F.$$

Soient $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\in\mathscr{X}(M)$ et X^h son relèvement horizontal dans $TM\oplus E$:

$$\theta_{X^h}F\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)=X^h\Omega_{ik}^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^h+\partial_iX^j+X^k\partial_{k^*}\gamma_i^j)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

où Ω_{ik}^j désigne les coefficients de la forme de courbure de c.

$$\theta_{X^h}F\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)=(\partial_iX^j+X^k\partial_{k^*}\gamma_i^j)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^h-X^k\Omega_{ik}^j\frac{\partial}{\partial y^j}-X^k\Omega_{ik}^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\theta_{X^h}F\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0.$$

De même, soit $X\oplus\hat{Y}=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+\hat{Y}^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}\in TM\oplus E$ et soit $(X\oplus\hat{Y})^v$ son relèvement vertical dans $TM\oplus E$:

$$(X\oplus\hat{Y})^v=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\hat{Y}^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

On a :

$$\theta_{(X\oplus\hat{Y})^v}F\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)=-(\partial_i X^j+X^k\partial_{k^*}\gamma_i^j)\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h$$

$$\theta_{(X\oplus\hat{Y})^v}F\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)=(\partial_i X^j+X^k\partial_{k^*}\gamma_i^j)\frac{\partial}{\partial y^j}+(\partial_i\hat{Y}^\alpha+\hat{Y}^\beta\partial_\beta\Gamma_i^\alpha)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$\theta_{(X\oplus\hat{Y})^v}F\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)=0\,.$$

THÉORÈME 8. *Si les connexions C et c sont linéaires (resp. homogènes).*

a) *Pour que F soit invariant par un groupe local à un paramètre engendré par le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs de la base, il faut et il suffit que les formes de courbures de C et c soient nulles et que ce champ soit parallèle.*

b) *Pour que F soit invariant par un groupe local à un paramètre engendré par le relèvement vertical de $X\oplus\hat{Y}$, il faut et il suffit que X et $\hat{Y}$ soient parallèles.*

On considère maintenant le fibré $\tilde{E}=TM\underset{M}{\times}E$. La connexion C induit une connexion $\tilde{C}$ sur $\tilde{E}$. En chaque point $\tilde{X}$ de $\tilde{E}$, on a :

$$T_{\tilde{X}}\tilde{E}=V\tilde{E}_{\tilde{X}}\oplus H\tilde{E}_{\tilde{X}}\,.$$

Soit $X=\pi_1\tilde{X}$ où $\pi_1: TM\underset{M}{\times}E\to TM$. On a aussi :

$$T_X TM=HTM_X\oplus VTM_X\,.$$

Soient $(HTM_X)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}$ et $(VTX_X)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}$ les relèvements horizontaux de HTM_X et VTM_X dans $\tilde{E}$. Alors :

$$H\tilde{E}_{\tilde{X}}=(HTM_X)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}\oplus(VTM)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}$$

de telle sorte que :

$$T_{\tilde{X}}\tilde{E}=(HTM_X)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}\oplus(VTM)^{\tilde{h}}_{\tilde{X}}\oplus V\tilde{E}_{\tilde{X}}\,. \tag{8}$$

Opérant comme plus haut, on obtient le :

THÉORÈME 9. *Si le fibré vectoriel E et sa base M sont munis chacun d'une connexion, il existe une structure $\tilde{F}$ telle que $\tilde{F}^3+\tilde{F}=0$ sur $TM\underset{M}{\times}E$.*

Soient $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h$ et $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^v$ les relèvements horizontal et vertical de $\frac{\partial}{\partial x^i}$ dans TM :

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h=\frac{\partial}{\partial x^i}-\gamma_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}\,,\quad \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^v=\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Les relèvements horizontaux de $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h$ et $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^v$ dans $\tilde{E}$ sont :

$$\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}=\frac{\partial}{\partial x^i}-\gamma_i^j\frac{\partial}{\partial y^j}-\Gamma_i^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,,\quad \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^v\Big)^{\tilde{h}}=\frac{\partial}{\partial y^i}.$$

La structure $\tilde{F}$ est donc définie par :

$$\tilde{F}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}\Big)=\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \tilde{F}\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)=-\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \quad \tilde{F}\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)=0$$

et on a des résultats analogues à ceux obtenus sur une somme de Whitney:

THÉORÈME 10. *Pour que la structure $\tilde{F}$ telle que $\tilde{F}^3+\tilde{F}=0$ sur $TM\underset{M}{\times}E$ soit intégrable, il faut et il suffit que la forme de courbure de la connexion sur le fibré vectoriel soit nulle.*

3. Structure $\bar{K}$ telle que $\bar{K}^3=\bar{K}$ sur le fibré vertical. On reprend la connexion $\bar{C}$ induite par C sur le fibré vertical. Soit $\bar{P}$ la structure presque-produit associée à la décomposition:

$$T_A VE = VVE_A \oplus HVE_A \tag{9}$$

en un point A de VE.

On déduit de la propriété de $\bar{C}$ et de l'étude de P le:

THÉORÈME 11. *Pour que la structure presque-produit $\bar{P}$ sur la variété VE soit intégrable, it faut et il suffit que la forme de courbure de C soit nulle.*

Soit $\hat{Z}$ l'origine du vecteur vertical A. Comme $T_{\hat{Z}}E=HE_{\hat{Z}}\oplus VE_{\hat{Z}}$, en désignant par $(HE_{\hat{Z}})^{\tilde{h}}$ et $(VE_{\hat{Z}})^{\tilde{h}}$ les relèvements horizontaux de $HE_{\hat{Z}}$ et $VE_{\hat{Z}}$ dans VE, on peut écrire:

$$T_A VE=(HE_{\hat{Z}})^{\tilde{h}}_A \oplus (VE_{\hat{Z}})^{\tilde{h}}_A \oplus VVE\,. \tag{10}$$

Les champs de vecteurs $\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h$ et $\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ forment une base des sections locales de TE. Par suite $\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}$, $\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{\tilde{h}}$ et $\frac{\partial}{\partial t^\alpha}$ forment une base des sections locales de TVE. On a:

$$\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}=\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i(x,z)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}-\Gamma^\alpha_i(x,t)\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \quad \Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{\tilde{h}}=\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,. \tag{11}$$

Soient π_1, π_2, π_3 les projections définies par (10). Si l'on pose $\bar{K}=\pi_1-\pi_2$, il vient: $\bar{K}^3=\bar{K}$.

THÉORÈME 12. *Sur le fibré vertical tangent à un fibré vectoriel muni d'une connexion, il existe une structure $\bar{K}$ telle que $\bar{K}^3=\bar{K}$.*

Soit $\bar{\Omega}$ la forme de courbure de $\bar{C}$; on a, moyennant (11)

$$N_{\bar{K}}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}\Big)=-\bar{\Omega}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}\Big)$$

$$N_{\bar{K}}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{\tilde{h}}\Big)=\bar{\Omega}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{\tilde{h}}\Big)$$

$$N_{\bar{K}}\Big(\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^h\Big)^{\tilde{h}}, \Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big)\Big)=0$$

$$N_{\bar{K}}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{h}, \Big(\frac{\partial}{\partial z^\beta}\Big)^{h}\Big)=-\bar{\Omega}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{h}, \Big(\frac{\partial}{\partial z^\beta}\Big)^{h}\Big)$$

$$N_{\bar{K}}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big)^{h}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big)=0$$

$$N_{\bar{K}}\Big(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial}{\partial t^\beta}\Big)=0\,.$$

Ainsi la structure $\bar{K}$ est intégrable si et seulement si $\bar{\Omega}=0$. Donc d'après le corollaire 6 du chapitre II, on a le

THÉORÈME 13. *Pour que la structure $\bar{K}$ soit intégrable, il faut et il suffit que la forme de courbure de la connexion C soit nulle.*

CHAPITRE IV. Relevements dans les fibrés vectoriels

Dans ce chapitre, on considère encore un fibré vectoriel (E, p, M) muni d'une connexion C.

1. Relèvement des métriques riemanniennes. On rappelle qu'une métrique riemannienne sur (E, p, M) est une section différentiable $\hat{g}$ de $E^*\otimes E^*$ telle que, pour tout $x\in M$, $\hat{g}(x)$ soit une forme bilinéaire symétrique définie positive. Une métrique riemannienne sur (TM, p, M) sera appelée métrique riemannienne sur M.

PROPOSITION 1. *Si un fibré vectoriel (E, p, M) et sa base M sont munis de métriques riemanniennes, il en est de même de la variété E.*

Preuve· Soit $\hat{g}$ et g deux métriques riemanniennes sur (E, p, M) et M. On obtient une métrique riemannienne G sur l'espace total E en posant:

(1) $$G(A, B)=g(p^T A, p^T B)+\hat{g}(DA, DB) \qquad \forall A, B\in T_{\hat{z}}E\,.$$

On dira que G est le relèvement des métriques riemanniennes $\hat{g}$ et g suivant C.

Dans le cas d'une variété riemannienne (M, g), si l'on prend pour C la connexion riemannienne canonique et $\hat{g}=g$, on retrouve la métrique de Sasaki [17].

Les distributions horizontales et verticales sont orthogonales par rapport à G, i.e.:

(2) $$G(HA, VB)=0 \qquad \forall A, B\in \mathfrak{X}(E)$$

et on a:

(3) $$G(A, B)=G(HA, HB)+G(VA, VB)\,.$$

On en déduit:

(4) $$G(HA, B)=G(A, HB)$$
$$G(VA, B)=G(A, VB)\,.$$

Enfin, on a:

$$G(PA, B)=G(A, PB) \tag{5}$$

où P est la structure presque-produit définie par C.

D'après la définition de G, on a:

$$G(A, B)=g(p^T A, p^T B)\cdot p \qquad \forall A, B\in\mathfrak{p}\cap\mathcal{H}\,. \tag{6}$$

Autrement dit, p est une submersion riemannienne de la variété riemannienne (E, G) sur (M, g).

Soient $\hat{g}_{\alpha\beta}$, g_{ij} et G_{IJ} $(I, J, \cdots=1, 2, \cdots, m+n)$ les coefficients de $\hat{g}$, g et G. On trouve:

$$G_{ij}=g_{ij}+\Gamma_i^\alpha\Gamma_j^\beta\hat{g}_{\alpha\beta}\,.$$

$$G_{i\alpha}=\Gamma_i^\beta\hat{g}_{\beta\alpha}$$

$$G_{\alpha\beta}=\hat{g}_{\alpha\beta}\,.$$

On en déduit:

$$G^{ij}=g^{ij}$$

$$G^{i\alpha}=-g^{ij}\Gamma_j^\alpha$$

$$G^{\alpha\beta}=\hat{g}^{\alpha\beta}+g^{ij}\Gamma_i^\alpha\Gamma_j^\beta\,.$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose C linéaire. En vertu des propositions 4 et 5 du chapitre II, il existe alors une connexion linéaire C^{**} sur $E^*\otimes E^*$. On suppose en plue que $\hat{g}$ soit parallèle par rapport à C^{**}, i.e.:

$$D_X^{**}\hat{g}(\hat{X}, \hat{Z})=X\cdot\hat{g}(\hat{Y}, \hat{Z})-\hat{g}(D_X\hat{Y}, \hat{Z})-\hat{g}(\hat{Y}, D_X\hat{Z}) \qquad \forall X\in\mathcal{X}(M),\ \forall\hat{Y}, \hat{Z}\in\underline{E}$$

soit en coordonnées locales:

$$\partial_i\hat{g}_{\alpha\beta}-\Gamma_{i\alpha}^\eta\hat{g}_{\eta\beta}-\Gamma_{i\beta}^\eta\hat{g}_{\eta\alpha}=0\,.$$

Soient $\tilde{\Gamma}_{JK}^I$ et $\tilde{\gamma}_{jk}^i$ les coefficients des connexions riemanniennes déterminées par G et g. On trouve:

$$\tilde{\Gamma}_{i,jk}=\tilde{\Gamma}_{i,kj}=\tilde{\gamma}_{i,jk}+\frac{1}{2}(R_{ji,\gamma}^\alpha\Gamma_{k\delta}^\eta+R_{ki,\gamma}^\alpha\Gamma_{j\delta}^\eta)\hat{g}_{\alpha\eta}z^\gamma z^\delta$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_j\Gamma_{k\gamma}^\alpha+\partial_k\Gamma_{j\gamma}^\alpha+\Gamma_{k\gamma}^\xi\Gamma_{j\xi}^\alpha+\Gamma_{j\gamma}^\xi\Gamma_{k\xi}^\alpha)\Gamma_{i\delta}^\eta\hat{g}_{\alpha\eta}z^\gamma z^\delta$$

$$\tilde{\Gamma}_{i,j\alpha}=\tilde{\Gamma}_{i,\alpha j}=\left(\frac{1}{2}R_{ji,\gamma}^\eta\hat{g}_{\eta\alpha}+\Gamma_{i\gamma}^\eta\Gamma_{j\alpha}^\xi\hat{g}_{\eta\xi}\right)z^\gamma$$

$$\tilde{\Gamma}_{i,\alpha\beta}=\tilde{\Gamma}_{i,\beta\alpha}=0$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta\gamma}=\tilde{\Gamma}_{\alpha,\gamma\beta}=0$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha,\beta i}=\tilde{\Gamma}_{\alpha,i\beta}=\Gamma_{i\beta}^\eta\hat{g}_{\eta\alpha}$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha,ij}=\tilde{\Gamma}_{\alpha,ji}=\frac{1}{2}(\partial_i\Gamma_{j\gamma}^\eta+\partial_j\Gamma_{i\gamma}^\eta+\Gamma_{j\gamma}^\xi\Gamma_{i\xi}^\eta+\Gamma_{i\gamma}^\xi\Gamma_{j\xi}^\eta)\hat{g}_{\eta\alpha}z^\gamma\,.$$

Enfin la formule $\tilde{\Gamma}_{JK}^I=G^{IH}\tilde{\Gamma}_{H,JK}$ donne:

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{jk}=-\tilde{\gamma}^{l}_{jk}\Gamma^{\alpha}_{l\gamma}z^{\gamma}+\frac{1}{2}R^{\alpha}_{jk,\gamma}z^{\gamma}+(\partial_k\Gamma^{\alpha}_{j\gamma}+\Gamma^{\xi}_{j\gamma}\Gamma^{\alpha}_{k\xi})z^{\gamma}$$

$$\tilde{\Gamma}^{j}_{i\alpha}=\frac{1}{2}R^{\eta}_{jk,\gamma}g^{ik}\hat{g}_{\eta\alpha}z^{\gamma}$$

$$\tilde{\Gamma}^{i}_{\alpha\beta}=0$$

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=0$$

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta i}=\Gamma^{\alpha}_{i\beta}-\frac{1}{2}R^{\eta}_{ij,\gamma}\Gamma^{\alpha}_{k\delta}g^{jk}\cdot\hat{g}_{\eta\beta}z^{\gamma}z^{\delta}$$

$$\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}=\tilde{\gamma}^{i}_{jk}+\frac{1}{2}g^{il}(R^{\alpha}_{jl,\gamma}\Gamma^{\eta}_{k\delta}+R^{\alpha}_{kl,\gamma}\Gamma^{\eta}_{j\delta})\hat{g}_{\alpha\eta}z^{\gamma}z^{\delta}\,.$$

Les équations d'une courbe géodésique $(x^i(t),\ z^{\alpha}(t))$ sur la variété E s'écrivent:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^j}{dt}+2\tilde{\Gamma}^{i}_{j\alpha}\frac{dx^j}{dt}\frac{dz^{\alpha}}{dt}=0$$

$$\frac{d^2z^{\alpha}}{dt^2}+\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+2\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{j\beta}\frac{dx^j}{dt}\frac{dz^{\beta}}{dt}=0$$

ou encore en remplaçant les $\tilde{\Gamma}^{I}_{JK}$ par leurs valeurs:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\tilde{\gamma}^{jk}_{i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+g^{il}R^{\eta}_{jl,\gamma}z^{\gamma}\hat{g}_{\eta\alpha}\Big(\frac{dz^{\alpha}}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{k\delta}z^{\delta}\frac{dx^k}{dt}\Big)=0$$

$$\frac{D^2z^{\alpha}}{dt^2}-\Gamma^{\alpha}_{i\gamma}z^{\gamma}\Big(\frac{d^2x^i}{dt^2}+\tilde{\gamma}^{jk}_{i}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\Big)$$

$$-g^{il}\Gamma^{\alpha}_{l\delta}z^{\delta}R^{\eta}_{jl,\gamma}z^{\gamma}\hat{g}_{\eta\beta}\Big(\frac{dz^{\beta}}{dt}+\Gamma^{\beta}_{k\theta}z^{\theta}\frac{dx^k}{dt}\Big)=0\,.$$

Une courbe $(x^i(t),\ z^{\alpha}(t))$ sur la la variété E sera dite horizontale si les vecteurs tangents sont horizontaux; ce qui se traduit par:

$$\frac{dz^{\alpha}}{dt}+\Gamma^{\alpha}_{\gamma k}z^{\gamma}\frac{dx^k}{dt}=0\,.$$

THÉORÈME 1. *Pour que le relèvement d'une courbe dans M soit une géodésique horizontale, il faut et il suffit que cette courbe soit elle même une géodésique.*

DÉFINITION. *Un champ de vecteurs A sur la variété riemannienne (E, G) est un champ de Killing si $\theta_A G=0$.*

Soit $\hat{Z}\in E$ et Z^v son relèvement vertical. On a:

$$\theta_{Z^v}G(X^h, Y^h)=Z^v(g(X, Y)\circ p)-G([Z^v, X^h], Y^h)-G(X^h, [Z^v, Y^h])=0$$

car $[Y^h, Z^v]=(D_Y\hat{Z})^v$.

$$\theta_{Z^v}G(X^h, Y^v)=Z^v(G(X^h, Y^v))-G([Z^v, X^h], Y^v)-G(X^h, [Z^v, Y^v])$$

$$=G((D_X\hat{Z})^v, Y^v)=\hat{g}(D_X\hat{Z}, Y)\circ p\,.$$

$$\theta_{Z^v}G(X^v, Y^v)=Z^v(\hat{g}(\hat{X}, \hat{Y})\circ p)-G([Z^v, X^v], Y^v)-G(X^v, [Z^v, Y^v])=0$$

THÉORÈME 2. *Pour que le relèvement vertical d'une section $\hat{Z}$ de E soit un champ de Killing il faut et il suffit que cette section soit parallèle.*

De même, pour $Z\in\mathfrak{X}(M)$, on a:

$$\begin{aligned}\theta_{Z^h}G(X^h, Y^h)&=Z^h(G(X^h, Y^h))-G([Z^h, X^h], Y^h)-G(X^h, [Z^h, Y^h])\\&=Z^h(g(X, Y)\circ p)-G([Z, X]^h-\Omega(Z^h, X^h), Y^h)\\&\quad-G(X^h, [Z, Y]^h-\Omega(Z^h, Y^h))\\&=(Z\cdot g(X, Y))\circ p-g([Z, X], Y)\circ p-g(X, [Y, Z])\circ p\\&=\theta_Z g(X, Y)\circ p .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{Z^h}G(X^h, Y^v)&=Z^h\cdot(G(X^h, Y^v))-G([Z^h, X^h], Y^v)-G(X^h, [Z^h, Y^v])\\&=-G([Z, X]^h-\Omega(Z^h, X^h), Y^v)-G(X^h, (D_Z\hat{Y})^v)\\&=G(\Omega(Z^h, X^h), Y^v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_{Z^h}G(X^v, Y^v)&=Z^h\cdot(G(X^v, Y^v))-G([Z^h, Y^v], Y^v)-G(X^v, [Z^h, Y^v])\\&=(Z\cdot\hat{g}(\hat{X}, \hat{Y})-\hat{g}(D_Z\hat{X}, \hat{Y})-\hat{g}(\hat{X}, D_Z\hat{Y}))\circ p\\&=D_Z\hat{g}(\hat{X}, \hat{Y})\circ p=0 .\end{aligned}$$

THÉORÈME 3. *Pour que le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs sur M soit un champ de Killing, il faut et il suffit que ce champ soit lui-même un champ de Killing et que $i_{X^h}\Omega=0$.*

2. Relèvement d'une connexion. On suppose de nouveau que la base M soit munie d'une connexion c de coefficients γ^i_j. On sait déjà qu'il existe une connexion $\bar{C}$ sur le fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$ et que la dérivée covariante d'un champ vertical $B=B^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ par rapport à un champ $A=A^i\frac{\partial}{\partial x^i}+A^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$ est donné par:

$$\bar{D}_A B=\Big[A^i\Big(\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^i}\Big)+\Gamma^\alpha_i(\ , \bar{u}\circ B)+A^\beta\frac{\partial B^\alpha}{\partial z^\beta}\Big]\frac{\partial}{\partial z^\alpha} .$$

D'autre part, la restriction au fibré horizontal $(HE, \bar{\bar{p}}, E)$ du morphisme (p^T, p) de (TE, p_E, E) dans (TM, p_M, M) est un morphisme $(\bar{u}, p)$ tel que $\bar{u}$ soit un isomorphisme sur les fibres. Donc d'après la proposition 2 du chapitre II, c induit une connexion $\bar{\bar{C}}$ sur le fibré horizontal. Soit $B\in HE$:

$$B=B^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big) .$$

La formule (17) du chapitre II appliquée à $\bar{\bar{C}}$ donne:

$$\bar{\bar{D}}_A B=\Big[A^j\Big(\frac{\partial B^i}{\partial x^j}\Big)+\gamma^i_j(\ , \bar{u}\circ B)+A^\beta\frac{\partial B^i}{\partial z^\beta}\Big]\Big[\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^\alpha_i\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\Big]. \tag{7}$$

Ainsi d'après la proposition 4 du chopitre II, il existe une connexion $\tilde{C}$ sur le fibré (TE, p_E, E). Pour $B=B^i\frac{\partial}{\partial x^i}+B^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\beta}\in\mathcal{X}(E)$, on a:

$$\tilde{D}_A B=\Big[A^j\Big(\frac{\partial B^i}{\partial x^j}\Big)+\gamma^i_j(\ ,\bar{u}\circ B)+A^\beta\frac{\partial B^i}{\partial z^\beta}\Big]\frac{\partial}{\partial x^i}$$
$$+\Big[A^j\Big(\frac{\partial B^\alpha}{\partial x^j}+\Gamma^\alpha_j(\ ,\bar{u}\circ B)+\frac{\partial \Gamma^\alpha_i}{\partial x^j}B^i-\gamma^i_j(\ ,\bar{u}\circ B)\Gamma^\alpha_i(\ ,\bar{u}\circ B)$$
$$+A^\beta\Big(\frac{\partial B^\alpha}{\partial z^\beta}+\frac{\partial \Gamma^\alpha_i}{\partial z^\beta}B^i\Big)\Big]\frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{8}$$

THÉORÈME 4. *Si le fibré vectoriel (E, p, M) et sa base M sont munis des connexions C et c, alors il existe sur (TE, p_E, E) une connexion $\tilde{C}$ de même nature que C et c.*

On appellera $\tilde{C}$ le relèvement horizontal de c.

THÉORÈME 5. *Pour que la forme de courbure de $\tilde{C}$ soit nulle, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de celles de C et de c.*

Preuve. Il suffit d'appliquer les corollaires 9 et 6 du chapitre II à C, c et $\tilde{C}$.

Dans ce qui suit, pour pouvoir parler de connexions symétriques, on supposera C et c linéaires. Alors $\tilde{C}$ est aussi linéaire et ses coefficients sont donnés par:

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk}=\gamma^i_{jk},\quad \tilde{\Gamma}^i_{j\alpha}=0,\quad \tilde{\Gamma}^i_{j\alpha}=0,\quad \tilde{\Gamma}^i_{\alpha\beta}=0$$
$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{jk}=\Big(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{k\delta}}{\partial x^j}-\gamma^i_{jk}\Gamma^\alpha_{i\delta}+\Gamma^\alpha_{j\beta}\Gamma^\beta_{k\delta}\Big)z^\delta,\quad \tilde{\Gamma}^\alpha_{j\beta}=\Gamma^\alpha_{j\beta},\quad \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta j}=\Gamma^\alpha_{j\beta},\quad \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\delta}=0.$$

Soient $X\in\mathcal{X}(M)$ et $\hat{Y}\in\underline{E}$ et soient X^h et Y^v leurs relèvements horizontal et vertical. On a d'après (8):

$$\begin{aligned}&\tilde{D}_{X^h}Y^h=(\nabla_X Y)^h &&\tilde{D}_{X^h}Y^v=(D_X\hat{Y})^v\\ &\tilde{D}_{X^v}Y^h=0 &&\tilde{D}_{X^v}Y^v=0.\end{aligned}\tag{9}$$

COROLLAIRE 1. *Le relèvement horizontal d'une courbe autoparallèle est une courbe autoparallèle.*

Ceci découle de la relation $\tilde{D}_{X^h}Y^h=(\nabla_X Y)^h$.

D'autre part, les équations d'une courbe autoparallèle de $\tilde{C}$ sont:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0.$$
$$\frac{d^2z^\alpha}{dt^2}+\Big(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\delta k}}{\partial x^j}-\gamma^i_{kj}\Gamma^\alpha_{i\delta}+\Gamma^\alpha_{j\beta}\Gamma^\beta_{k\delta}\Big)z^\delta\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}+2\Gamma^\alpha_{j\beta}\frac{dx^j}{dt}\frac{dz^\beta}{dt}=0.$$

COROLLAIRE 2. *La projection d'une courbe autoparallèle de $\tilde{C}$ est une courbe autoparallèle de c.*

On déduit des formules (9):

$$\tilde{T}(X^h, Y^h)=(T(X, Y))^h+\Omega(X^h, Y^h)$$
$$\tilde{T}(X^h, Y^v)=0$$
$$\tilde{T}(X^v, Y^v)=0$$

où $\tilde{T}$ et T désignent les torsions de $\tilde{C}$ et de c.

THÉORÈME 6. *Pour que la connexion $\tilde{C}$ soit symétrique, il faut et il suffit qu'il en soit oinsi de c et que C soit à courbure nulle.*

Enfin, soient r, R et $\tilde{R}$ les courbures de c, C et $\tilde{C}$:

$$\tilde{R}(X^h, Y^h)(Z^h)=(r(X, Y)Z)^h+\tilde{D}_{\Omega(X^h, Y^h)}Z^h=(r(X, Y)Z)^h$$
$$\tilde{R}(X^h, Y^h)(Z^v)=(R(X, Y)\hat{Z})^v+\tilde{D}_{\Omega(X^h, Y^h)}Z^v=(R(X, Y)\hat{Z})^v$$
$$\tilde{R}(X^h, Y^v)(Z^h)=0\,, \quad \tilde{R}(X^h, Y^v)(Z^v)=0\,,$$
$$\tilde{R}(X^v, Y^v)(Z^h)=0\,, \quad \tilde{R}(X^v, Y^v)(Z^v)=0\,.$$

Ces formules fournissent une autre démonstration du théorème 5 dans le cas linéaire.

D'autre part. soit P la structure presque-produit associée à la connexion C. On a, d'après (9):

$$\tilde{D}^{ad}_{X^h}P(Y^h)=\tilde{D}_{X^h}(PY^h)-P(\tilde{D}_{X^h}Y^h)=\tilde{D}_{X^h}(-Y^h)+(\nabla_X Y)^h=0$$
$$\tilde{D}^{ad}_{X^h}P(Y^v)=0\,, \quad \tilde{D}^{ad}_{X^v}(Y^h)=0\,, \quad \tilde{D}^{ad}_{X^v}(Y^v)=0\,.$$

THÉORÈME 7. *La connexion $\tilde{C}$ est une connexion presque-produit.*

Enfin, si la courbure de C est nulle, les coefficients $\tilde{\Gamma}^I_{JK}$ de $\tilde{C}$ coïncident avec les $\tilde{\Gamma}^I_{JK}$ du paragraphe 1°). D'où:

THÉORÈME 8. *Si la connexion sur le fibré vectoriel E est sans courbure, le relèvement horizontal de la connexion riemannienne de g coïncide avec celle de G.*

3. Relèvement de quelques G-structures. On revient au cas où E est muni d'une connexion quelconque C. On remarque tout d'abord que tout endomorphisme h de E définit sur l'espace total E un champ de vecteurs verticaux de la façon suivante:

$$A(\hat{Z})=(\hat{Z}, h(\hat{Z}))\in E\underset{M}{\times}E\cong VE\,, \qquad \forall\hat{Z}\in E\,.$$

Si h a pour expression locale $h=h^\alpha_\beta E^\beta\otimes E_\alpha$, alors:

$$A=h^\alpha_\beta z^\beta\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\,. \tag{10}$$

En prenant pour h l'automorphisme identique de E, on retrouve le champ canonique $C=z^\alpha\dfrac{\partial}{\partial z^\alpha}$.

LEMME. *Soit (u, f) un morphisme de (E, p, M) dans (F, q, N) tel que la restriction de u aux fibres soit un isomorphisme. Alors tout endomorphisme h de (F, q, N) induit un endormorphisme $u^*(h)$ de (E, p, M) rendant le diagramme suivant commutatif·*

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "p"] & & F \arrow[dd, "q"] \\
E \arrow[ur, "u^*(h)"] \arrow[rr, dash] \arrow[dr] & & F \arrow[ur, "h"'] \arrow[dr] & \\
& M \arrow[rr, "f"] & & N
\end{tikzcd}$$

Preuve: $u^*(h)$ est défini par:

$$u^*(h)(\hat{Z})=(u_{|E_x})^{-1}\circ h\circ u(\hat{Z}), \qquad \forall\hat{Z}\in E$$

x étant l'origine du vecteur $\hat{Z}$.

Ainsi, d'après le lemme, tout endomorphisme h de (E, p, M) induit un endomorphisme $\bar{h}$ du fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$. On peut prolonger $\bar{h}$ en un endomorphisme h^v de (TE, p_E, E) de telle sorte que la restriction de h^v au fibré horizontal soit l'application identique. On appellera h^v le relèvement vertical de h. h^v a pour représentation matricielle,

$$h^v=\begin{bmatrix} \delta^i_j & 0 \\ h^\alpha_\beta\Gamma^\beta_j-\Gamma^\alpha_j & h^\alpha_\beta \end{bmatrix}.$$

Le relèvement vertical des endomorphismes de (E, p, M) possède les propriétés suivantes:

$$(h\circ g)^v=h^v\circ g^v, \qquad \forall h,\ g\in\operatorname{End} E$$

$$(11) \qquad (I_E)^v=I_{TE}$$

$$h^v(X^h)=X^h, \qquad h^v(Y^v)=(h\hat{Y})^v.$$

De même, soit F un endomorphisme de (TM, p, M) i.e. une 1-forme vectorielle sur M. Alors F induit un endomorphisme $\bar{\bar{F}}$ du fibré horizontal $(HE, \bar{\bar{p}}, E)$. On peut prolonger $\bar{\bar{F}}$ en un endomorphisme F^h de (TE, p_E, E) de telle sorte que la restriction de F^h au fibré vertical soit la transformation identique. Si $F=F^i_j dx^j\otimes\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, la matrice de F^h est:

$$\begin{bmatrix} F^i_j & 0 \\ \Gamma^\alpha_j-F^i_j\Gamma^\alpha_i & \delta^\alpha_\beta \end{bmatrix}.$$

On appellera F^h le *relèvement horizontal* de F. On vérifie facilement les propriétés suivantes du relèvement horizontal d'une 1-forme vectorielle:

$$(I_{TM})^h=I_{TE}$$

$$(F \circ G)^h = F^h \circ G^h, \qquad \forall F, G \in \operatorname{End}(TM) \tag{12}$$

$$F^h(X^h) = (FX)^h, \qquad F^h(Y^v) = Y^v$$

$$N_{F^h}(X^h, Y^h) = (N_F(X, Y))^h - \Omega(X^h, Y^h) - \Omega((FX)^h, (FY)^h)$$

$$+ \Omega((FX)^h, Y^h) + \Omega(X^h, (FY)^h)$$

$$N_{F^h}(X^h, Y^v) = 0, \qquad N_{F^h}(X^v, Y^v) = 0.$$

THÉORÈME 9. *Si la base M est muni d'une structure presque-produit ou d'une structure K telle que $K^3 = K$, il en est de même de la variété E.*

THÉORÈME 10. *Si la forme de courbure de la connexion C est nulle, chacune des structures citées plus haut est intégrable si et seulement si il en est ainsi de son relèvement horizontal.*

Remarque. Dans le cas où C est linéaire, il existe une connexion C^* sur le fibré dual (E^*, p^*, M) et tous les théorèmes démontrés dans ce paragraphe, lorsqu'on y remplace E par E^*, sont encore valables en vertu de la formule (30) du chapitre II.

4. Application au fibré tangent. Dans le cas du fibré tangent, il suffit de prendre $C = c$ et le théorème 4 permet d'obtenir une génération d'un résultat de K. Yano et S. Ishihara [cf. (21)], à savoir:

THÉORÈME 11. *Toute connexion c sur M induit sur la variété TM une connexion $\tilde{C}$ de même nature que c.*

On a vu que $\tilde{C}$ est une connexion presque-produit.
Soit θ la forme canonique sur TM.
On a:

$$\theta(X^h) = X^v, \qquad \theta(X^v) = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{13}$$

Il en résulte que:

$$\theta P = -\theta \quad \text{et} \quad P\theta = \theta$$

$$\theta P + P\theta = 0.$$

Les relations (9) et (13) impliquent:

$$\tilde{D}^{ad}_{X^h}\theta = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{D}^{ad}_{X^v}\theta = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{14}$$

Enfin, Dombrowski [3] a montré que l'existence d'une connexion sur M donne naissance sur TM à une structure presque-complexe F telle que:

$$F(X^h) = X^v \quad \text{et} \quad F(X^v) = -X^h. \tag{15}$$

On en déduit:

$$FP + PF = 0, \qquad F\theta + \theta F = -I$$

$$\tilde{D}^{ad}_{X^h}F = \tilde{D}^{ad}_{X^v}F = 0, \qquad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ainsi C possède la propriété importante suivante :

THÉORÈMÈ 12. *Le relèvement horizontal dans TM d'une connexion sur M est une connexion à la fois presque-produit, presque-tangente et presque-complexe.*

Comme conséquence directe du corollaire 1 de la proposition 2 du chapitre II, on a le :

THÉORÈME 13. *Toute connexion non-homogène sur le fibré vertical* ($VTM, \bar{p}, TM$) *se prolonge en une connexion de même nature sur la variété TM.*

DÉFINITION. *On appellera relèvement mixte d'un champ de vecteurs X sur M, le champ de vecteurs* $X^m = X^h + X^v$ *sur TM.*

Si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, on a :

$$X^m = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i - \gamma^i_j X^j) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Soit F une 1-forme vectorielle sur M. On peut définir son relèvement horizontal F^h et en même temps son relèvement vertical F^v. Alors non seulement les théorèmes 9 et 10 restent valables, mais on a aussi le :

THÉORÈME 14. *Si la variété M est muni d'une structure presque-produit ou d'une structure F telle que* $F^3 = F$, *alors la variété TM est munie, grâce au relèvement vertical, des mêmes structures.*

Si la connexion c est linéaire, on a :

$$N_{Fv}(X^h, Y^h) = -(F-I)^v(\Omega(X^h, Y^h))$$

$$N_{Fv}(X^h, Y^v) = ((I-F)(\nabla_X F(Y)))^v$$

$$N_{Fv}(X^v, Y^v) = 0.$$

THÉORÈME 15. *Si la connexion linéaire est sans courbure et que F est parallèle, alors les relèvements verticaux des structures citées ci-dessus sont intégrables.*

Enfin, F induit un endomorphisme $\bar{F}$ du fibré vertical et un endomorphisme $\bar{\bar{F}}$ du fibré horizontal.

DÉFINITION. On appellera *relèvement mixte* de F, la 1-forme vectorielle $F^m = \bar{F} \oplus \bar{\bar{F}}$.

Si l'on pose $F = F^j_i dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$, F^m a pour représentation matricielle :

$$F^m = \begin{bmatrix} F^i_j & 0 \\ F^i_k \gamma^k_j - \gamma^i_k F^k_j & F^i_j \end{bmatrix}.$$

Il en résulte que :

$$(F\circ G)^m=F^m\circ G^m\,,\qquad F^m(X^m)=(FX)^m\,,\qquad (\pm I_{TM})^m=\pm I_{TTM}$$
$$F^m(X^h)=(FX)^h\,,\qquad F^m(X^v)=(FX)^v\,.$$

THÉORÈME 16. *Si la variété M est munie d'une structure presque-complexe, d'une structure presque-produit, d'une structure presque-tangente, d'une structure F telle que $F^3\pm F=0$ ou, d'une façon générale, d'une structure définie par une équation polynomiale en F, il en est de même de la variété TM.*

Si de plus, la connexion c est linéaire:

$$N_{F^m}(X^h, Y^h)=(N_F(X, Y))^h-\Omega((FX)^h, (FY)^h)-(F^2)^v(\Omega(X^h, Y^h)) + F^v(\Omega((FX)^h, Y^h))+F^v(\Omega(X^h, [FY]^h))$$

$$N_{F^m}(X^h, Y^v)=(D_{FX}F(Y)-F(D_XF(Y)))^v$$

$$N_{F^m}(X^v, Y^v)=0\,.$$

THÉORÈME 17. *Si la connexion linéaire est sans courbure et que F est parallèle par rapport à la connexion induite sur $T^*M\otimes TM$, chacune des structures citées plus haut est intégrable si et seulement si il en est ainsi de son relèvement mixte.*

Remarque. Dans le cas d'une connexion linéaire, le relèvement mixte d'une 1-forme vectorielle n'est autre que le relèvement horizontal au sens de K. Yano et de S. Ishihara [21].

CHAPITRE V. Relèvement horizontal dans un fibré principal

1. Définitions. Soit (P, p, M, G) un fibré principal de groupe structural G et soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On désignera par R_a la translation à droite dans P définie par un élément a de G:

$$R_a: u \longrightarrow ua\,,\qquad \forall u\in P\,.$$

Soit $\mathcal{V}$ le $\mathcal{F}(P)$-module des champs de vecteurs verticaux sur P.

DÉFINITION. *Une connexion sur le fibré principal (P, p, M, G) est un tenseur Γ de type $\binom{1}{1}$ sur P tel que:*

1°) $\Gamma(\mathcal{X}(P))\subset\mathcal{V}$
2°) $\Gamma(A)=A,\ \ \forall A\in\mathcal{V}$
3°) $\Gamma\circ R_a^T=R_a^T\circ\Gamma,\ \ \forall a\in G.$

Autrement dit, une connexion sur (P, p, M, G) est une scission à gauche de la suite exacte suivante et qui satisfait à la condition d'équivariance 3°).

$$0\longrightarrow VP\longrightarrow TP\longrightarrow P\times_M TM\longrightarrow 0\,. \tag{1}$$

Cette définition est équivalente à la définition beien connue d'une connexion sur un fibré principal définie par une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural du fibré principal [14].

Soit $\mathcal{H}$ le $\mathcal{F}(P)$-module des champs horizontaux qui constituent le noyau de Γ. Comme Γ est un projecteur, en posant $\pi=2\Gamma-I$, on obtient une structure presque-produit sur l'espace total P. Soit $H=\frac{I-\pi}{2}$ le projecteur horizontal associé. La condition 3°) est équivalente au fait que la distribution horizontale: $u\to HP_u$ est invariante par G, i. e.:

$$R_a^T HP_u = HP_{ua}\,, \qquad \forall a\in G\,. \tag{2}$$

Chaque élément $\tilde{A}$ de $\mathfrak{g}$ définit un champ fondamental A^* sur P. Soit B un champ horizontal quelconque. Alors $[A^*, B]$ est horizontal car [13]

$$[A^*, B]=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[B-R_{a_t}^T(B)] \tag{3}$$

$a_t(t\in \boldsymbol{R})$ étant le groupe à un paramètre engendré par $\tilde{A}$.

Soit (f_Q, f_N, f_G) un morphisme d'un fibré principal (Q, q, N, G) dans un autre fibré principal (P, p, M, G) tel que $f_G: G\to G$ soit un automorphisme. On prendra, pour raison de commodité, f_G égal à la transformation identique de G. Alors $f_{Q|VQ}^T: VQ\to VP$ est un morphisme de fibrés vectoriels qui est un isomorphisme sur les fibres.

PROPOSITION 1. *Soit (f_G, f_N, f_G) un morphisme d'un fibré principal (Q, q, N, G) dans un autre fibré principal (P, p, M, G) tel que f_G soit l'homomorphisme identique de G. Alors toute connexion sur (P, p, M, G) induit une connexion sur (Q, q, N, G).*

Preuve· On a le diagramme commutatif suivant où les lignes sont des suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & VQ & \longrightarrow & TQ & \longrightarrow & Q\times_N TN & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_{Q|VQ}^T} & & \downarrow{\scriptstyle f_Q^T} & & \downarrow{\scriptstyle f_Q\times f_N^T} & & \\
0 & \longrightarrow & VP & \longmapsto & TP & \longrightarrow & P\times_M TM & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Une connexion Γ étant donnée sur (P, p, M, G), on définit une connexion $\tilde{\Gamma}$ sur (Q, q, N, G) par:

$$\tilde{\Gamma}(A)=(f_{Q|VQ}^T)^{-1}\circ\Gamma\circ f_Q^T(A)\,, \qquad \forall A\in TQ\,. \tag{4}$$

Comme par définition, $f_Q\circ R_a=R_a\circ f_Q$, on a aussi:

$$\tilde{\Gamma}\circ R_a^T=R_a^T\circ\tilde{\Gamma}\,.$$

Ainsi $\tilde{\Gamma}$ et Γ sont f_Q-compatibles.

Soit maintenant F un espace vectoriel réel de dimension finie et soit ρ une représentation de G dans F. Enfin, soit (E, p', M) le fibré vectoriel de fibre type F associé à un fibré principal (P, p, M, G) et soit q la projection canonique de

$P\times F$ sur $E=P\times_G F$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} P\times F \arrow[r, "q"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p'"] \\ P \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd} .$$

L'application linéaire tangente q^T induit une application surjective $\bar{q}^T$ de $VP\times TF$ sur VE et une application surjective $\bar{\bar{q}}^T$ de $(P\underset{M}{\times}TM)\times TF$ sur $E\underset{M}{\times}TM$ et $(\bar{q}^T, q^T, \bar{\bar{q}}^T)$ est un morphisme des deux suites exactes suivantes:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & VP\times TF \arrow[r] \arrow[d, "\bar{q}^T"] & TP\times TF \arrow[r] \arrow[d, "q^T"] & (P\underset{M}{\times}TM)\times TF \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\bar{q}}^T"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & VE \arrow[r] & TE \arrow[r] & E\underset{M}{\times}TM \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2. *Soit (E, p', M) le fibré vectoriel de fibre type F associé à un fibré priucipal (P, p, M, G). Alors toute connexion Γ sur (P, p, M, G) induit une connexion linéaire Γ' sur (E, p', M).*

En effet, la connexion Γ' est telle que:

$$\Gamma'\circ q^T=\bar{\bar{q}}^T\cdot(\Gamma\times id_{TF}) . \tag{5}$$

De plus, on a:

$$\Gamma'\circ h_t^T=h_t^T\circ\Gamma' , \qquad \forall t\in \boldsymbol{R}_+^*$$

car q est en fait un morphisme de fibrés vectoriels.

2. Equations de structure. Soit maintenant (P, G, p, M) un fibré principal muni d'une connexion Γ. Alors l'image réciproque $Q=P\underset{M}{\times}P$ de P par p est munie d'une connexion $\tilde{\Gamma}$ d'après la proposition 1. Chaque élément de $T(P\underset{M}{\times}P)$ est de la forme (A, B) où A et B sont des élémments de TP tels que $p^TA=p^TB$. Le vecteur (A, B) est horizontal par rapport à $\tilde{\Gamma}$ si et seulement si il en est ainsi de B par rapport à Γ.

D'autre part, si l'on considère le fibré vectoriel de fibre type $\mathfrak{g}$ associé à Q, on a un morphisme de fibrés vectoriels:

$$\begin{aligned} Q\times_G \mathfrak{g} &\longrightarrow VP \\ \overline{(u, ua, \tilde{A})} &\longrightarrow S_u^T(Ad(a)\tilde{A}) \end{aligned} \tag{6}$$

où $\overline{(u, ua, \tilde{A})}$ désigne la classe d'équivalence définie par $(u, ua, \tilde{A})$ et S_u est l'application de G dans P qui envoie a en ua. Il est facile de vérifier que ce morphisme est bien défini et qu'en fait c'est un isomorphisme.

Ainsi en vertu de la proposition 2, on a:

THÉORÈME 1. *Toute connexion Γ sur un fibré principal (P, p, M, G) induit une connexion linéaire $\bar{\Gamma}$ sur le fibré vertical $(VP, \bar{p}, P)$.*

Soit Φ une q-forme sur la variété P à valeurs dans le fibré vertical $(VP, \bar{p}, P)$. La différentielle absolue de Φ est par définition la $q+1$-forme $\nabla\Phi = d\Phi \circ H$ où $d\Phi$ est la différentielle extérieure de Φ par rapport à $\bar{\Gamma}$. $\nabla\Phi$ est une forme semi-basique.

DÉFINITION. *On appellera forme de courbure de la connexion Γ, la 2-forme $\Omega = \nabla\Gamma$.*

THÉORÈME 2. *(Equation de structure) $\Omega = -N_\Gamma$.*

Preuve· La démonstration se fait comme dans le cas des fibrés vectoriels.

COROLLAIRE 1. $\Omega \circ R_a^T = R_a^T \circ \Omega$, $\forall a \in G$.

COROLLAIRE 2. *La structure presque-produit π est intégrable si et seulement si $\Omega = 0$.*

En effet: $N_\pi = 4N_\Gamma$.

COROLLAIRE 3. *Soient Ω et $\tilde{\Omega}$ les formes de courbure des connexions Γ et $\tilde{\Gamma}$ de la proposition 1. Alors Ω et $\tilde{\Omega}$ sont f_a-compatibles.*

D'autre part, la restriction de (p^T, p) au fibré horizontal $(HP, \bar{\bar{p}}, P)$ est un morphisme de $(HP, \bar{\bar{p}}, P)$ sur (TM, p_M, M) qui est un isomorphisme sur les fibres. Par conséquent, à chaque section X de (TM, p_M, M) correspond une section X^h de $(HP, \bar{\bar{p}}, P)$ appelé relèvement horizontal de X.

COROLLAIRE 4. $[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - \Omega(X^h, Y^h)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Soient $\hat{\omega}$ et $\hat{\Omega}$ les formes de connexion et de courbure de Γ. Ce sont les formes à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

THÉORÈME 3. *On a*

(7) $$\hat{\Omega} = \hat{\omega} \circ \Omega .$$

Preuve Si l'un des champs de vecteurs A et B est vertical, alors $\hat{\Omega}(A, B) = \hat{\omega}(\Omega(A, B)) = 0$. Si A et B sont horizontaux, $\hat{\Omega}((A, B) = -\hat{\omega}([A, B]) = -\hat{\omega}(\Gamma[A, B])$ et $\Omega(A, B) = -\Gamma[A, B]$; d'où l'égalité.

COROLLAIRE 5. $\hat{\Omega} = 0 \Leftrightarrow \Omega = 0$.

Dans un sens, c'est trivial. On suppose donc $\hat{\Omega} = 0$. Il suffit de considérer la valeur de $\Omega(A, B)$ pour A, B horizontaux. Or d'après (7), $\Omega(A, B)$ est horizontal; d'ailleurs $\Omega(A, B) = -\Gamma[A, B]$; d'où $\Omega(A, B) = 0$.

LEMME 1. *Soit A^* le champ fondamental engendré par un élément $\tilde{A} \in \mathfrak{g}$ et B un vecteur horizontal. Alors $A^{*T}(B)$ est horizontal sur VP.*

On sait que l'espace horizontal en un point $\overline{(u, ua, \tilde{A})}$ de $Q\times_G \mathfrak{g}=VP$ est l'image de l'espace horizontal au point (u, ua) de Q par l'application $\varphi_{\tilde{A}}: Q\to VP$ qui à (u, ua) fait correspondre $\overline{(u, ua, \tilde{A})}$. Soit δ l'application de P dans $P\underset{M}{\times}P$ definie par $\delta(u)=(u, u)$. Il résulte de (6) que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} & VP \\ P\underset{M}{\times}P \arrow[ur, "\varphi_{\tilde{A}}"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & P \arrow[u, "A^{*T}"'] \arrow[l, shift right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Par suite, $A^{*T}(B)=\varphi_{\tilde{A}}^T(B, B)$. Comme (B, B) est horizontal, it en est de même de $A^{*T}(B)$.

LEMME 2. *Soient A un champ vertical et B un champ horizontal. Alors:*

$$\bar{D}_B A=\Gamma[B, A]\,. \tag{8}$$

On peut écrire: $A=\sum f_i A_i^*$ où f_i sont des fonctions différentiables et A_i^* des champs fondamentaux sur l'espace total P; d'où $\bar{D}_B A(u)=\sum(Bf_i)(u)A_i^*(u)+\sum f_i(u)\bar{D}_B A_i^*(u)=\sum(Bf_i)(u)A_i^*(u)$ d'après le lemme 1.

D'autre part,

$$\Gamma[B, \sum f_i A_i^*](u)=\sum(Bf_i)(u)A_i^*(u)+\Gamma(\sum f_i[B, A_i^*](u))=\sum(Bf_i)(u)A_i^*(u)$$

en vertu de (3).

LEMME 3. *A_* et B^* étant deux champs fondamentaux engendrés par $A, B\in\mathfrak{g}$, on a*

$$\bar{D}_{B^*}A^*=[B^*, A^*]\,. \tag{9}$$

On a encore $A^{*T}(B_u^*)=\varphi_{\tilde{A}}^T(B_u^*, B_u^*)=\varphi_{\tilde{A}}^T(B_u^*, 0)+\varphi_{\tilde{A}}^T(0, B_u^*)$. Comme $(B_u^*, 0)$ est un vecteur horizontal sur $P\underset{M}{\times}P$, et que $\bar{p}\circ\varphi_{\tilde{A}}=p_1$, $\varphi_{\tilde{A}}^T(0, B_u^*)$ est la partie verticale de $A^{*T}(B_u^*)$. Soit $\exp t\tilde{B}$ le sousgroupe à un paramètre engendré par $\tilde{B}$. On a: $\varphi_{\tilde{A}}(u, u\exp t\tilde{B})=\overline{(u, u\exp t\tilde{B}, \tilde{A})}=S_u^T(Ad(\exp t\tilde{B})\cdot\tilde{A})=S_u^T(\exp t\,ad(\tilde{B})\cdot\tilde{A})$. Si l'on identifie comme d'habitude VVP avec $VP\underset{P}{\times}VP$, la partie verticale de $A^{*T}(B_u)$ est le vecteur $(A_u^*, [B^*, A^*]_u)$; d'où le résultat.

THÉORÈME 4. *Soit Φ une q-forme semi-basique sur P à valeurs dans le fibré vertical $(VP, \bar{p}, P)$, alors:*

$$\nabla\Phi=-[\Gamma, \Phi]\,. \tag{10}$$

Preuve: La démonstration se fait encore, grâce au lemme 2, exactement comme dans le cas des fibrés vectoriels.

COROLLAIRE 6. (*Identité de Bianchi*) $\nabla\Omega=0$.

COROLLAIRE 7. *Quelle que soit la forme semi-basique Φ sur P à valeurs dans le fibré vertical, on a*:

$$\nabla^2\Phi=[\Omega, \Phi]. \tag{11}$$

On considère de nouveau le fibré vectoriel (E, p', M) de fibre-type F associé à (P, p, G, M). Soit $v\in F$ et $\varphi_v: P\to E$ définie par $\varphi_v(u)=(\widetilde{u, v})$, $\forall u\in P$. Alors il existe entre la connexion Γ et la connexion Γ' sur (E, p', M) la relation suivante:

$$\varphi_v^T\circ\Gamma=\Gamma'\circ\varphi_v^T$$

d'où

$$\varphi_v^T\circ\Omega=\Omega'\circ\varphi_v^T .$$

Ainsi la forme de courbure de Γ détermine la forme de courbure de la connexion induite sur le fibré vectoriel associé.

En particulier, si l'on prend $F=\mathfrak{g}$, on a un morphisme canonique $(\bar{u}, p)$ de $(VP, \bar{p}, P)$ sur $(P[\mathfrak{g}], p', M)$. En effet, $P\times\mathfrak{g}$ est isomorphe à VP par l'isomorphisme $(u, \tilde{A})\to S_u^T\tilde{A}=A$. En composant l'inverse de cet isomorphisme avec la projection canonique de $P\times\mathfrak{g}$ sur $P[\mathfrak{g}]=P\times_G\mathfrak{g}$, on obtient le morphisme en question. Comme à R_a^TA correspond l'élément $(ua, Ad(a^{-1})\tilde{A})$ de $P\times\mathfrak{g}$, on voit que:

$$\bar{u}\circ R_a^T=\bar{u} . \tag{12}$$

PROPOSITION 3. *Il y a une correspondance biunivoque entre les formes semi-basiques équivariantes sur P à valeurs dans le fibré vertical et les formes sur M à valeurs dans le fibré $(P[\mathfrak{g}], p', M)$.*

Preuve Soit Φ une q-forme semi-basique et équivariante sur P à valeurs dans le fibré vertical. On définit une q-forme Φ' sur M à valeurs dans $(P[\mathfrak{g}], p', M)$ de la façon suivante. Soient $X_1, \cdots, X_q\in T_xM$ et $A_1, \cdots, A_q\in T_uP$ tels que $p^TA_i=X_i$. Alors:

$$\Phi'(X_1, \cdots, X_q)=\bar{u}(\Phi(A_1, \cdots, A_q)) .$$

Moyennant (12), il est facile de vérifier que Φ' ne dépend ni de u, ni des A_i tels que $p^TA_i=X_i$. Réciproquement, à chaque forme Φ' sur M à valeurs dans $(P[\mathfrak{g}], p', M)$ correspond une forme semi-basique équivariante Φ sur P à valeurs dans le fibré vertical car $(\bar{u}, p)$ est en fait un isomorphisme sur les fibres.

DÉFINITION. *On dira que Φ' est l'image de Φ et que Φ est l'image réciproque de Φ' par le morphisme canonique $(\bar{u}, p)$.*

3. Relèvement horizontal dans un fibré principal. La restriction de (p^T, p) au fibré principal $(HP, \bar{\bar{p}}, P)$ étant un isomorphisme sur les fibres, on peut définir, comme cela a été fait pour les fibrés vectoriels, le relèvement horizontal F^h d'une une forme vectorielle F sur M. F^h possède les propriétés suivantes:

$$F^h(X^h)=(FX)^h\,, \qquad F^h(A^*)=A^*$$

$$(F\circ G)^h=F^h\circ G^h\,, \qquad (I_{TM})^h=I_{TP}\,.$$

THÉORÈME 5. *Si la base M d'un fibré principal (P, p, M, G) est munie d'une structure presque-produit ou d'une structure K telle que $K^3=K$, il existe nne structure de même nature sur l'espace total P.*

THÉORÈME 6. *Si la forme de courbure de la connexion Γ est nulle, chacune des structures citées plus haut est intégrable si et seulement si il en est ainsi de son relèvement horizontal.*

Enfin, si l'on suppose de plus que la base M soit munie d'une connexion linéaire γ, d'après la proposition 2 du chapitre II, il existe une connexion linéaire $\bar{\bar{\Gamma}}$ sur le fibré horizontal $(HP, \bar{\bar{p}}, P)$ et en vertu de la proposition 4 du même chapitre, on a le:

THÉORÈME 7. *S'il existe une connexion sur le fibré principal (P, p, M, G) et une connexion linéaire sur sa base M, alors la variété P est munie d'une connexion linéaire.*

COROLLAIRE 8. *Dans la situation du Théorème 7, le relèvement horizontal d'une courbe autoparallèle dans M est une courbe autoparallèle dans P.*

Preuve Appliquer la formule (18) du chapitre II aux champs de vecteurs sur M et à leurs relèvements horizontaux.

4. Cas du fibré des repères. Soit M une variété différentiable de dimension m et soit $\mathcal{R}$ son fibré des repères. On posera $G=Gl(m, \boldsymbol{R})$ et on désignera encore par $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit U le domaine d'une carte locale de M muni de coordonnées locales x^i $(i, j=1, \cdots, m)$. Soit $u=(X_1, \cdots, X_m)=\left(a_1^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \cdots, a_m^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$ un élément de $\mathcal{R}$ ayant son origine dans U. On prendra (x^i, a_j^i) et $(x^i, y^i=dx^i)$ comme coordonnées locales dans $\mathcal{R}$ et TM.

Soit R_b la translation à droite dans $\mathcal{R}$ définie par un élément b de G. Si $u=(x^i, a_j^i)$, $b=(b_j^i)$, alors $R_bu=(x^i, a_k^ib_j^k)$.

Soit Γ une connexion sur $\mathcal{R}$. Elle est définie par une 1-forme vectorielle ayant pour expression locale:

$$\Gamma=(\Gamma_{hk}^i a_j^k dx^h+da_j^i)\otimes\frac{\partial}{\partial a_j^i} \tag{13}$$

où les Γ_{hk}^i vérifient une relation analogue à la relation (14) du chapitre II.

Γ induit une connexion linéaire sur M et on a:

$$\Gamma'=(\Gamma_{jk}^i y^k dx^j+dy^i)\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}\,. \tag{14}$$

On en déduit:

$$D'_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\,.$$

Le théorème 7 appliqué au fibré des repères donne :

THÉORÈME 8. *L'existence d'une connexion sur le fibré des repères $\mathcal{R}$ entraîne celle d'une connexion linéaire sur le fibré tangent $T\mathcal{R}$.*

D'autre part, soit (e^i_j) la base canonique de $gl(m, \boldsymbol{R})$ et soient E^i_j les sections correspondantes de $\mathcal{R}[\mathfrak{g}]$ définies audessus d'un ouvert U de M au moyen d'une carte vectorielle dont le domaine est U. D'après la proposition 3, l'image de la forme de courbure Ω d'une connexion Γ sur $\mathcal{R}$ par le morphisme canonique $(\bar{u}, p)$ est une forme Φ' ayant pour expression locale :

$$\Phi' = -\frac{1}{2} R^k_{ij,l} dx^i \wedge dx^j \otimes E^l_k$$

où

$$R^k_{ij,l} = \partial_i \Gamma^k_{jl} - \partial_j \Gamma^k_{il} + \Gamma^h_{jl} \Gamma^k_{ih} - \Gamma^h_{il} \Gamma^k_{jh} .$$

Comme $\mathcal{R}[g]$ est isomorphe à $T^*M \otimes TM$, on voit que Φ' n'est autre que la courbure de la connexion Γ' sur le fibré tangent (TM, p_M, M).

THÉORÈME 9. *L'image, par le morphisme canonique $(\bar{u}, p)$, de la forme de courbure d'une connexion sur le fibré des repères d'une variété est la courbure de la connexion induite sur le fibré tangent.*

Soit $\tilde{C} = (c^i_j)$ un élément de $\mathfrak{g}$ et soit C^* le champ fondamental engendré par $\tilde{C}$:

$$C^* = a^i_j c^j_k \frac{\partial}{\partial a^i_k} .$$

D'autre part, chaque élément $\xi = \xi^i e_i$ de $\boldsymbol{R}^m$ détermine un champ horizontal $B(\xi)$ sur $\mathcal{R}$ appelé champ basique. $B(\xi)$ est définie par la formule :

$$p^T(B(\xi)_u) = u(\xi)$$

où p est la projection de $\mathcal{R}$ sur M et u est considéré comme un isomorphisme de $\boldsymbol{R}^m$ sur $T_{p(u)}M$. On a :

$$B(\xi) = a^i_k \xi^k \Big(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^j_{il} a^l_h \frac{\partial}{\partial a^j_h} \Big).$$

DÉFINITION. On appellera *forme canonique* sur $\mathcal{R}$, le morphisme θ de $T\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R} \times_M TM$ défini par :

$$\theta(A) = (p_{\mathcal{R}}(A), p^T(A)) , \qquad \forall A \in T\mathcal{R}$$

$p_{\mathcal{R}}$ étant la projection de $T\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}$. θ est une 1-forme semi-basique sur $\mathcal{R}$ à valeurs dans le fibré vectoriel $\mathcal{R} \times_M TM$.

On prendra (x^i, a^i_j, y^i) comme coordonnées locales dans $\mathcal{R} \times_M TM$. Alors θ a pour expression locale :

$$\theta = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

La connexion Γ' induit une connexion $\bar{\bar{\Gamma}}$ sur $\mathcal{R}\underset{M}{\times}TM$. Si $\hat{Z}=\hat{Z}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ est une section de $\mathcal{R}\underset{M}{\times}TM$ et $A=A^i\frac{\partial}{\partial x^i}+A^j_k\frac{\partial}{\partial a^j_k}$ est un champ de vecteurs sur $\mathcal{R}$, on a:

$$\bar{\bar{D}}_A\hat{Z}=\left(A^j\frac{\partial \hat{Z}^i}{\partial x^j}+A^j_k\frac{\partial \hat{Z}^i}{\partial a^j_k}+\Gamma^i_{jl}A^j\hat{Z}^l\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

DEFINITION. On appellera *forme de torsion* de Γ, la 2-forme $\mathcal{T}=\bar{\bar{d}}\theta$.

LEMME. a) $\bar{\bar{D}}_C\,(\theta(B(\xi)))=\theta(B(\tilde{C}(\xi)))$

b) $\bar{\bar{D}}_{B(\xi)}(\theta(B(\xi')))=0.$

Preuve: La démonstration se fait, par exemple en utilisant les coordonnées locales.

THÉORÈME 10. *$\mathcal{T}$ a pour expression locale*

$$\mathcal{T}=\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj})dx^j\wedge dx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Preuve: Il suffit de faire agir $\mathcal{T}$ sur des champs fondamentaux et basiques et d'appliquer le lemme.

Soit (q, p) le morphisme canonique de $(\mathcal{R}\underset{\mathcal{R}}{\times}TM, p'', \mathcal{R})$ sur (TM, p_M, M). On a la proposition suivante, analoque à la proposition 3.

PROPOSITION. *Il y a une correspondance biunivoque entre les formes semi-basiques Φ sur $\mathcal{R}$ à valeurs dans le fibré vectoriel $(\mathcal{R}\underset{\mathcal{R}}{\times}TM, p'', \mathcal{R})$ et qui vérifie $\Phi\circ R^T_a=\Phi$ et les formes vectorielles Φ sur M.*

On dira encore que Φ' est l'image de Φ par le morphisme (q, p).

THÉORÈME 11. *L'mage de $\mathcal{T}$ par le morphisme (q, p) est la torsion T de la connexion sur le fibré tangent.*

THÉORÈME 12. (1ere *identité de Bianchi*): $\bar{\bar{d}}\mathcal{T}(A, B, C)=\sum\bar{\bar{R}}(A, B)(\theta(C))$ *où $\bar{\bar{R}}$ est la courbure de $\bar{\bar{\Gamma}}$ et A, B, C des champs de vecteurs sur $\mathcal{R}$.*

CHAPITRE VI. Fibré tangents d'ordre superieur

1. Fibré tangent d'ordre r. Soit M une variété différentiable de dimension m et soit un entier $r\geqq 1$. Pour tout $x\in M$, soit T^r_xM l'espace des vecteurs d'ordre r tangents à M. Soit U un ouvert de M muni de coordonnées locales (x^i). Chaque élément $\hat{Y}\in T^rU=\bigcup_{x\in U}T^r_xM$ est de la forme [1]:

$$\hat{Y}=y^{i_1}(\hat{Y})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}+y^{i_1i_2}(\hat{Y})\frac{\partial^2}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}}+\cdots+y^{i_1\cdots i_r}(\hat{Y})\frac{\partial^r}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_r}}$$

où $1\leqq i_1\leqq i_2\leqq\cdots\leqq i_r\leqq m$. Il est facile de vérifier que $T^rM=\bigcup_{x\in M}T^r_xM$ est un fibré vectoriel, appelé fibré tangent d'ordre r et dont la dimension est :

$$n=m+\frac{m(m+1)}{2!}+\cdots+\frac{m(m+1)\cdots(m+r-1)}{r!}.$$

Soit p^r la projection de T^rM sur sa base M.

Pour tout entier $q<r$, T^qM est un sous-fibré vectoriel de T^rM et on désignera par j_r^q l'injection canonique de T^qM dans T^rM et par j^r l'injection canonique $j_r^{r-1}\circ j_{r-1}^{r-2}\circ\cdots\circ j_2^1$ de $T^1M=TM$ dans T^rM.

On prendra $(x^i, y^{i_1}, \cdots, y^{i_1\cdots i_r})$ comme coordonnées locales dans l'ouvert $(p^r)^{-1}(U)$ de T^rM. Enfin, on adoptera la convention suivante :

$$i_I, i_J, \cdots=\{i_1\cdots i_j, \text{ pour } 1\leqq j\leqq r \text{ et } 1\leqq i_1\leqq\cdots\leqq i_j\leqq m\}.$$

Chaque élément $\hat{Y}$ de T^rU peut encore se mettre sous la forme :

$$\hat{Y}=y^{i_1}(\hat{Y})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}+\frac{1}{2!}y^{i_1i_2}(\hat{Y})\frac{\partial^2}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}}+\cdots+\frac{1}{r!}y^{i_1\ldots i_r}(\hat{Y})\frac{\partial^h}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_r}}$$

où les $y^{i_1\cdots i_j}$ sont symétriques par rapport aux indices $i_1, i_2, \cdots, i_j$. Soit U' un autre ouvert de M muni de coordonnées locales $(x^{i'})$ et tel qne $U\cap U'\neq\emptyset$. Les fonctions de transitions dans T^rM sont données par la matrice :

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & * & *\cdots\cdots * & \\ & \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & *\cdots\cdots * & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}\cdots\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} & \end{bmatrix}$$

où les $*$ sont des fonctions qui contiennent des dérivées partielles des $x^{i'}$ par rapport aux x^i jusqu'à l'ordre r au plus.

Soit S^rTM le produit symétrique de TM par lui-même r fois et soit π^r l'application de T^rM dans S^rTM définie par :

$$\pi^r\left(y^{i_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}+\cdots+\frac{1}{r!}y^{i_1\ldots i_r}\frac{\partial^h}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_r}}\right)=y^{i_1\ldots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}.$$

On voit d'après (1) que π^r ne dépend pas de coordonnées locales. C'est un morphisme surjectif de T^rM sur S^rTM dont le noyau n'est autre que $T^{r-1}M$. D'où la suite exacte :

$$(2)\qquad 0\longrightarrow T^{r-1}M\xrightarrow{j_{r-1}^r}T^rM\xrightarrow{\pi^r}S^rTM\longrightarrow 0.$$

Soit maintenant f une application différentiable de M dans une autre variété N. On obtient un morphisme $T^r(f)$ de T^rM dans T^rN en yosant :

$$T^r(f)(\hat{X})=\hat{X}\circ f^*, \qquad \forall\hat{X}\in T^rM$$

$T^r(f)$ est la différentielle d'ordre r de f.

Soit g une application différentable de N dans une variété P. Alors:

$$T^r(g\circ f)=T^r(g)\circ T^r(f) \tag{3}$$
$$T^r(id_M)=id_{T^rM}\,.$$

2. Relèvement vertical dans T^rM. Soit $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ un champ de vecteurs sur M. Alors $j^r\circ X$ est une section de T^rM; on peut donc définir le relèvement vertical X^v de $j^r\circ X$ [cf. n°6, chapitre II). X^v sera appelé relèvement vertical de X et a pour expression locale $X^v=X^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}$. On obtient ainsi un homomorphisme du $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(M)$ dans le $\mathcal{F}(M)$-module $\mathcal{X}(T^rM)$. De même $(p^r)^*$ est un homomorphisme du $\mathcal{F}(M)$-module des formes scalaires sur M dans le $\mathcal{F}(M)$-module des formes scalaires sur la variété T^rM. En faisant le produit tensoriel de ces deux homomorphismes autant de fois qu'on le désire, on obtient un homomorphisme du $\mathcal{F}(M)$-module des tenseurs sur M dans le $\mathcal{F}(M)$-module des tenseurs sur T^rM et l'image T^v d'un tenseur T sur M par ce dernier homomorphisme sera appelé le relèvement vertical de T.

Si S et S' sont deux tenseurs sur M, on a:

$$(S\otimes S')^v=S^v\otimes S'^v\,.$$

Par exemple, si $G=G_{ij}dx^i\otimes dx^j$ est un tenseur deux fois covariant, son relèvement vertical peut être représenté par la matrice:

$$G^v=\begin{bmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De même, si $F=F_i^j\,dx^i\otimes\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ est une 1-forme vectorielle:

$$F^v=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_i^j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Forme canonique sur T^rM.

DÉFINITION. *On appellera forme canonique sur la variété T^rM la 1-forme vectorielle θ^r à valeurs dans le fibré vertical VT^rM définie par·*

$$\theta^r(A)=(j^r\circ(p^r)^T(A))^v_{\bar{x}}\,,\qquad \forall A\in T_{\bar{x}}T^rM\,.$$

PROPOSITION 1. *La torsion de Nijenhuis de θ^r est nulle, i. e.:*

$$[\theta^r(A),\theta^r(B)]=\theta^r[\theta^r(A),B]+\theta^r[A,\theta^r(B)] \tag{4}$$

quels que soient les champs de vecteurs A et B sur T^rM.

Preuve· Utiliser par exmaple les coordonnées locales.

Le même procédé permettra de démontrer les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 2. *Soit C^r le champ canonique sur T^rM. Alors:*

$$\theta_{C^r}(\theta^r) = -\theta^r .$$

PROPOSITION 3. *Soit f une application différentiable d'une variété M dans une autre variété N. Alors les formes canoniques θ_M^r et θ_N^r sur T^rM et T^rN soit $T^r(f)$-compatibles, i. e.:*

$$(T^r(f))^T \circ \theta_M^r = \theta_N^r \circ (T^r(f))^T .$$

PROPOSITION 4. *Soit un entier $q<r$. On a la diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} TT^qM & \xrightarrow{\theta^q} & VT^qM \\ \downarrow (j_r^q)^T & & \downarrow (j_r^q)^T|_{VT^qM} \\ TT^rM & \xrightarrow{\theta^r} & VT^rM \end{array} .$$

Prevue: Le résultat s'obtient en remarquant que j_r^q est un morphisme de fibrés vectoriels.

4. Connexion d'ordre supérieur.

DÉFINITION. *On appellera connexion d'ordre r sur une variété différentiable M toute connexion sur le fibré vectoriel (T^rM, p^r, M).*

Soit Γ^r une telle connexion sur M. Elle est déterminée par une 1-forme vectorielle de la forme:

(5) $$\Gamma^r = (dy^{iI} + \Gamma_j^{iI} dx^j) \otimes \frac{\partial}{\partial x^{iI}}$$

Soient X^h et X^v les relèvements horizontal et vertical d'un champ de vecteurs X sur M. On donnera le nom de relèvement mixte de X au champ de vecteurs $X^m = X^h + X^v$.

$$X^m = X^i\Big(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^i} - \Gamma_i^{iI}\frac{\partial}{\partial y^{iI}}\Big)$$

DÉFINITION. *La forme de torsion $\mathfrak{T}^r$ de Γ^r est la différentielle absolue de la forme canonique θ^r prise par rapport à la connexion de Berwald induite par Γ^r sur le fibré vertical VT^rM. On a, d'après le théorème 7 du chapitre II*

(6) $$\mathfrak{T}^r = \frac{1}{2}(\partial_{j'}\Gamma_k^{iI} - \partial_{k'}\Gamma_j^{iI})dx^j \wedge dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial y^{iI}}$$

où on a posé $\dfrac{\partial}{\partial y^j} = \partial_{j'}$.

Si Γ^r est linéaire, on appellera torsion T^r de Γ^r la différentielle extérieure de j^r:

$$T^r(X, Y) = D_X^r(j^r \circ Y) - D_Y^r(j^r \circ X) - j \circ [X, Y] , \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

D^r étant la loi de dérivation associée à Γ^r.

(7) $$T^r=\frac{1}{2}(\Gamma^{iI}_{jk}-\Gamma^{iI}_{kj})dx^j\wedge dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial y^{iI}}.$$

Comme dans le cas du fibré tangent d'ordre 1, on a le

THÉORÈME 1. *Sur toute variété différentiable, il existe une connexion linéaire d'ordre r sans torsion.*

Preuve: Soient Γ^r une connexion linéaire quelconque sur M et T^r sa torsion. On définit une loi de dérivatiou D'^r dans le module des sections de (T^rM, p^r, M) par:

$$D'^r_X=D^r_X-\frac{1}{2}\iota_X T^r, \qquad \forall X\in\mathscr{X}(M)$$

et on vérifie facilement que la connexion Γ'^r ainsi obtenue est sans torsion.

Si l'on se donne une métrique riemannienne g^r sur le fibré tangent T^rM, alors chaque fibré tangent T^iM ($i=1, 2, \cdots, r-1$) est muni d'une métrique riemannienne et pour $i=2, \cdots, r$, les suites exactes (2) sont scindées. D'autre part, la connexion riemannienne de g^1 induit une connexion linéaire sur S^iTM ($i=2, \cdots, r$) et comme $T^2M\cong TM\oplus S^2TM$, on obtient, d'après la proposition 4 du chapitre II, une connexion d'ordre 2 sur M. Il est clair que cette dernière connexion est sans torion. De proche en proche, on trouve le:

THÉORÈME 2. *Toute métrique riemannienne sur le fibré tangent d'ordre r d'une variété induit une connexion linéaire d'ordre r et sans torsion sur cette variété.*

Appliquant alors la hroposition 1 du chapitre III, on obtient le:

THÉORÈME 3. *Toute métrique riemannienne sur le fibré tangent d'ordre r d'une variété M induit une métrique riemannienne sur la variété T^hM.*

Par ailleurs, on sait qu'il existe une correspondance biunivoque entre connexions et semi-sprays définis sur le fibré tangent TM. On verra, dans ce qui suit, que la notion de spray s'applique encore aux prolongements du fibré tangent.

5. Spray d'ordre supérieur. Jusqu'à la fin du chapitre, pour simplifier les notations, on désignera par T le fibré tangent de la variété M, par (J^kT, p^k, M) le fibré vectoriel des jets d'ordre k des sections du fibré tangent. Soit ρ^k la projection canonique de J^kT sur T; on a la suite exacte:

$$0\longrightarrow (J^kT)^0\longrightarrow J^kT\xrightarrow{\rho^k} T\longrightarrow 0.$$

Soit U un ouvert de M muni de coordonnées locales (x^i) et soit $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ un champ de vecteurs sur U. Soit $\hat{Z}=j^k_xX$ pour $x\in U$. On posera:

$$y^i_{i_1\cdots i_j}(\hat{Z})=y^i_{i_J}(\hat{Z})=\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_j}X^i}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_j}},$$

où $\imath_J=\{i_1\cdots i_j,\ 0\leqq i_1,\cdots,\imath_j\leqq m$ et $\imath_1+\cdots+\imath_j\leqq k\}$ et on prendra $(x^\imath, y^i_J)$ comme coordonnées locales dans l'ouvert $(p^k)^{-1}(U)$.

Soit X un champ de vecteurs sur M. Alors $j^kX: x\to j^k_xX$ est une section de (J^kT, p^k, M) et on peut donc, d'après le n°6 du chapitre II, définir le relèvement vertical X^{v_k} de j^kX. On appellera X^{v_k} le relèvement vertical de X sur la variété J^kT et on a encore:

$$[X^{v_k}, Y^{v_k}]=0\,, \qquad \forall X, Y\in\mathfrak{X}(M)\,.$$

Soit $(J^kT)_0$ l'ensemble des vecteurs non nuls de J^kT.

DÉFINITIONS. *Une forme scalaire ω sur $(J^kT)_0$ sera dite homogène de degré l si:*

$$\theta_{C^k}\omega=l\omega$$

où C^k est le champ cadonique sur J^kT.

Une forme vectorielle L sur $(J^kT)_0$ sera dite homogène de degré l si

$$\theta_{C^k}L=(l-1)L\,.$$

Par suite, si un champ de vecteurs $A=A^\imath\dfrac{\partial}{\partial x^\imath}+A^{\imath J}\dfrac{\partial}{\partial y^{\imath J}}$ est homogène de degré l, ses composantes $A^\imath$ sont des fonctions homogènes de degré l tandis que ses composantes $A^{\imath J}$ sont des fonctions homogènes de degré $l-1$ en $y^{\imath J}$.

DÉFINITION. *Un semi-spray d'ordre $k+1$ sur une variété M est un champ de vecteurs S^{k+1} sur J^kT de classe C^0 sur $(J^kT)_0$ et tel que $(p^k)^T\circ S^{k+1}=\rho^k$.*

Un spray d'ordre $k+1$ est un semi-spray d'ordre $k+1$ homogène de degré 2 et qui est de classe C^1 sur la section uulle de J^kT.

Un spray quadratique d'ordre $k+1$ est un semi-spray d'ordre $k+1$ homogène de degré 2 et qui est de classe C^2 sur la section uulle de J^kT.

Un semi-spray a pour expression locale:

$$S^{k+1}=y^\imath\frac{\partial}{\partial x^\imath}+S^{\imath J}\frac{\partial}{\partial y^{\imath J}}\,.$$

THÉORÈME 4. *A chaque connexion Γ^{k+1} sur (J^kT, p^k, M) est canoniquement associé un semi-spray S^{k+1} d'ordre $k+1$ sur M qui est un spray (resp. spray quadratique) si et seulement si Γ^k est homogène (resp. linéaire).*

Preuve Soit S'^{k+1} un semi-spray d'ordre $k+1$ sur M et soit $S^{k+1}=S'^{k+1}-\Gamma^{k+1}(S'^{k+1})$. S^{k+1} ne dépend pas de S'^{k+1}. En effet, soit S''^{k+1} un autre semi-spray d'ordre $k+1$ sur M. Comme $S'^{k+1}-S''^{k+1}$ est un champ vertical, $\Gamma^{k+1}(S'^{k+1}-S''^{k+1})=S'^{k+1}-S''^{k+1}$ et le résultat s'ensuit.

D'autre part, $(p^k)^T\circ S^{k+1}=(p^k)^T\circ S'^{k+1}-(p^k)^T\circ\Gamma^{k+1}\circ S'^{k+1}=(p^k)^T\circ S'^{k+1}=\rho^k$. Donc S^{k+1} est un semi-spray sur J^kT.

Si Γ^{k+1} a pour expression locale:

$$\Gamma^{k+1}=(dy^{\imath J}+\Gamma^{\imath J}_j dx^j)\otimes\frac{\partial}{\partial y^{\imath}_J}$$

celle de S^{k+1} sera :

$$S^{k+1} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^{iJ}_j y^j \frac{\partial}{\partial y^{iJ}}.$$

Bibliographie

[1] AMBROSE, W., PALAIS, R. S. AND SINGER, I. M., Sprays. Ann. Acad. Bras. Sci, **32** (1960), pp. 163–178.

[2] BERNARD, D., Sur la géométrie différentielle des G-structures. Ann. Inst. Fourier-Grenoble (1960), pp. 151–270.

[3] DOMBROWSKI, P., On the geometry of tangent bundles. J. Reine Angew. Math., **210** (1962), pp. 73–88.

[4] DUC, T. V., Connexions et structures particulières sur les fibrés vectoriels. C. R. A. S. Sér. A, **270** (1970), pp. 661–664.

[5] DUC, T. V., Connexions, structures particulières et équations de structure sur les fibrés vectoriels. C. R. A. S. Sér. A, **276** (1973), pp. 543–546.

[6] DUC, T V., Relèvement horizontal dans un fibré principal. C. R. A. S. Sér., A, **276** (1973), pp. 633–636.

[7] HUSEMOLLER, Fibre bundles. Mac Graw—Hill Book Company (1966).

[8] FRÖLICHER, A. AND NIJENHUIS, A., Theory of vector differential forms. Part I, Proc. Kon. Ned. Akad. A, **59** (1956), pp. 338–359.

[9] FRÖLICHER, A. AND NIJENHUIS, A., Invariance of vector form operations under mapping. Comm. Math. Helv., **34** (1960), pp. 227–248.

[10] KLEIN, J., Espaces variationnels et mécanique. Thèse Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **13** (1962), pp. 1–124.

[11] KLEIN, J., Sur les systèmes dynamiques abstraits. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **13** (1963), fasc. 2, pp. 191–202.

[12] KLEIN, J. ET VOUTIER, A., Formes extérieures génératrices de sprays. Ann. Inst. Fourier—Grenoble, **18** (1968), fasc. 2, pp. 241–260.

[13] KOBAYASHI, S. AND NOMIZU, K., Fondations of differential geometry. Vol. I and II, Interscience (1963 et 1969).

[14] KOSZUL, J. L., Lectures on fibre bundle and differential geometry. Tata Inst. Fund. Res. Bombay (1960).

[15] LEMANN, J. ET LEJEUNE, J., Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent. Ann. Inst. Fourier Grenoble, **16** (1966), fasc. 2, pp. 329–387.

[16] LICHNEROWICZ, A., Théorie globable des connexions et des groupes d'holonomie. Ed. Cremonese, Rome (1955).

[17] SASAKI, S., On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tôhoku Math. J., **10** (1958), pp. 338–345.

[18] VILMS, J., Connections on tangent bundle. J. Diff. Geom., **1** (1967), pp. 235–243.

[19] VILMS, J., Curvature of non-linear connections. Proc. Amer. Math. Soc., **19** (1968), pp. 1125–1129.

[20] YANO, K., On a structure defined by a tensor field of type $\binom{1}{1}$ satisfying $f^3+f=0$. Tensor, **14** (1963), pp. 99–109.

[21] YANO, K. AND ISHIHARA, S., Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles. J. Math. Mech., **16** (1967), pp. 1015–1029.