DUC, T.-V
KODAI MATH. SEM. REP
25 (1973), 367—376

SUR LES STRUCTURES DÉFINIES PAR UNE 1-FORME VECTORIELLE F TELLE QUE $F^3 = \pm F$

PAR TONG VAN DUC

The author studies the integrability of the structure tensor of the structure defined by a vector-valued 1-form F satisfying $F^3 = \pm F$ and shows the existence of these structures on the vertical bundle of a vector bundle with a connection.

I. Étude de la structure K telle que $K^3 = K$.

1. Intégrabilité.

Soit sur une variété différentiable M de dimension m une 1-forme vectorielle K de rang constant r et telle que $K^3 = K$.

On remarque d'abord que si $r = m$, on a une structure presque-produit.

Soit $p(\lambda)$ le polynôme minimal de K:

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Soit $T_1 = \operatorname{Ker} K_x$, $T_2 = \operatorname{Ker}(K - I)_x$, $T_3 = \operatorname{Ker}(K + I)_x$ pour $x \in M$. On sait qu'il existe des polynômes $h_i(\lambda)$ $(i, j, \cdots = 1, 2, 3)$ tels qu'en posant $P_i = h_i(K)$, on obtienne un système de projecteurs supplémentaires et que:

$$T_i = P_i(T_x M),$$

$$T_x M = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3.$$

On trouve:

$$P_1 = I - K^2, \qquad P_2 = \frac{1}{2}(K + K^2), \qquad P_3 = \frac{1}{2}(-K + K^2).$$

Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ les distributions définies par K. Si P et Q sont des formes vectorielles de degré p et q, le crochet $[P, Q]$ désignera la $p+q$-forme découverte par Frölicher et Nijenhuis [2].

DÉFINITION. La structure K sera dite *intégrable* si les distributions $\mathcal{D}_i$ et $\mathcal{D}_i + \mathcal{D}_j$ sont intégrables.

Received October 18, 1972.

Chaque distribution $\mathcal{D}_i$ est intégrable ainsi que son supplémentaire si et seulement si $[P_i, P_i]=0$. Donc, si K est intégrable, on a:

$$[P_1, P_1]=[K^2, K^2]=0,$$

$$[P_2, P_2]=\frac{1}{4}[K, K]+\frac{1}{2}[K, K^2]+\frac{1}{4}[K^2, K^2]=0,$$

$$[P_3, P_3]=\frac{1}{4}[K, K]-\frac{1}{2}[K, K^2]+\frac{1}{4}[K^2, K^2]=0.$$

On en déduit:

$$N_K=\frac{1}{2}[K, K]=0.$$

Réciproquement, si $N_K=0$, alors [2]:

$$[K, K^2]=i_K N_K+2KN_K=0,$$

$$[K^2, K^2]=-2N_K+4K^2N_K+3i_K N_K+i_K i_K N_K=0,$$

i.e. $[P_i, P_i]=0$, $\forall i\in\{1, 2, 3\}$; d'où le:

THÉORÈME. *Pour que la structure K telle que $K^3=K$ soit intégrable, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis N_K de K soit nulle.*

Dans le cas où $r=m$, on retrouve la condition d'intégrabilité de la structure presque-produit.

On revient au cas général $r\neq m$. Soient $p=\dim T_2$, $q=\dim T_3$; on a $p+q=r$. Une base $(e_1, \cdots, e_m)$ de T_xM sera dite adaptée à la structure K si les $m-r$ premiers vecteurs appartiennent à T_1, les p suivants à T_2 et les q derniers à T_3. Soit $(\theta^1, \cdots, \theta^m)$ la base duale de $(e_1, \cdots, e_m)$. Dans ce qui suit, on adoptera les conventions suivantes:

$$I, J, \cdots=1, 2, \cdots, m,$$

$$a, b, c, \cdots=1, 2, 3,$$

$$i_1, j_1, k_1, \cdots=1, 2, \cdots, m-r,$$

$$i_2, j_2, k_2, \cdots=m-r+1, \cdots, m-r+p,$$

$$i_3, j_3, k_3, \cdots=m-r+p+1, \cdots, m,$$

$\bar{i}_1$ (resp $\bar{i}_2$, $\bar{i}_3$) désigne le complément de i_1 (resp. i_2, i_3) dans l'ensemble $\{1, 2, \cdots, m\}$.

Les composantes de K par rapport à une base adaptée sont:

$$K^{i_1}_{I}=0,\quad K^{i_2}_{\bar{j}_2}=0,\quad K^{i_2}_{j_2}=\delta^{i_2}_{j_2},\quad K^{i_3}_{\bar{j}_3}=0,\quad K^{i_3}_{j_3}=-\delta^{i_3}_{j_3}.$$

Donc K est représenté par une matrice de la forme:

$$
(1) \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & -I_q \end{bmatrix}.
$$

L'ensemble des repères adaptés déterminent sur M une G-structure qu'on désigne encore par K et dont les éléments du groupe structural $G=\mathrm{Gl}\,(m-r, p, q)$ sont de la forme:

$$
(2) \qquad \begin{bmatrix} A_{m-r} & 0 & 0 \\ 0 & A_p & 0 \\ 0 & 0 & A_q \end{bmatrix}
$$

les matrices A étant régulières.

2. *K*-connexion.

Définition. Une *K-connexion* est une connexion sur le fibré principal des repères adaptés.

Toute K-connexion peut être prolongée en une connexion sur le fibré principal $\mathscr{R}$ de tous les repères de M. Soit un recouvrement ouvert de M muni des sections locales du fibré des repères adaptés. Ces sections sont également des sections de $\mathscr{R}$. Une K-connexion est déterminée dans chaque ouvert U du recouvrement par une forme ω à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gl}\,(m-r, p, q)$ [5] ω peut être représentée par une matrice de la forme

$$
\begin{bmatrix} \omega^{i_1}_{j_1} & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{i_2}_{j_2} & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{i_3}_{j_3} \end{bmatrix}.
$$

On considère maintenant une connexion sur $\mathscr{R}$ et soit (ω^I_J) la matrice de la connexion relative à un recouvrement de M par des ouverts munis de repères adaptés. Les composantes de la différentielle absolue ∇K de K sont:

$$
\begin{array}{lll}
\nabla K^{i_1}_{j_1}=0, & \nabla K^{i_1}_{j_2}=\omega^{i_1}_{j_2}, & \nabla K^{i_3}_{j_3}=-\omega^{i_1}_{j_3}, \\
\nabla K^{i_2}_{j_1}=\omega^{i_2}_{j_1}, & \nabla K^{i_2}_{j_2}=0, & \nabla K^{i_2}_{j_3}=-2\omega^{i_2}_{j_3}, \\
\nabla K^{i_3}_{j_1}=\omega^{i_3}_{j_1}, & \nabla K^{i_3}_{j_2}=2\omega^{i_3}_{j_2}, & \nabla K^{i_3}_{j_3}=0.
\end{array}
$$

Si la connexion sur $\mathscr{R}$ est le prolongement d'une K-connexion, $\nabla K=0$. Réciproquement, si $\nabla K=0$, la forme de connexion est à valeurs dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gl}\,(m-r, p, q)$.

THÉORÈME 1. *Pour qu'une connexion sur $\mathcal{R}$ soit le prolongement d'une K-connexion, il faut et il suffit que la différentielle absolue de K soit nulle.*

3. Tenseur de structure.

Soit T la torsion de la connexion linéaire sur M qui est le prolongement d'une K-connexion. Soit q la projection canonique de $\Lambda^2T^*M\otimes TM$ sur $\Lambda^2T^*M\otimes TM/\partial(T^*M\otimes\mathcal{R}(\mathcal{G}))$ où $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ est l'espace fibré de fibre type $\mathcal{G}$ (algèbre de Lie de $\mathrm{Gl}\,(m-r, p, q)$) associé au fibré des repères $\mathcal{R}$ et ∂ l'opérateur d'antisymétrisation. Par définition, le tenseur de structure de la G-structure définie par K est $S=q(T)$ [3]. Si l'on pose:

$$\omega_k^i=\gamma_{jk}^i\theta^j,$$

$$d\theta^i=\frac{1}{2}C_{jk}^i\theta^j\wedge\theta^k,$$

alors

$$T=\frac{1}{2}(\gamma_{jk}^i-\gamma_{kj}^i-C_{jk}^i)\theta^j\wedge\theta^k\otimes e_i$$

et $\gamma_{jk_a}^{i_a}=0$ car ω est à valeurs dans $\mathcal{G}$.

Comme d'autre part, $\theta^{j_a}\wedge\theta^{k_a}\wedge e_{i_a}$ constituent une base du module des sections de $\partial(T^*M\otimes\mathcal{R}(\mathcal{G}))$, par passage au quotient, on peut écrire:

$$S=-\frac{1}{2}C_{j_a\bar{k}_a}^{i_a}\theta^{j_a}\wedge\theta^{\bar{k}_a}\otimes e_{i_a}.$$

Ainsi S est l'opposé du tenseur de torsion τ de Lichnérowicz, tenseur défini par:

$$\tau=\frac{1}{2}\tau_{jk}^i\theta^j\wedge\theta^k\otimes e_i$$

avec $\tau_{j_a\bar{k}_a}^{i_a}=C_{j_a\bar{k}_a}^{i_a}$ et $\tau_{jk}^i=0$ pour tous les autres indices [4]. De plus, on voit que S ne dépend pas de la K-connexion. On se propose d'établir la formule suivante:

$$(3)\qquad 4i_S\varphi=4K^2d\varphi-2i_KdK\varphi+i_KKdK\varphi+4dK^2\varphi-2i_{K^2}dK^2\varphi+KdK^2\varphi$$

où φ est une 1-forme quelconque sur M.

On rappelle que si φ est une p-forme, $K\varphi$ est encore une p-forme définie par:

$$K\varphi(X_1,\cdots,X_p)=\varphi(KX_1,\cdots,KX_p),\qquad \forall X_1,\cdots,X_p\in\mathcal{X}(M).$$

Une forme φ est dite de type (l, m, n) si $\varphi(X_1,\cdots,X_{l+m+n})=0$ pour toute suite de vecteurs $X_1,\cdots,X_{l+m+n}$ contenant plus de l vecteurs de T_1, ou plus de m vecteurs de T_2 ou plus de n vecteurs de T_3.

Soit $\varphi^{1,0,0}=\varphi_{i_1}\theta^{i_1}$ une 1-forme de type (1, 0, 0). On a:

$$d\varphi^{1,0,0}=d\varphi_{i_1}\wedge\theta^{i_1}+\varphi_{i_1}d\theta^{i_1}.$$

$d\varphi^{1,0,0}$ est la somme des formes des 6-types suivantes:

(2, 0, 0)	(0, 2, 0)	(0, 0, 2)
(1, 1, 0)	(1, 0, 1)	(0, 1, 1).

En remplaçant dans (3) φ par $\varphi^{1,0,0}$, on trouve que les coefficients des formes des types en question qui figurent aux deux membres de (3) sont égaux à 0, $2\varphi_{i_1}$, $2\varphi_{i_1}$, 0, 0, $-\varphi_{i_1}$. On vérifie facilement que la formule (3) est encore vraie si l'on remplace φ par une forme de type (0, 1, 0) ou (0, 0, 1).

Enfin, la formule (3) implique:

$$S=-\frac{1}{8}(4[K^2, K^2]-3K^2[K^2, K^2]+K^2[K, K]+2K[K, K^2]).$$

Soit

$$S=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}P_i[P_i, P_i].$$

II. Étude de la structure F telle que $F^3=-F$.

Toujours sur la variété différentiable M, on considère maintenant une 1-forme vectorielle F de rang constant r et telle que $F^3+F=0$. On en déduit que r est pair et que si $r=m$, F se réduit à une structure presque-complexe.

Soit $p(\lambda)$ le polynôme minimal de F:

$$p(\lambda)=\lambda(\lambda^2+1).$$

Les polynômes λ et λ^2+1 étant premiers entre eux et irréductible sur les réels, il existe deux polynômes uniques g_1 et g_2 en λ tels que: $\lambda g_1+(\lambda^2+1)g_2=0$. Il est évident que $g_1=-\lambda$ et $g_2=1$.

Si l'on pose:

$$h_1(\lambda)=\lambda g_1 \qquad \text{et} \qquad h_2(\lambda)=(\lambda^2+1)g_2$$

alors

$$P_1=h_1(F)=-F^2 \qquad \text{et} \qquad P_2=h_2(F)=F^2+I$$

forment un système de projecteurs supplémentaires. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les distributions définies par P_1 et P_2.

DÉFINITION. La structure F telle que $F^3+F=0$ sera dite *intégrable* si les distributions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont intégrables.

La distribution $\mathcal{D}_1$ est intégrable si et seulement si:

$$(F^2+I)[-F^2X, -F^2Y]=0, \qquad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

i.e. si et seulement si:

$$[F^2X, F^2Y]=-F^2([F^2X, F^2Y]).$$

La distribution $\mathcal{D}_2$ est intégrable si et seulement si:

$$F^2[(F^2+I)X, (F^2+I)Y]=0$$

i.e. si et seulement si:

$$F^2[X, Y]+F^2[F^2X, Y]+F^2[X, F^2Y]=-F^2[F^2X, F^2Y]$$

et puisque $F^4=-F^2$, on a:

THÉORÈMS 2. *Pour que la structure F telle que $F^3+F=0$ soit intégrable, il faut et il suffit que la torsion de Nijenhuis N_{F^2} de F^2 soit nulle.*

Und base $(e_1, \cdots, e_m)$ de T_xM sera dite adaptée à F si les r premiers vecteurs appartiennent à $\mathcal{D}_1$ et les $m-r$ derniers à $\mathcal{D}_2$. L'ensemble des repères adaptés forment une G-structure. Soit S_F le tenseur de structure de cette G-structure.

En appliquant la même méthode que précédemment, on trouve:

$$i_{S_F}\varphi=dF^2\varphi+i_{F_2}d^2\varphi-F^2d\varphi$$

où φ est une 1-forme quelconque sur M. On en déduit:

$$S_F=-N_{F^2}.$$

Ces résultats sont à ajouter à ceux de Yano [6].

III. Existence des structures étudiées.

Soit (E, p, M) un fibré vectoriel de dimension n, la base M ayant pour dimension m. Soit (U, φ) une carte vectorielle de (E, p, M) i.e. φ est un difféomorphisme de $p^{-1}(U)$ sur $U\times\boldsymbol{R}^n$. Soit (x^i) les coordonnées locales de M dans U et pour chaque $x\in U$, soit $E_\alpha(x)=\varphi^{-1}(x, e_\alpha)$ où (e_α) $(\alpha, \beta, \cdots=1, \cdots, n)$ est la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$. Chaque section $\hat{Y}$ de E audessus de U peut s'écrire:

$$\hat{Y}(x)=z^\alpha(\hat{Y})E_\alpha(x).$$

Les (x^i, z^α) seront choisis comme coordonnées locales de E dans $p^{-1}(U)$.

DÉFINTION. Une *connexion* sur (E, p, M) est une scission à gauche Γ de la suite exacte:

$$0\longrightarrow VE\longrightarrow TE\longrightarrow E\underset{M}{\times}TM\longrightarrow 0$$

soit localement, une scission à gauche de la suite exacte:

$$0 \longrightarrow U\times \boldsymbol{R}^n \times 0 \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow U\times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n \longrightarrow U\times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \quad (x, z, 0, t) \quad \longrightarrow \quad (x, z, y, t) \quad \longrightarrow \quad (x, z, y) \quad \longrightarrow 0.$$

Soit p_2 la deuxième projection de $E \underset{M}{\times} E$ sur E. En identifiant VE avec $E \underset{M}{\times} E$, on obtient un morphisme $D=p_2 \circ \Gamma$ de TE sur E, appelé application de connexion. Si D est linéaire ou homogène de degré 1 sur les fibrée du fibré vectoriel (TE, p_*, TM), la connexion sera dite linéaire ou homogène. Dans ce dernier cas, on suppose toujours que la connexion est définie sur $E_0=E-\{0\}$, [5] et [1].

Γ peut se mettre sous la forme:

$$\Gamma=(dz^\alpha+\Gamma_i^\alpha dx^i)\otimes \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

où $\Gamma_i^\alpha=\Gamma_i^\alpha(x, z)$ sont des fonctions linéaires ou homogènes de degré 1 suivant que Γ est linéaire ou homogène.

Soit $X \in \mathscr{X}(M)$ et $\hat{Y} \in E$. La dérivée covariante de $\hat{Y}$ par rapport à X est une section $D_X\hat{Y}$ de E définie par:

$$D_X\hat{Y}(x)=D(\hat{Y}_* X(x)).$$

DÉFINITION. On appellera *forme de courbure* de Γ, la 2-forme $\Omega=-N_\Gamma$, Ω a pour expression locale:

$$\Omega=\frac{1}{2}(\partial_i\Gamma_j^\alpha-\partial_j\Gamma_i^\alpha+\Gamma_j^\beta\partial_\beta\Gamma_i^\alpha-\Gamma_i^\beta\partial_\beta\Gamma_j^\alpha)dx^i\wedge dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial z^\alpha}.$$

Si Γ est linéaire, on définit sa courbure R par la formule:

$$R(X, Y)\hat{Z}=D_XD_Y\hat{Z}-D_YD_X\hat{Z}-D_{[X,Y]}\hat{Z}, \qquad \forall X, Y \in \mathscr{X}(M) \text{ et } \forall \hat{Z} \in E.$$

Soit en coordonnées locales

$$R=\left(\frac{1}{2} R_{ij,\beta}^\alpha dx^i\wedge dx^j\right)\otimes E^\beta \otimes E_\alpha$$

où (E^α) désigne la base duale de (E_α) et

$$R_{ij,\beta}^\alpha=\partial_i\Gamma_{j\beta}^\alpha-\partial_j\Gamma_{i\beta}^\alpha+\Gamma_{j\beta}^\gamma\Gamma_{i\gamma}^\alpha-\Gamma_{i\beta}^\gamma\Gamma_{j\gamma}^\alpha.$$

COROLLAIRE. *Dans le cas linéaire,* $\Omega=0 \Longleftrightarrow R=0$.

PROPOSITION 1. *Soit (u, f) un morphisme de (E, p, M) dans un autre fibré vectoriel (F, q, N) tel que la restriction de u à chaque fibre soit un isomorphisme. Alors toute connexion Γ' sur F induit sur E une connexion Γ de même nature que Γ'*

Preuve: La restriction de u_* à VE est un isomorphisme sur les fibres et on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \text{—} & VE & \text{—} & TE & \text{—} & E\underset{M}{\times}TM & \text{—} & 0 \\ & & \Big| \varphi_*|VE & & \Big| \varphi_* & & & & \\ 0 & \text{—} & VF & \text{—} & TE & \text{—} & F\underset{M}{\times}TM & \text{—} & 0 \end{array}$$

On obtient une connexion Γ sur E en posant:

$$\Gamma(A)=(u_*|VE)^{-1}\circ\Gamma'\circ u_*(A), \qquad \forall A\in TE.$$

Soit donc Γ une connexion quelconque sur (E, p, M). En posant $\tilde{P}=2\Gamma-I$, on obtient $\tilde{P}^2=I$ et $N_{\tilde{P}}=4N_\Gamma$. D'où le:

THÉORÈME 3. *L'existence d'une connexion sur* (E, p, M) *entraîne celle d'une structure preseque-produit sur l'espace total* E *qui est intégrable si et seulement si la forme de courbure de la connexion est nulle.*

Soit $HE=\operatorname{Ker}\Gamma$. En chaque $\hat{Z}$ de E, on a la décomposition:

$$T_{\hat{Z}}E=VE_{\hat{Z}}\oplus HE_{\hat{Z}} \tag{4}$$

et la restriction de p_* à $HE_{\hat{Z}}$ est un isomorphisme de $HE_{\hat{Z}}$ sur $T_{p(\hat{Z})}M$. L'image X^h d'un élément X de $T_{p(\hat{Z})}M$ par $(p_*|HE_{\hat{Z}})^{-1}$ sera appelée le relèvement horizontal de X. Si $X=X^i(\partial/\partial x^i)$, alors $X^h=X^i(\partial/\partial x^i-\Gamma_i^\alpha\partial/\partial z^\alpha)$. D'après la proposition 1, Γ induit une connexion $\tilde{\Gamma}$ sur le fibré vertical $(VE, \bar{p}, E)$. Soit P la structure presque-produit associée à $\tilde{\Gamma}$. On prendra $(x^i, z^\alpha, t^\alpha)$ comme coordonnées locales dans VE. On a en chaque point A de VE la décomposition $T_A VE=VVE_A\oplus HVE_A$. Soit $\hat{Z}$ l'origine du vecteur vertical A et soient $(VE_{\hat{Z}})^{\bar{h}}$ et $(HE_{\hat{Z}})^{\bar{h}}$ les relevements horizontaux de $VE_{\hat{Z}}$ et $HE_{\hat{Z}}$ dans VE. On obtient la décomposition suivante:

$$T_A VE=VVE_A\oplus(VE_{\hat{Z}})^{\bar{h}}_A\oplus(HE_{\hat{Z}})^{\bar{h}}_A. \tag{5}$$

Les champs de vecteurs $(\partial/\partial x^i)$ et $(\partial/\partial z^\alpha)$ forment une base des sections locales de TE. Par suite $((\partial/\partial x^i)^h)^{\bar{h}}$, $(\partial/\partial z^\alpha)^{\bar{h}}$, $\partial/\partial t^\alpha$ forment une base des

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}=\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma_i^\alpha(x, z)\frac{\partial}{\partial z^\alpha}-\Gamma_i^\alpha(x, t)\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)^{\bar{h}}=\frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

$$P\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right)=-\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}, \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \qquad P\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

On obtient une structure F telle que $F^3+F=0$ sur la variété VE posant:

$$F\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right)=0, \qquad F\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial t^\alpha}, \qquad F\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial t^\alpha}.$$

Il en résulte que:

$$N_{F^2}\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}, \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right)$$

$$=[\partial_i\Gamma_j^\alpha(x,z)-\partial_j\Gamma_i^\alpha(x,z)+\Gamma_j^\beta(x,z)\partial_\beta\Gamma_i^\alpha(x,z)-\Gamma_i^\beta(x,z)\partial_\beta\Gamma_j^\alpha(x,z)]\frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

$$+[\partial_i\Gamma_j^\alpha(x,t)-\partial_j\Gamma_i^\alpha(x,t)+\Gamma_j^\beta(x,t)\partial_{\beta_*}\Gamma_i(x,t)-\Gamma_i^\beta(x,t)\partial_{\beta_*}\Gamma_j^\alpha(x,t)]\frac{\partial}{\partial t^\alpha}$$

où $\partial_{\beta_*}=\partial/\partial j^\beta$.

$$N_{F^2}\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=0,\quad N_{F^2}\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \frac{\partial}{\partial j^\alpha}\right)=0,\quad N_{F^2}\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=0.$$

THÉORÈME 4. *Toute connexion sur (E, p, M) induit sur la variété VE une structure F telle que $F^3+F=0$. Cette structure est intégrable si et seulement si la courbure de la connexion est nulle.*

Les structures P et F ainsi obtenues anticommutent, i.e. $PF+FP=0$. En posant $K=PF$, on obtient:

$$K^3=K,$$

$$KF+FK=0,\qquad KP+PK=0,$$

$$K\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right)=0,\quad K\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial t^\alpha},\quad K\left(\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=-\frac{\partial}{\partial z^\alpha},$$

$$N_K\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right)=-N_{F^2}\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}}\right),$$

$$N_K\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\right)=(\partial_\alpha\Gamma_i^\beta(x,z)-\partial_{\alpha_*}\Gamma_i^\beta(x,t))\frac{\partial}{\partial z^\beta},$$

$$N_K\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^h\right)^{\bar{h}},\ \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=(-\partial_\alpha\Gamma_i^\beta(x,z)+\partial_{\alpha_*}\Gamma_i^\beta(x,t))\frac{\partial}{\partial t^\beta},$$

$$N_K\left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha},\ \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\right)=0.$$

THÉORÈME 5. *Toute connexion sur un fibré vectoriel induit sur l'espace total de son fibré vertical une structure K telle que $K^3=K$. Dans le cas linéaire, cette structure est intégrable si et seulement si la connexion est à courbure nulle.*

RÉFÉRENCES

[1] DUC T. V., Connexions et structures particulières sur les fibrés vectoriels. C.R.A.S. Série A. **270** (1970), 661–664.

[2] FRÖLICHER, A., ET A. NIJEENHUIS, Theory of vector differential from, Part. I. Proc. Kon. Ned. Akad. A **59** (1956), 339–359.

[3] LEHMANN-LEJEUNE, J., Intégrabilité des G-structures définies par 1-forme 0-défor-

mable à valeurs dans le fibré tangent. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **16** (1966), 329–387.

[4] LICHNÉROWICZ, A., Théorie globale des connexions et groupe d'holonomie. Ed. Cremonese, Rome (1955).

[5] VILMS, J., Connections on tangent bundles. J. Diff. Géom. **1** (1967), 225–243.

[6] YANO, K., On a structure defined by a tensor field f of type $\binom{1}{1}$ satisfying $f^3+f=0$. Tensor **14** (1963), 99–109.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES PURES,
SAINT MARTIN D'HÈRES, FRANCE.