KŌDAI MATH. SEM. REP.
22 (1970), 219—230

ÜBER ANALYTISCHE FUNKTIONEN, DIE IN EINER HALBEBENE POSITIVEN REELLEN TEIL BESITZEN

VON YÛSAKU KOMATU

1. Problemstellung.

Um die in einem Kreis regulär analytischen Funktionen zu untersuchen, wird die Darstellung von Herglotz [1] manchmal als ein nützliches Mittel erkannt. Es sei Φ eine analytische Funktion, die im Einheitskreis regulär ist und dort positiven reellen Teil besitzt. Dann läßt sie sich durch die Herglotzsche Formel

$$\Phi(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\rho(t)+i\Im\Phi(0)\qquad(|z|<1)$$

ausdrücken, worin ρ eine für $-\pi\leqq t\leqq\pi$ definierte reellwertige zunehmende Funktion ist. Die totale Schwankung von ρ ist offenbar gleich $\Re\Phi(0)$; vgl. auch [3], [4].

Indem man nötigenfalls $(\Phi(z)-i\Im\Phi(0))/\Re\Phi(0)$ statt $\Phi(z)$ betrachtet, kann man annehmen, daß Φ durch $\Phi(0)=1$ normiert ist. Dann ist die totale Schwankung von ρ gleich Eins. Durch Abtrennen des reellen Teils sowie Differenzieren ergeben sich aus der Herglotzschen Formel die Beziehungen

$$\Re\Phi(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,d\rho(t),$$

$$\Phi'(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2e^{it}}{(e^{it}-z)^2}\,d\rho(t).$$

Beide folgende Sätze sind wohl bekannt und tatsächlich zwar mit dem Schwarzschen Hilfssatz nahezu äquivalent. Aber sie können auch als fast unmittelbare Folgerungen aus diesen Beziehungen angesehen werden.

SATZ 1. *Jede analytische Funktion Φ, die im Einheitskreis regulär ist und dort positiven reellen Teil besitzt und ferner durch $\Phi(0)=1$ normiert ist, genügt der Ungleichung*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leqq\Re\Phi(z)\leqq\frac{1+|z|}{1-|z|}\qquad(|z|<1).$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle $z_0\neq0$ tritt das Gleichheitszeichen rechts oder links dann und nur dann auf, wenn Φ die lineare Funktion

Eingegangen am 25. Dezember 1969.

$$\Phi(z)=\frac{z_0\pm|z_0|z}{z_0\mp|z_0|z}$$

ist.

SATZ 2. *Jede im Satz* 1 *angegebene Funktion* Φ *genügt ferner der Ungleichung*

$$|\Phi'(z)|\leqq\frac{2}{(1-|z|)^2}\qquad(|z|<1).$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle $z_0\neq 0$ *tritt das Gleichheitszeichen nur für* $\Phi(z)=(z_0+|z_0|z)/(z_0-|z_0|z)$ *auf, während es an* $z_0=0$ *nur für* $\Phi(z)=(1+\varepsilon z)/(1-\varepsilon z)$ *mit beliebigem* ε $(|\varepsilon|=1)$ *auftritt.*

Indem man mittels einer linearen Transformation $z|(1-z)/(1+z)$ das Grundgebiet aus $\{|z|<1\}$ in $\{\Re z>0\}$ umformt, lassen sich die Sätze 1 und 2 in die folgenden Gestalten transformieren.

SATZ 3. *Jede analytische Funktion f, die in der rechten Halbebene regulär ist und dort positiven reellen Teil besitzt und ferner durch* $f(1)=1$ *normiert ist, genügt der Ungleichung*

$$\frac{|z|^2+1-|z^2-1|}{z+\bar z}\leqq\Re f(z)\leqq\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{z+\bar z}\qquad(\Re z>0)$$

i.e.

$$\left|\frac{z+\bar z}{|z|^2+1}\Re f(z)-1\right|\leqq\frac{|z^2-1|}{|z|^2+1}\qquad(\Re z>0).$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle $z_0\neq 1$ *tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann auf, wenn f die lineare Funktion*

$$f(z)=\frac{z_0-\bar z_0+(|z_0|^2-1\pm|z_0^2-1|)z}{|z_0|^2-1\pm|z_0^2-1|+(z_0-\bar z_0)z}$$

ist, wobei $f(z)=1/z$ *gesetzt werden soll, falls* z_0 *reell und kleiner bzw. größer als* 1 *ist.*

SATZ 4. *Jede im Satz* 3 *angegebene Funktion f genügt ferner der Ungleichung*

$$|f'(z)|\leqq\frac{2(|z|^2+1+|z^2-1|)}{(z+\bar z)^2}\qquad(\Re z>0).$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle $z_0\neq 1$ *tritt das Gleichheitszeichen nur für die im Satz* 3 *angegebene Funktion mit dem oberen Vorzeichen auf, während es an* $z_0=1$ *nur für* $f(z)=(1-isz)/(z-is)$ *mit beliebigem reellem s auftritt.*

Nun bezeichne $\mathfrak{R}$ die Familie derjenigen analytischen Funktionen, die den im Satz 3 angegebenen Bedingungen genügen, i.e. $\Re f(z)>0$ in $\Re z>0$ und $f(1)=1$. Bezüglich dieser Familie ist schon auf verschiedene Weise bemerkt worden, daß der Begriff der Winkelderivierte manchmal eine wichtige Rolle spielen kann. Für jedes $f \in \mathfrak{R}$ wird sie durch den Grenzwert

$$c = c[f] \equiv \lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z}$$

bestimmt, wobei z in einem Winkelraum $|\arg z| \leqq \alpha < \pi/2$ zu ∞ streben soll. Ihre Existenz wurde bekanntlich von Julia [2] und Wolff [8] sowie in expliziter Weise von Landau-Valiron [6] bestätigt. Der Wert der Winkelderivierte ist stets reell und ferner genügt der Beziehung $0 \leqq c \leqq 1$, wobei das Gleichheitszeichen $c=1$ nur für $f(z)=z$ erreicht werden kann; vgl. [5].

Hier blicke man die im Satz 3 erscheinende extremale Funktion zurück. Da der Koeffizient $z_0 - \bar{z}_0$ von z im Nenner nicht verschwindet, so ist sie eine echt gebrochene lineare Funktion, sofern z_0 nicht auf der (positiven) reellen Achse liegt. Demgemäß muß ihre Winkelderivierte verschwinden. Daher werden die Funktionen mit nicht verschwindenden Winkelderivierten mindestens scheinbar außer acht gelassen. Von diesem Standpunkt aus scheint es plausibel, die obigen Abschätzungen noch verschärfen zu können, indem man die Winkelderivierte geeignet in Betracht zieht.

Doch muß hier eine Entschuldigung darüber erwähnt werden, daß die herzuleitenden Resultate selbst keine wesentlich neue Tatsache enthalten, sondern nur als triviale Verschärfungen angesehen werden können. Nämlich ist es bekannt, daß die Winkelderivierte auch durch

$$c = \inf_{\Re z > 0} \frac{\Re f(z)}{\Re z}$$

charakterisiert wird. Es ist also ersichtlich, daß $f \in \mathfrak{R}$ gleichzeitig

$$\frac{f(z) - cz}{1-c} \in \mathfrak{R}$$

nach sich zieht. Daher bleibt jede in der ganzen Familie $\mathfrak{R}$ richtige Beziehung gewiß auch dann gelten, wenn darin $f(z)$ überall durch $(f(z)-cz)/(1-c)$ ersetzt wird. Die folgenden Resultate werden gerade von dieser Art sein.

Trotzdem sollen sie im folgenden wiedergegeben werden. Aber die Beweisgänge beruhen einheitlich auf derjenigen Strukturformel für die Familie $\mathfrak{R}$, die durch ein Integral vom Stieltjesschen Typus dargestellt wird und auch in anderen verwandten Aufgaben wirksam benutzt worden ist. Unter diesen Umständen besteht ein Zweck der vorliegenden Note noch darin, daß alternative Beweise für die Sätze 3 und 4 in systematischer Weise angegeben werden.

2. Schranken für reellen Teil.

Zuerst soll die Strukturformel für die Familie $\mathfrak{R}$ erwähnt werden. Nämlich läßt sich jede Funktion $f \in \mathfrak{R}$ in der Form

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-isz}{z-is}d\lambda(s)+cz \qquad (\Re z>0)$$

ausdrücken, worin c mit der Winkelderivierte von f übereinstimmt und λ eine für $-\infty<s<\infty$ definierte reellwertige zunehmende Funktion bedeutet, deren totale Schwankung gleich $1-c$ ist. Diese Formel, die in ein wenig roher Form von Tsuji [7] herrührt, wird mittels geeigneter Umformung aus der Herglotzschen Formel erhalten; vgl. [5].

SATZ 5. *Jede Funktion $f\in\mathfrak{R}$, die mit z nicht übereinstimmt, genügt der Ungleichung*

$$\left|\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\,\frac{\Re f(z)-c\Re z}{1-c}-1\right|\leqq\frac{|z^2-1|}{|z|^2+1} \qquad (\Re z>0),$$

worin c die Winkelderivierte von f bedeutet. An jeder vorgeschriebenen Stelle z_0, die nicht auf der (positiven) reellen Achse liegt, gilt die Gleichheit

$$\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\,\frac{\Re f(z)-c\Re z}{1-c}=1\pm\frac{|z^2-1|}{|z|^2+1} \qquad (z=z_0)$$

dann und nur dann, wenn f die rationale Funktion

$$f(z)=(1-c)\frac{z_0-\bar{z}_0+(|z_0|^2-1\pm|z_0{}^2-1|)z}{|z_0|^2-1\pm|z_0{}^2-1|+(z_0-\bar{z}_0)z}+cz$$

ist. Wenn die betreffende Stelle x auf der reellen Achse liegt, so vereinfacht sich die Ungleichung in der Gestalt

$$(1-x^2)c\leqq 1-x\Re f(x), \qquad x<\Re f(x) \qquad (0<x<1),$$

$$(x^2-1)c\leqq x\Re f(x)-1, \qquad \Re f(x)<x \qquad (x>1).$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle x_0 gilt die Gleichheit $(1-x^2)c=1-x\Re f(x)$ $(x=x_0)$ dann und nur dann, wenn f dieselbe rationale Funktion

$$f(z)=\frac{1-c}{z}+cz$$

ist, die nicht von x_0 abhängt.

Beweis. Aus der Strukturformel für $\mathfrak{R}$ ergibt sich durch Abtrennen des reellen Teils die Gleichung

$$\Re f(z)-c\Re z=\Re z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+s^2}{|z-is|^2}d\lambda(s).$$

Da stets $d\lambda\geqq 0$ gilt, so handelt es sich nur darum, beide Größen

$$\omega_{\pm}(z) = \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix}_{-\infty<s<\infty} \frac{1+s^2}{|z-is|^2}$$

in expliziter Gestalt zu bestimmen. Nämlich wird sich dann die Abschätzung

$$(1-c)\Re z\omega_-(z) \leqq \Re f(z) - c\Re z \leqq (1-c)\Re z\omega_+(z)$$

ergeben, die mit der im Satz angegebenen äquivalent sein soll. Nun, um $\omega_{\pm}(z)$ zu bestimmen, erhält man zuerst

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1+s^2}{|z-is|^2} = \frac{2\Im z(1-s^2)+(|z|^2-1)s}{|z-is|^4}.$$

Durch Nullsetzen dieses Ausdrucks bekommt man die quadratische Gleichung in s

$$2\Im z(1-s^2)+(|z|^2-1)s=0,$$

deren Wurzel im Falle $\Im z \neq 0$ durch

$$\sigma_{\pm}(z) = \frac{i}{z-\bar{z}}(|z|^2-1\pm|z^2-1|)$$

gegeben werden. Ferner sieht man leicht ein, daß

$$\omega_{\pm}(z) = \frac{1+\sigma_{\pm}(z)^2}{|z-i\sigma_{\pm}(z)|^2} = \frac{|z|^2+1\pm|z^2-1|}{2(\Re z)^2}$$

ist und also die gewünschte Abschätzung sofort folgt. Da $(1+s^2)/|z-is|^2$ als Funktion von s ihr Maximum bzw. Minimum an $\sigma_{\pm}(z)$ und zwar im engeren Sinne annimmt, so werden die extremalen Funktionen an der Stelle z_0 dadurch charakterisiert, daß die Funktion λ ihren totalen Sprung $1-c$ lauter an $\sigma_{\pm}(z_0)$ erleidet. Dies zeigt die Extremalbehauptung für $\Im z_0 \neq 0$. Im Falle $\Im z=0$ setze man $z=x$. Dann artet die dort auftretende quadratische Gleichung einfach zu $s=0$ aus. Ferner nimmt die Funktion $(1+s^2)/(x^2+s^2)$ von s den Wert $1/x^2$ als das strenge Maximum bzw. Minimum an, je nachdem $0<x<1$ oder $x>1$ ist, was sofort nach sich zieht, daß die letzte Behauptung des Satzes richtig ist.

Nebenbei bemerkt, gibt der Satz 5 tatsächlich eine Verschärfung des Satzes 3 an. Nämlich läßt sich die Abschätzung im Satz 5 in der Gestalt

$$c\frac{z+\bar{z}}{2} + (1-c)\frac{|z|^2+1-|z^2-1|}{z+\bar{z}} \leqq \Re f(z) \leqq c\frac{z+\bar{z}}{2} + (1-c)\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{z+\bar{z}}$$

schreiben. Die Koeffizienten von c in beiden Schranken sind gleich

$$\frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{|z|^2+1\pm|z^2-1|}{z+\bar{z}} = \mp\frac{|z^2-1|\mp\Re(z^2-1)}{2\Re z}$$

und also für $\Re z>0$ negativ oder positiv bleiben, insofern z nicht auf der reellen

Achse liegt. Daher sind die im Satz 5 angegebenen Schranken besser als die im Satz 3 angegebenen Schranken, die gerade dem besonderen Falle $c=0$ entsprechen.

Die Ursache dieser Verschärfung besteht darin, daß die im Satz 5 gewonnene Abschätzung auf der für $\mathfrak{R}$ eigentlichen Strukturformel beruht, während die im Satz 3 gewonnene mittelbar aus dem Falle des Grundgebietes $\{|z|<1\}$ umgeformt wurde und also die Winkelderivierte darin nicht abgetrennt worden ist.

3. Schranken für Ableitungen.

Die Strukturformel für die Familie $\mathfrak{R}$ gestattet auch die Ableitung von f in der im Satz 4 erwähnten Gestalt abzuschätzen.

SATZ 6. *Jede Funktion $f\in\mathfrak{R}$ genügt der Ungleichung*

$$|f'(z)-c|\leqq 2(1-c)\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{(z+\bar{z})^2} \qquad (\Re z>0),$$

worin c die Winkelderivierte von f bedeutet. Für den trivialen Fall $f(z)=z$ mit $c=1$ besteht das Gleichheitszeichen an jeder Stelle. Andernfalls tritt es an jeder vorgeschriebenen Stelle z_0, die nicht auf der reellen Achse liegt, dann und nur dann auf, wenn f die rationale Funktion

$$f(z)=(1-c)\frac{z_0-\bar{z}_0+(|z_0|^2-1+|z_0{}^2-1|)z}{|z_0|^2-1+|z_0{}^2-1|+(z_0-\bar{z}_0)z}+cz$$

ist. Wenn die betreffende Stelle x auf der reellen Achse liegt, so wird die Ungleichung in scheinbar noch einfacherer Gestalt

$$\frac{|f'(x)-c|}{1-c}\begin{cases}\leqq \dfrac{1}{x^2} & (0<x\leqq 1),\\[2ex] <1 & (x>1)\end{cases}$$

geschrieben. Hier kann das Gleichheitszeichen nur an den Stellen x_0 mit $0<x_0\leqq 1$ auftreten, wobei für $0<x_0<1$ die extremale Funktion

$$f(z)=\frac{1-c}{z}+cz$$

nicht von x_0 abhängt, während für $x_0=1$ die extremalen Funktionen

$$f(z)=(1-c)\frac{1-isz}{z-is}+cz$$

die einen beliebigen reellen Parameter s enthaltende Schar bilden.

Beweis. Durch Differenzieren der Strukturformel für $\mathfrak{R}$ entsteht die Gleichung

$$f'(z)-c=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+s^2}{(z-is)^2}d\lambda(s),$$

woraus unmittelbar die Ungleichung

$$|f'(z)-c|\leqq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+s^2}{|z-is|^2}d\lambda(s)=\frac{\Re f(z)-c\Re z}{\Re z}$$

folgt. Die gewünschte Abschätzung ergibt sich also aus dem Satz 5 oder vielmehr geradsinnig durch denselben Beweisgang wie dort. Die Behauptung über das Gleichheitszeichen läßt sich auch mittels des Beweisgangs des Satzes 5 bestätigen.

In bezug auf den Vergleich mit dem im Satz 4 gestellten Resultat ist der Umstand ganz ähnlich wie früher. Nämlich ergibt sich aus der Abschätzung im Satz 6 die Doppelungleichung

$$c-2(1-c)\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{(z+\bar{z})^2}\leqq|f'(z)|\leqq c+2(1-c)\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{(z+\bar{z})^2}.$$

Der Koeffizient von c in der rechten Schranke ist gleich

$$1-2\frac{|z|^2+1+|z^2-1|}{(z+\bar{z})^2}=-\frac{|z^2-1|-\Re(z^2-1)}{2(\Re z)^2}$$

und also negativ bleibt, insofern z nicht $\Im z=0$ und $\Re z\geqq 1$ genügt. Die im Satz 4 angegebene Abschätzung entspricht gerade dem besonderen Falle $c=0$. Ferner wird nebenbei bemerkt, daß die linke Schranke der obigen Doppelungleichung für jede feste Stelle z positiv wird, wenn c beim Wert 1 nahe genug ist, und also dann eine wirksame Rolle spielen kann.

Die Ableitung höherer Ordnung von $f\in\mathfrak{R}$ läßt sich prinzipiell auch in derselben Weise abschätzen. Im Falle der ersten Ordnung wurde die vorliegende Frage auf eine Extremalaufgabe in der Differentialrechnung reduziert, wobei zwar eine quadratische Gleichung auftrat. Im Falle höherer Ordnung erhöht sich aber der Grad der auftretenden algebraischen Gleichung, doch nicht so sehr, sondern nur um Eins.

SATZ 7. *Jede Funktion $f\in\mathfrak{R}$ genügt der Ungleichung*

$$|f^{(n)}(z)|\leqq n!\,(1-c)\omega_n(z)\qquad(n=2,3,\cdots;\ \Re z>0),$$

worin c die Winkelderivierte von f bedeutet und ω_n durch

$$\omega_n(z)=\max_{-\infty<s<\infty}\frac{1+s^2}{|z-is|^{n+1}}$$

definiert wird. Für jedes z gilt $\omega_n(z)=(1+\sigma_n(z)^2)/|z-i\sigma_n(z)|^{n+1}$, worin $\sigma_n(z)$ diejenige Wurzel der kubischen Gleichung in s

$$\mathfrak{J}z(n+1+(n-3)s^2)+(2|z|^2-n-1)s-(n-1)s^3=0$$

bedeutet, die das Maximum angibt und notwendig dasselbe Zeichen wie $\mathfrak{J}z$ *besitzt, falls* z *nicht reell ist. An jeder vorgeschrienenen Stelle* z_0, *die nicht auf der reellen Achse liegt, tritt das Gleichheitszeichen in der Abschätzung dann und nur dann auf, wenn* f *die rationale Funktion*

$$f(z)=(1-c)\frac{1-i\sigma_n(z_0)z}{z-i\sigma_n(z_0)}+cz$$

ist, insofern f *nicht zu* z *ausartet.*

Beweis. Aus der Strukturformel für $\mathfrak{R}$ ergibt sich

$$f^{(n)}(z)=(-1)^n\cdot n!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+s^2}{(z-is)^{n+1}}d\lambda(s) \qquad (n\geqq 2),$$

woraus die gewünschte Abschätzung sofort folgt. Es bleibt also nur übrig, das Verhalten von $\omega_n(z)$ zu untersuchen. Die Funktion $\psi_n(s;z)\equiv(1+s^2)/|z-is|^{n+1}$ mit $n\geqq 2$ genügt der Grenzbeziehung $\psi_n(s;z)\to 0$ $(s\to\pm\infty)$ und erreicht also ihr positives Maximum an einer inneren Stelle $s=\sigma_n(z)$. Aus

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_n(s;z)=\frac{\mathfrak{J}z(n+1-(n-3)s^2)+(2|z|^2-n-1)s-(n-1)s^3}{|z-is|^{n+3}}$$

sieht man ein, daß $\sigma_n(z)$ eine Wurzel der genannten kubischen Gleichung ist. Da für $s\mathfrak{J}z>0$ die Ungleichung $\psi_n(s;z)>\psi_n(-s;z)$ besteht, so besitzt $\sigma_n(z)$ dasselbe Zeichen wie $\mathfrak{J}z$ und ferner wird das Maximum im engeren Sinne angenommen. Die Behauptung über die Extremalfunktion folgt dann wie üblich.

Hier soll nebenbei bemerkt werden, daß für nicht reelles z die Ungleichung $|\sigma_n(z)|>|\mathfrak{J}z|$ stets gilt. In der Tat besitzt die Größe

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_n(s;z)=\frac{2s|z-is|^2+(n+1)(1+s^2)(\mathfrak{J}z-s)}{|z-is|^{n+3}}$$

im Intervall $0\lesseqqgtr s\lesseqqgtr\mathfrak{J}z$ dasselbe Zeichen wie $\mathfrak{J}z$. Also muß die Stelle $\sigma_n(z)$, die das Maximum von ψ_n angibt, vom Ursprung mehr entfernt als $\mathfrak{J}z$ liegen.

Wenn die Wurzel $\sigma_n(z)$ der im Satz 7 auftretenden kubischen Gleichung explizit bestimmt wird, so läßt sich demgemäß die betreffende Abschätzung in mehr konkreter Gestalt ausdrücken. Dies ist tatsächlich der Fall, wenn z auf der reellen Achse liegt. In bezug auf diesen Umstand als auch die explizite Behauptung über extremale Funktionen soll hier der Satz 7 wie folgt ergänzt werden.

SATZ 8. *Jede Funktion* $f\in\mathfrak{R}$, *die mit* z *nicht übereinstimmt, genügt für reelles* $x>0$ *und jedes* $n=2,3,\cdots$ *der Ungleichung*

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!\,(1-c)} \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} & \left(0<x\leqq\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right), \\[2ex] \dfrac{2(n-1)^{(n-1)/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}(x^2-1)^{(n-1)/2}} & \left(x>\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right). \end{cases}$$

An jeder vorgeschriebenen Stelle x_0 tritt das Gleichheitszeichen dann und nur dann auf, wenn f von der Gestalt

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{1-c}{z}+cz & \left(0<x_0\leqq\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right), \\[2ex] (1-c)\left(\mu\dfrac{1+i\sigma_n(x_0)z}{z+i\sigma_n(x_0)}+(1-\mu)\dfrac{1-i\sigma_n(x_0)z}{z-i\sigma_n(x_0)}\right)+cz & \left(x_0>\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right) \end{cases}$$

ist, worin $\sigma_n(x)=\sqrt{(2x^2-n-1)/(n-1)}$ gesetzt wird und μ eine beliebige reelle Zahl mit $0<\mu<1$ bedeutet.

Beweis. Dieselben Bezeichnungen wie im Beweis des Satzes 7 beibehaltend, erhält man zuerst

$$\frac{|f^{(n)}(x)|}{n!\,(1-c)} \leqq \omega_n(x) \equiv \max_{-\infty<s<\infty} \frac{1+s^2}{(x^2+s^2)^{(n+1)/2}}.$$

Der das Maximum $\omega_n(x)$ ergebende Wert von s wird wie oben durch die Gleichung

$$0=\frac{\partial}{\partial s}\frac{1+s^2}{(x^2+s^2)^{(n+1)/2}}=\frac{s(2x^2-n-1-(n-1)s^2)}{(x^2+s^2)^{(n+3)/2}}$$

bestimmt. Die betreffenden Werte von s sind $s=0$ bzw. $s=\pm\sigma_n(x)$, je nachdem $2x^2-(n+1)$ nichtpositiv oder positiv ist. So erhält man

$$\omega_n(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} & \left(0<x\leqq\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right), \\[2ex] \dfrac{1+\sigma_n(x)^2}{(x^2+\sigma_n(x)^2)^{(n+1)/2}} & \left(x>\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right), \end{cases}$$

woraus sich die gewünschte Abschätzung ergibt. Die Behauptung über extremale Funktionen ist auch ersichtlich.

4. Abschätzung für Winkelderivierte.

Die Ungleichungen, die oben vom Satz 5 bis zum Satz 8 erwähnt worden sind, enthalten wirklich die Winkelderivierte c der betreffenden Funktion $f\in\mathfrak{R}$. So lassen sie sich umgekehrt als eine Art Abschätzungen für die Winkelderivierte c ansehen, wenn die auftretenden Werte des reellen Teils bzw. der Ableitung an einer bestimmten Stelle z vorgeschrieben werden. Von diesem Gesichtspunkt aus können diese Sätze umschrieben werden.

SATZ 9. *Es sei f eine beliebige Funktion von $\mathfrak{R}$, die mit z nicht übereinstimmt. Dann wird ihre Winkelderivierte c durch*

$$c \leqq \frac{|z^2-1| \pm (|z|^2+1-2\Re z \Re f(z))}{|z^2-1| \mp (\Re z^2 - 1)} \qquad (\Re z > 0)$$

und insbesondere

$$c \leqq \frac{1-x\Re f(x)}{1-x^2} \qquad (0<x<\infty)$$

abgeschätzt, worin $x \neq 1$ angenommen wird oder vielmehr die rechte Seite an $x=1$ als den Grenzwert $(1+\Re f'(1))/2$ für $x \to 1$ verstanden werden soll. An jeder Stelle z_0 bzw. x_0 gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f die im Satz 5 angegebene rationale Funktion ist.

Beweis. Die erwähnten Abschätzungen sind nichts anders als diejenigen, die durch Auflösung der im Satz 5 angegebenen Ungleichungen in bezug auf die Unbekannte c entstehen.

Beide Sätze 5 und 9 sind natürlich äquivalent. Aber in der vorderen Fassung wird behauptet, daß für jedes z mit $\Re z > 0$ die Beziehung

$$c = \inf_f \frac{|z^2-1| \pm (|z|^2+1-2\Re z \Re f(z))}{|z^2-1| \mp (\Re z^2 - 1)}$$

gilt, worin f über alle Funktion von $\mathfrak{R}$ mit der Winkelderivierte c durchläuft, während in der hinteren Fassung behauptet wird, daß für jedes $f \in \mathfrak{R}$ mit der Winkelderivierte c die Beziehung

$$c \leqq \inf_{\Re z > 0,\, \Im z \neq 0} \frac{|z^2-1| \pm (|z|^2+1-2\Re z \Re f(z))}{|z^2-1| \mp (\Re z^2 - 1)}$$

gilt, wo das Gleichheitszeichen nur für die rationalen Funktionen von der im Satz 5 angegebenen Gestalt bestehen kann.

Die Umstände sind ähnlich auch in den folgenden Sätzen.

Satz 9 enthält eine Verschärfung von der primären Beziehung $c \leqq \Re f(x)/x$. Auf Grund der übrigen Ungleichungen im Satz 5 ergibt sich nämlich

$$\frac{1-x\Re f(x)}{1-x^2} - \frac{\Re f(x)}{x} = \frac{x-\Re f(x)}{x(1-x^2)} < 0 \qquad (x \neq 1).$$

In bezug auf die Abschätzungen von c mittels der Ableitungen sollen die betreffenden Stellen der Einfachheit halber auf die reelle Achse eingeschränkt werden, SATZ 10. *Es sei f eine beliebige Funktion von $\mathfrak{R}$, die mit z nicht übereinstimmt. Dann wird ihre Winkelderivierte durch*

$$c \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{1-|f'(x)|^2}{1-\Re f'(x)} & (0<x\leqq 1), \\ \dfrac{1-x^4\Re f'(x)-x^2\sqrt{|1-f'(x)|^2-x^4(|f'(x)|^2-(\Re f'(x))^2)}}{1-x^4} & (x>1) \end{cases}$$

abgeschätzt, worin an jeder Stelle x_0 das Gleichheitszeichen nur für die im Satz 6 angegebenen rationalen Funktionen gelten kann.

Die im Satz 10 enthaltene Abschätzung an $x=1$, i.e.

$$c \leqq \frac{1}{2}\frac{1-|f'(1)|^2}{1-\Re f'(1)}$$

wurde früher in [5] hergeleitet.[1] Nebenbei bemerkt, ist die Abschätzung für $0<x\leqq 1$ nur eine einfache Folgerung aus diesem besonderen Fall. Nämlich für jede feste Stelle $x>0$ gehört zusammen mit f auch $f(x\zeta)/x$ als Funktion von ζ der Familie $\mathfrak{R}$. Auf diese Funktion die Abschätzung an $\zeta=1$ angewandt, ergibt sich die Beziehung

$$c \leqq \frac{1}{2}\frac{1-|f'(x)|^2}{1-\Re f'(x)} \qquad (x>0),$$

die sogar auf der ganzen positiven reellen Achse gelten bleibt.

SATZ 11. *Es sei f eine beliebige Funktion von $\mathfrak{R}$. Dann wird für jedes $n=2, 3, \cdots$ ihre Winkelderivierte durch*

$$c \leqq \begin{cases} 1-\dfrac{x^{n+1}|f^{(n)}(x)|}{n!} & \left(0<x\leqq\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right), \\ 1-\dfrac{(n+1)^{(n+1)/2}(x^2-1)^{(n-1)/2}|f^{(n)}(x)|}{n!\,2(n-1)^{(n-1)/2}} & \left(x>\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}\right) \end{cases}$$

abgeschätzt, worin an jeder Stelle x_0 das Gleichheitszeichen dann und nur dann besteht, wenn f die im Satz 8 angegebene Gestalt besitzt.

---

1) Diese Gelegenheit ausnutzend, soll ein in [5] enthaltener Fehler berichtigt werden. Der Ausdruck

$$f(z)=z-\frac{|1-f'(1)|^2}{2}\frac{z^2-1}{(1-\Re f'(1))z+i\Im f'(1)}$$

dort an der von unten siebenten Zeile auf Seite 177 ist durch

$$f(z)=z-\frac{(1-c)(1-f'(1))(z^2-1)}{(1-f'(1))z+1+f'(1)-2c} \qquad \text{with} \qquad c=\frac{1}{2}\frac{1-|f'(1)|^2}{1-\Re f'(1)}$$

ersetzt zu werden.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] HERGLOTZ, A., Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreise. Leipziger Ber. **63** (1911), 501–511.

[2] JULIA, G., Extensions nouvelles d'un lemme de Schwarz. Acta Math. **42** (1920), 349–355.

[3] KOMATU, Y., Einige Darstellungen analytischer Funktionen und ihre Anwendungen auf konforme Abbildung. Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 536–541.

[4] KOMATU, Y., On the integral representation of Herglotz and the trigonometric moment problem. Jap. Journ. Math. **29** (1959), 35–42.

[5] KOMATU, Y., On angular derivative. Kōdai Math. Sem. Rep. **13** (1961), 167–179.

[6] LANDAU, E., AND G. VALIRON, A deduction from Schwarz's lemma. Journ. London Math. Soc. (4) **4** (1929), 162–163.

[7] TSUJI, M., On a positive harmonic function in a half-plane. Jap. Journ. Math. **15** (1939), 277–285.

[8] WOLFF, J., Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz. C. R. Paris **183** (1926), 500–502.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY.