N. TODA
KŌDAI MATH. SEM. REP
26 (1975), 294—303

SUR QUELQUES COMBINAISONS LINÉAIRES EXCEPTIONNELLES AU SENS DE NEVANLINNA, III

dédié à Monsieur le Professeur Yûsaku Komatu, à l'occasion de son soixantième anniversaire

PAR NOBUSHIGE TODA

1. Introduction. Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ $(n \geqq 1)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$ et $X=\{F\}$ un ensemble de combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions entières $f_0, \cdots, f_n$ et linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$. Alors, combien de combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna y-a-t-il dans X ? On a prouvé que s'il y a $n+1$ combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X, il y a au plus $n+\lambda+1$ combinaisons exceptionnelles au sens de Nevanlinna dans X, où λ est le nombre maximum de relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ ([8]). Dans ce mémoire, on améliore ce résultat en considérant un résultat de Dufresnoy et un de Gol'dberg et Tushkanov ([3]). Et puis, on considère sur le cas où il y a au plus n combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X.

On utilise les symboles usuels de la théorie de Nevanlinna des fonctions méromorphes ([4]).

2. Préliminaires. Soient $f=(f_0, \cdots, f_n)$ un système transcendant dans le plan $|z|<\infty$, c'est-à-dire, les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ sont entières sans zéros communs à toutes et

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty,$$

où $T(r, f)$ est la fonction caractéristique de f définie par Cartan ([1]):

$$T(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(re^{i\theta})|\,d\theta - \max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(0)|$$

On dit qu'une combinaison linéaire homogène à coefficients constants:

$$F=a_0f_0+a_1f_1+\cdots+a_nf_n \qquad (\not\equiv 0)$$

Received Nov. 5, 1973.

est

1) lacunaire si F n'admet pas de zéro dans $|z|<\infty$;

2) exceptionnelle au sens de Picard si F n'admet qu'un nombre fini de zéros dans $|z|<\infty$ au plus ;

3) exceptionnelle au sens de Nevanlinna si

$$\delta(F)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, 0, F)}{T(r, f)}>0 ;$$

4) exceptionnelle au sens de α-Nevanlinna si

$$\delta_\alpha(F)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N_\alpha(r, 0, F)}{T_\alpha(r, f)}>0 ,$$

où α est admissible pour f et $T_\alpha(r, f)=\int_1^r T(t, f)/t^{1+\alpha}dt$ etc. (voir [7]).

On note que 1)$\Rightarrow$2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$4).

LEMME 1. *Soient X et λ comme dans l'introduction, alors quand $\lambda=0$, on a*

$$\sum_{F\in X}\delta_\alpha(F)\leqq n+1$$

(voir [1], [7]).

LEMME 2. *Soient $\phi_1, \cdots, \phi_\nu$ ν fonctions méromorphes dans $|z|<\infty$ vérifiant une relation linéaire à coefficients constants*

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_i\phi_i=0$$

et satisfaisant, en outre, aux conditions suivantes:

1) *Aucun des rapports ϕ_i/ϕ_j $(i\neq j)$ n'est constant;*

2) *$N(r, 0, \phi_i)=o(T(r))$ et $N(r, \phi_i)=o(T(r))$ $(r\to\infty$; $i=1, \cdots, \nu)$ $T(r)$ étant le plus petit des nombres $T(r, \phi_i/\phi_j)$ $(i\neq j)$.*

Dans des hypothèses,

$$c_i=0 \qquad (i=1, \cdots, \nu)$$

(Nevanlinna [4], p. 117).

LEMME 3. *Soient $g_1, \cdots, g_\nu$ ν fonctions méromorphes dans $|z|<\infty$ telles que*

1) *pour $i\neq j$ quelconque*

$$0<\limsup_{r\to\infty}\frac{T_\alpha(r, g_i/g_j)}{T_\alpha(r, f)}<\infty ;$$

2) *pour tout i*

$$N_\alpha(r, 0, g_i)=o(T_\alpha(r, f)) \quad et \quad N_\alpha(r, g_i)=o(T_\alpha(r, f)) \quad (r\to\infty) .$$

Si, pour des constantes c_i $(i=1, \cdots, \nu)$,

$$\sum_{i=1}^{\nu} c_i g_i=0 ,$$

on a

$$c_1=c_2=\cdots=c_\nu=0$$

(Lemme 5 [7]).

3. Quelques d'autres lemmes. Soient f, X et λ comme dans l'introduction, λ_p le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients appartenant à C_p et linéairement indépendantes sur C_p entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ et $F_0, \cdots, F_n$, $n+1$ combinaisons dans X. On peut prendre $n+1-\lambda$ combinaisons (soient $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$) dans $\{F_i\}_{i=0}^n$ qui forment une base de X sur C et $n+1-\lambda_p$ combinaisons (soient $K_0, \cdots, K_{n-\lambda_p}$) dans $\{k_j\}_{j=0}^{n-\lambda}$ qui forment une base de X sur C_p où C (resp. C_p) est l'ensemble des nombres complexes (resp. des fonctions rationnelles). Dans cette situation,

LEMME 4. *Soient* $k=(k_0, \cdots, k_{n-\lambda})$ *et*

$$T(r, K)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\max_{0\leqq j\leqq n-\lambda_p}\log|K_j(re^{i\theta})|\,d\theta\,,$$

alors on a

$$T(r, k)\sim T(r, K)\,.$$

(Ici, $A(r)\sim B(r)$ veut dire que $\lim A(r)/B(r)=1$.)

Démonstration. La relotion $\{k_0, \cdots, k_{n-\lambda}\}\supset\{K_0, \cdots, K_{n-\lambda_p}\}$ entraîne que

$$T(r, K)\leqq T(r, k)+O(1)\,.$$

D'autre part, $K_0, \cdots, K_{n-\lambda_p}$ étant une base de X sur C_p, $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ sont représentées par $K_0, \cdots, K_{n-\lambda_p}$ à coefficients appartenant à C_p:

$$k_i=\sum_{j=0}^{n-\lambda_p}\alpha_{ij}K_j \qquad (i=0, \cdots, n-\lambda)\,.$$

par conséquent, on a

$$\max_{0\leqq i\leqq n-\lambda}\log|k_i|\leqq\max_{0\leqq j\leqq n-\lambda_p}\log|K_j|+\sum_{j=0}^{n-\lambda_p}\sum_{i=0}^{n-\lambda}\log^+|\alpha_{ij}|,$$

de sorte que l'on a

$$T(r, k)\leqq T(r, K)+O(\log r)$$

pour tout $r>0$ parce que α_{ij} sont rationnels. f étant transcendant et

$$T(r, f)\sim T(r, k)\,,$$

on a le résultat.

LEMME 5. *Soit F une combinaison dans X telle que $\delta_\alpha(F)>0$. Si $\delta_\alpha(k_i)=1$ $(i=0, \cdots, n-\lambda)$, quand on représente F par $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$, au moins un coefficient est égal à zéro.*

Démonstration. Si tous les coefficients sont différents de zéro, $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$, F sont linéairement indépendantes $n+1-\lambda$ à $n+1-\lambda$ et de plus $T(r, f)\sim T(r, k)$.

Par conséquent, on a du lemme 1,

$$\sum_{i=0}^{n-\lambda} \delta_\alpha(k_i)+\delta_\alpha(F)\leqq n+1-\lambda .$$

Cela veut dire que $\delta_\alpha(F)=0$, qui est contraire à l'hypothèse. C'est-à-dire, au moins un coefficient est égal à zéro.

LEMME 6. *Quand $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ sont exceptionnelles au sens de Picard, pour chaque i $(=0, 1, \cdots, n-\lambda)$, il existe une et une seule combinaison $K_{j(i)}$ $(0\leqq j(i) \leqq n-\lambda_p)$ telle que le rapport $k_i/K_{j(i)}$ est rationnel.* (Dans ce cas, on dit que k_i appartient à la classe $\{j(i)\}$.)

Démonstration. Pour chaque i, k_i est représentée par $K_0, \cdots, K_{n-\lambda_p}$ à coefficients rationnels:

$$k_i=\sum_{j=0}^{n-\lambda_p} \alpha_{ij} K_j .$$

Maintenant, tous les rapports K_ν/K_μ $(\nu\neq\mu)$ sont transcendants et

$$N(r, 0, K_j)=O(\log r) \qquad (r\to\infty,\ j=0, \cdots, n-\lambda_p),$$

$$N(r, 0, k_i)=O(\log r) \qquad (r\to\infty,\ i=0, n-\lambda);$$

par conséquent, d'après le lemme 2, il y a une et une seule combinaison $K_{j(i)}$ telle que $k_i/K_{j(i)}$ appartient à C_p.

LEMME 7. *Soit F une combinaison dans X telle que $\delta_\alpha(F)>0$. Si $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ sont exceptionnelles au sens de Picard, quand on représente F par $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$, il existe au moins une classe (soit $\{j_0\}$) dans les classes $\{0\}, \cdots, \{n-\lambda_p\}$ telle que tous les coefficients des éléments appartenant à la classe $\{j_0\}$ sont égals à zéro* (voir [8]).

Démonstration. Soit

$$F=a_0k_0+a_1k_1+ \cdots +a_{n-\lambda}k_{n-\lambda} . \tag{1}$$

S'il existe au moins un coefficient $a_{\nu_j}\neq 0$ tel que k_{ν_j} appartient à la classe $\{j\}$ $(j=0, \cdots, n-\lambda_p)$ à (1), soient $L(j)$ le nombre de tels coefficients et

$$L=L(0)+L(1)+ \cdots +L(n-\lambda_p) \qquad (\leqq n+1-\lambda) .$$

Alors, d'après les lemmes 1, 4 et 6, on a

$$\delta_\alpha(F)+\sum_{a_j\neq 0} \delta_\alpha(k_j)\leqq L ,$$

de sorte que $\delta_\alpha(F)=0$ parce que $\delta_\alpha(k_j)=1$. Mais, c'est contraire â l'hypothèse $\delta_\alpha(F)>0$. Cela veut dire que la conclusion de ce lemme est vraie.

4. Théorème de Dufresnoy. Dans ce paragraphe, on améliore le théorème 16 dans [2] en considérant la combinaison excptionnelle au sens de α-Nevanlinna.

THÉORÈME 1. *Soient* $f=(f_0, \cdots, f_n)$ *un système transcendant dans le plan* $|z|<\infty$, $X=\{F\}$ *un ensemble de combinaisons linéaires, homogènes à coefficients constants des fonctions* $f_0, \cdots, f_n$ *et linéairement indépendantes* $n+1$ *à* $n+1$ *et* λ *le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions* $f_0, \cdots, f_n$. *S'il y a* $n+1-\lambda$ *combinaisons lacunaires (soient* $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$*) dans* X *qui forment une base de* X *sur* C *et s'il y a en outre* μ *combinaisons lacunaires et* ν *combinaisons exceptionnelles au sens de* α*-Nevanlinna sans être lacunaire dans* X, *on a*

$$(\mu-\lambda)(n-\lambda)\leqq(\lambda-\nu).$$

Démonstration. Soient $G_1, \cdots, G_\mu$ μ combinaisons lacunaires dans X différentes de $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ et $H_1, \cdots, H_\nu$ ν combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna sans être lacunaires dans X. Représentons $G_1, \cdots, G_\mu$ et $H_1, \cdots, H_\nu$ par rapport aux $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$ à coefficients constants:

$$G_j=\sum_{i=0}^{n-\lambda} a_{ij}F_i \qquad (j=1, \cdots, \mu) \tag{2}$$

$$H_k=\sum_{i=0}^{n-\lambda} b_{ik}F_i \qquad (k=1, \cdots, \nu). \tag{3}$$

Alors, d'après le lemme 2, pour chaque j, il y a un et un seul coefficient différent de zéro à (2) et d'après le lemme 5, pour chaque k, il existe au moins un coefficient qui est égal à zéro à (3). Par conséquent, il y a au total au mains

$$(n-\lambda)\mu+\nu$$

coefficients qui sont nuls à (2) et (3).

Maintenant, le nombre maximum de relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$ est λ et celui entre $n+1$ combinaisons quelconque dans X est aussi λ. En conséquence, il faut que

$$\frac{(n-\lambda)\mu+\nu}{n+1-\lambda}\leqq\lambda. \tag{4}$$

En effet, si le contraire est vrai, il y a une dans $\{F_i\}_{i=0}^{n-\lambda}$ (soit F_0) et $\lambda+1$ combinaisons dans $\{G_j\}_{j=1}^{\mu}\cup\{H_k\}_{k=1}^{\nu}$ (soient $I_1, \cdots, I_{\lambda+1}$) telles que les coefficients de F_0 pour $I_1, \cdots, I_{\lambda+1}$ sont nuls. Cela veut dire qu'il y a au moins $\lambda+1$ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre $F_1, \cdots, F_{n-\lambda}$, $I_1, \cdots, I_{\lambda+1}$. Contradiction.

De (4), on a

$$(\mu-\lambda)(n-\lambda)\leqq(\lambda-\nu).$$

COROLLAIRE 1. *S'il y a* $n+1+\mu$ $(\mu\geqq0)$ *combinaisons lacunaires dans* X *et*

ν *d'autre combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna, on a*

$$\mu \leqq \frac{(\lambda-\nu)}{(n-\lambda)} .$$

En effet, de $n+1$ combinaisons quelconque dans X, on peut prendre $n+1-\lambda$ combinaisons qui forment une base de X sur C; par conséquent, dans ce cas il y a $n+1-\lambda$ combinaisons lacunaires qui forment une base de X sur C et on obtient ce résultat du théorème 1 tout de suite.

5. Théorème de Gol'dberg-Tushkanov. Il y a quelques ans, Gol'dberg et Tushkanov ([3]) a prouvé:

"*Le nombre de combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X est au plus égal à $n+1+\lambda/(n-\lambda_p)$.*"

Dans ce paragraphe, on améliore ce résultat comme dans le théorème 1.

THÉORÈME 2. *Soient f, X et λ comme dans le théorème* 1 *et λ_p le nombre maximum de relations linéaires, homogènes à coefficients dans C_p et linéairement indépendantes sur C_p entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$. S'il y a $n+1-\lambda$ combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X (soient $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$) qui forment une base de X sur C et s'il y a en outre μ combinaisons exceptionnelles au sens de Picard et ν combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna sans être exceptionnelle au sens de Picard, on a*

$$(\mu-\lambda)(n-\lambda_p) \leqq (\lambda-\nu) .$$

Démonstration. Soient $G_1, \cdots, G_\mu$ μ combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X différentes de $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ et $H_1, \cdots, H_\nu$ ν combinaisons dans X différentes de $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}, G_1, \cdots, G_\mu$ telles que $\delta_\alpha(H_m)>0$ $(m=1, \cdots, \nu)$. Représentons $G_1, \cdots, G_\mu$ et $H_1, \cdots, H_\nu$ par rapport aux $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ à coefficients constants:

$$G_j = \sum_{i=0}^{n-\lambda} \alpha_{ij} k_j \qquad (j=1, \cdots, \mu) \tag{5}$$

$$H_m = \sum_{i=0}^{n-\lambda} \beta_{im} k_i \qquad (m=1, \cdots, \nu) . \tag{6}$$

Classifiont $k_0, \cdots, k_{n-\lambda}$ comme dans le lemme 6. Alors, il y a $n+1-\lambda_p$ classes: $\{0\}, \cdots, \{n-\lambda_p\}$.

Or, d'après le lemme 2, pour chaque j, tous les coefficients sauf des coefficients de quelques k_i appartenant à une seule classe sont égals à zéro à (5), et à (6) grâce au lemme 7, pour chaque m, il existe au moins une classe (soit $\{j(m)\}$) telle que tous les coefficients des éléments appartenant à la classe $\{j(m)\}$ sont égals à zéro. Par conséquent, à (5) et (6), au total il y a au moins

$$(n-\lambda_p)\mu+\nu$$

classes telles que tous les coefficients des éléments appartenant à ces classes sont nuls. Maintenant, les α_{ij} et β_{im} sont des constantes, de sorte que comme dans la démonstration du théorème 1, il faut que

$$\frac{(n-\lambda_p)\mu+\nu}{n+1-\lambda_p}\leqq\lambda .$$

C'est-à-dire, on a

$$(\mu-\lambda)(n-\lambda_p)\leqq(\lambda-\nu) .$$

COROLLAIRE 2. *S'il y a $n+1+\mu$ ($\mu\geqq 0$) combinaisons exceptionnelles au sens de Picard dans X et ν d'autre combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna dans X, on a*

$$\mu\leqq\frac{(\lambda-\nu)}{(n-\lambda_p)} .$$

N. B. Soient f, X et λ comme dans le théorème 1 et λ_α le nombre maximum de relations linéaires homogènes à coefficients méromorphes contenus dans $C_\alpha(f)$ et linéairement indépendantes sur $C_\alpha(f)$ entre les fonctions $f_0, \cdots, f_n$, où

$$C_\alpha(f)=\{a(z)\,;\ \text{méromorphe dans } |z|<\infty \text{ et } T_\alpha(r, a)$$
$$=o(T_\alpha(r, f)) \quad (r\to\infty)\} .$$

Alors, en préparant quelques lemmes comme les lemmes 4, 6 et 7, qui sont démontrés en utilisant le lemme 3 (voir la démonstration du théorème 1 dans [8]), on peut prouver le fait suivant:

"*S'il y a $n+1-\lambda$ combinaisons dans X (soient $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}$) telles que $\delta_\alpha(F_i)=1$ ($i=0, \cdots, n-\lambda$) qui forment une base de X sur C et s'il y a en outre μ combinaisons $G_1, \cdots, G_\mu$ telles que $\delta_\alpha(G_j)=1$ ($j=1, \cdots, \mu$) et ν combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna différentes de $F_0, \cdots, F_{n-\lambda}, G_1, \cdots, G_\mu$ dans X, on a*

$$(\mu-\lambda)(n-\lambda_\alpha)\leqq(\lambda-\nu) .\text{"}$$

Comme corollaire, on obtient

"*S'il y a $n+1+\mu$ ($\mu\geqq 0$) combinaisons F_i ($i=1, \cdots, n+1+\mu$) dans X telles que $\delta_\alpha(F_i)=1$ et ν combinaisons exceptionnelles au sens de α-Nevanlinna différentes de $F_1, \cdots, F_{n+1+\mu}$ dans X, on a*

$$\mu\leqq\frac{(\lambda-\nu)}{(n-\lambda_\alpha)} .\text{"}$$

C'est une amélioration du théorème 1 dans [8].

6. Conjecture de Cartan. Soient f, X et λ comme dans l'introduction, alors il y a longtemps Cartan [1] a conjecturé que

$$\sum_{F\in X}\delta(F)\leqq n+\lambda+1 . \tag{7}$$

Il a démontré l'inégalité (7) quand $\lambda=0$ et $\lambda=n-1$. Mais, jusqu'à maintenant, on ne sait pas si l'inégalité (7) est vraie en general. Dans ce paragraphe, on démontre l'inégalité (7) dans quelques cas speciaux (voir aussi [6]).

THÉORÈME 3. *Soient f, X et λ comme dans le théorème* 1. *S'il y a $n-\lambda$ combinaisons (soient $F_1, \cdots, F_{n-\lambda}$) linéairement indépendantes sur C telles que $\delta(F_i)=1$ $(i=1, \cdots, n-\lambda)$ dans X, alors pour q combinaisons quelconque $G_1, \cdots, G_q$ dans X et $r>0$*

$$(q-n-\lambda-1)T(r, f)<\sum_{i=1}^{q} N_{n-\lambda}(r, 0, G_i)+S(r, f)$$

où $S(r, f)=o(T(r, f))$ $(r\to\infty$ sauf dans un ensemble de r de mesure linéaire finie) et on utilise $N_{n-\lambda}(r, 0, G_i)$ au lieu de $N_{n-\lambda}(r, G_i)$ utilisé dans [1].

Démonstration. Soit F_0 une combinaison dans X telle que le wronskian de $F_0, F_1, \cdots, F_{n-\lambda}$:

$$\|F_0, F_1, \cdots, F_{n-\lambda}\|\not\equiv 0\,.$$

Alors, tous les éléments dans X sont représentés par $F_0, F_1, \cdots, F_{n-\lambda}$ à coefficients constants. Dans ce cas, il y a au plus λ combinaisons dont le coefficient de F_0 est nul sauf $F_1, \cdots, F_{n-\lambda}$. Soient $H_1, \cdots, H_k$ $(0\leqq k\leqq\lambda)$ telles combinaisons dans $\{G_i\}_{i=1}^{q}$. Si G appartient à $X'=\{G_i\}_{i=1}^{q}-\{H_j\}_{j=1}^{k}-\{F_m\}_{m=1}^{n-\lambda}$, alors

$$\|G, F_1, \cdots, F_{n-\lambda}\|\not\equiv 0\,.$$

En modifiant la démonstration du théorème fondamental de Cartan ([1], p. 12-p. 15) comme dans le cas du théorème 2 ([5], p. 299), on a

$$(q-n-k-1)T(r, f)<\sum_{G\in X'} N_{n-\lambda}(r, 0, G)+\lambda\sum_{i=1}^{n-\lambda} N(r, 0, F_i)+\tilde{S}(r, f)\,.$$

Comme $N(r, 0, F_i)=o(T(r, f))$ $(r\to\infty,\ i=1, \cdots, n-\lambda)$ par l'hypothèse et $\tilde{S}(r, f)=o(T(r, f))$ $(r\to\infty$ sauf dans un ensemble de r de mesure linéaire finie), en mettant

$$S(r, f)=\lambda\sum_{i=1}^{n-\lambda} N(r, 0, F_i)+\tilde{S}(r, f)$$

et en ajoutant

$$\sum_{j=1}^{n-k} N_{n-\lambda}(r, 0, H_j) \qquad (\geqq 0)$$

au coté droit, on a le résultat.

COROLLAIRE 3. *S'il y a $n-1$ combinaisons lacunaires $\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$ dans X (ou telles que $\delta(F_i)=1$, $i=1, \cdots, n-1$, quand $\lambda\geqq 2$) on a le même résultat.*

Démonstration. Comme il y a au plus λ relations linéaires, homogènes indépendantes à coefficients constants entre les $F_1, \cdots, F_{n-1}$, il y a au moins $n-\lambda-1$ combinaisons linéairement indépendantes sur C dans $\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$.

1) Quand il y a au moins $n-\lambda$ combinaisons linéairement indépendantes

sur C dans $\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$, il n'y a rien à prouver d'après le théorème 3.

2) Quand il y a $n-\lambda-1$ combinaisons linéairement indépendantes sur C dans $\{F_i\}_{i=1}^{n-1}$, on peut supposer que $F_1, \cdots, F_{n-\lambda-1}$ sont telles combinaisons. Alors, les λ combinaisons $F_{n-\lambda}, \cdots, F_{n-1}$ sont représentées par $F_1, \cdots, F_{n-\lambda-1}$ à coefficients constants. Soient K_1 et K_2 deux combinaisons quelconque dans X différentes de F_i $(i=1, \cdots, n-1)$, alors

$$\|K_1, K_2, F_1, \cdots, F_{n-\lambda-1}\| \not\equiv 0 .$$

En effet, si le contraire est vrai, il y a au moins $\lambda+1$ relations linéaires homogènes indépendantes à coefficients constants entre $K_1, K_2, F_1, \cdots, F_{n-1}$, qui est absurde.

Soit $\{\tilde{G}_i\}_{i=1}^{q-k}=\{G_i\}_{i=1}^{q}-\{F_{n-\lambda}, \cdots, F_{n-1}\}$ $(0\leqq k\leqq\lambda)$. Prendrons $n+1$ combinaisons $H_1, \cdots, H_{n+1}$ quelconque de $\{\tilde{G}_i\}_{i=1}^{q-k}$, où on peut supposer que $H_1, \cdots, H_{n+1-\lambda}$ forment une base de X sur C telles que

$$\{F_i\}_{i=1}^{n-\lambda-1}\cap\{H_i\}_{i=1}^{n+1}\subset\{H_i\}_{i=1}^{n+1-\lambda} .$$

En tilisant que

$$\frac{(\tilde{G}_1 \cdots \tilde{G}_{q-k})^{\lambda-1}}{\alpha\|H_1, \cdots, H_{n+1-\lambda}\|^{\lambda-1} \prod_{n+2-\lambda\leqq i<j\leqq n+1} \|H_i, H_j, F_1, \cdots, F_{n-\lambda-1}\|}$$

$$=\frac{(\tilde{G}_1 \cdots \tilde{G}_{q-k})^{\lambda-1}}{\|K_1, K_2, F_1, \cdots, F_{n-\lambda-1}\|^{\lambda C_2+\lambda-1}} \qquad (\lambda\geqq 2)$$

où α est constante dépendante de $H_1, \cdots, H_{n+1}$, on a le résultat quant $\lambda\geqq 2$ comme dans la démonstration du théorème 3 en appliquant la méthode utilisée par Cartan ([1]).

Quand $\lambda=1$, d'après un théorème de Borel ou le lemme 2, il y a deux combinaisons dans $\{F_1, \cdots, F_{n-1}\}$ qui sont proportionnelles. Dans ce cas, on obtient ce théorème tout de suite de théorème 6 dans [6].

N.B. Quand il y a n combinaisons $\{F_i\}_{i=1}^{n}$ dans X telles que $\delta(F_i)=1$ $(i=1, \cdots, n)$, on a le même résultat tout de suite du théorème 3.

COROLLAIRE 4. *Sous l'hypothèse du théorème* 3 *ou du corollaire* 3, *on a l'inégalité* (7).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions données. Mathematica, 7 (1933), 5-31.

[2] DUFRESNOY, J., Théorie nouvelle des familles complexes normales; Applications à l'étude des fonctions algébroïdes. Ann. E.N.S., (3) 61 (1944), 1-44.

[3] GOL'DBERG, A.A. ET S.B. TUSHKANOV, Sur les combinaisons linéaires exceptionnelles des fonctions entières. Teor. Funkcii funktional Analiz i Prilozen, 13 (1971), 67-74 (en russe).

[4] NEVANLINNA, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Gauthier-Villars, Paris 1929.

[5] TODA, N., Sur les combinaisons exceptionnelles de fonctions holomorphes; applications aux fonctions algébroïdes. Tôhoku Math. J., **22** (1970), 290-319.
[6] TODA, N., Sur quelques combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna. Tôhoku Math. J., **23** (1971), 67-95.
[7] TODA, N., Le défaut modifié de systèmes et ses applications. Tôhoku Math. J., **23** (1971), 491-524.
[8] TODA, N., Le nombre de combinaisons linéaires exceptionnelles au sens de Nevanlinna. Nagoya Math. J., **49** (1973), 91-100.

UNIVERSITÉ DE NAGOYA.