KŌDAI MATH. SEM. REP.
22 (1970), 114—121

SUR UNE RELATION ENTRE LA CROISSANCE ET LE NOMBRE DE VALEURS DEFICIENTES DE FONCTIONS ALGEBROIDES OU DE SYSTEMES[1]

PAR NOBUSHIGE TODA

1. Soit $f(z)$ une fonction algébroïde à n branches dans le plan fini définie par l'équation irréductible

$$A_0(z)f^n+A_1(z)f^{n-1}+\cdots+A_n(z)=0 \tag{1}$$

où les coefficients sont entiers sans zéros communs à tous et au moins un rapport entre eux est transcendant.

Ozawa [5] a posé un problème: S'il y a $n+1$ valeurs a_k $(k=1, 2, \cdots, n+1)$ telles que $\delta(a_k, f)=1$, est-ce que l'ordre de $f(z)$ est entier? On donne une solution positive pour ce problème dans ce mémoire.

On utilise des symboles usuels de la théorie de Nevanlinna-Selberg.

2. Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes,

$$u(re^{i\theta})=\max_{0\leqq j\leqq n} \log|f_j(re^{i\theta})|$$

et

$$T(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta-u(0).$$

On dit que $T(r, f)$ est la fonction caractéristique du système $f=(f_0, \cdots, f_n)$, qui est convexe par rapport à $\log r$ ([1]).

LEMME 1. *Pour tout* $i\neq j$ $(i, j=0, 1, \cdots, n)$,

$$T\left(r, \frac{f_j}{f_i}\right)-O(1)<T(r, f)<\sum_{k\neq j} T\left(r, \frac{f_k}{f_j}\right)+O(1).$$

Démonstration. 1) L'inégalité gauche est due à Cartan [1]. 2) L'inégalité droite. Il suffit de prouver le cas où $j=0$. En utilisant l'inégalité suite

$$u(z)\leqq \sum_{k=1}^{n} \log^+\left|\frac{f_k(z)}{f_0(z)}\right|+\log|f_0(z)|,$$

Received November 6, 1969.

1) Ce travail a été fait en partie avec l'aide de la fondation de Sakkokai (The Sakkokai Foundation).

on a

$$\begin{aligned}T(r,f)+u(0)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta\\&\leqq\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\log^+\left|\frac{f_k(re^{i\theta})}{f_0(re^{i\theta})}\right|d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f_0(re^{i\theta})|d\theta\\&=\sum_{k=1}^{n}m\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right)+N(r,0,f_0)+O(1)\\&=\sum_{k=1}^{n}T\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right)+N(r,0,f_0)-\sum_{k=1}^{n}N\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right)+O(1).\end{aligned}$$

Or, les fonctions $f_0, f_1, \cdots, f_n$ n'ont pas de zéros communs à toutes, par conséquent, on a

$$n(r,0,f_0)\leqq\sum_{k=1}^{n}n\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right)$$

de sorte que l'on a

$$N(r,0,f_0)\leqq\sum_{k=1}^{n}N\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right).$$

Cette inégalité conduit à

$$T(r,f)<\sum_{k=1}^{n}T\left(r,\frac{f_k}{f_0}\right)+O(1).$$

LEMME 2. *Soient* $A=(a_{ij})_{j=0,\cdots,n}^{i=0,\cdots,n}$ *une matrice régulière où* a_{ij} *sont constants* (*resp. polynomes*) *et*

$$(F_0,\cdots,F_n)^t=A(f_0,\cdots,f_n)^t,$$

alors, on a

$$T(r,f)-O(1)<T(r,F)<T(r,f)+O(1)$$

$$(\textit{resp.}\ \ T(r,f)-O(\log r)<T(r,F)<T(r,f)+O(\log r))$$

([1]).

LEMME 3. *Soit*

$$F(z)=\sum_{i=0}^{n}a_if_i(z)$$

une combinaison linéaire homogène à coefficients constants non tous nuls (*resp. de polynomes sans zéros communs à tous*). *Alors, on a*

$$N(r,0,F)<T(r,f)+O(1)$$

$$(\textit{resp.}\ \ N(r,0,F)<T(r,f)+O(\log r))$$

([1]).

DÉFINITION 1. Soit

$$F(z)=\sum_{i=0}^{n} a_i f_i(z)$$

une combinaison linéaire homogène à coefficients constants non tous nuls ou de polynomes sans zéros communs à tous. On dit que

$$\delta(F)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r,0,F)}{T(r,f)}$$

le défaut de la combinaison F, qui est non négatif plus petit que ou égal à un d'après le lemme 3.

DÉFINITION 2. On dit que le nombre

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

l'ordre du système $f=(f_0,\cdots,f_n)$ ou de la fonction caractéristique $T(r,f)$.

DÉFINITION 3.

$$K(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n} N(r,0,f_i)}{T(r,f)},$$

$$K(\rho)=\inf_{f} K(f) \qquad \text{où } f \text{ est d'ordre } \rho.$$

3. On donne dans ce paragraphe une réponse positive pour le problème d'Ozawa [5].

LEMME 4. *Soient $\Pi(z)$ un produit canonique de genre q et $n(t)=n(t,0,\Pi)$. Alors, on a*

$$\log M(r,\Pi)<c(q)r^q\left\{\int_0^r\frac{n(t)}{t^{q+1}}\,dt+r\int_r^\infty\frac{n(t)}{t^{q+2}}\,dt\right\}$$

où $c(0)=1$ et $c(q)=2(2+\log(q+1))$ si $q\geqq 1$ ([4]).

LEMME 5. *Soient $\phi(t)$ et $\psi(t)$ deux fonctions continues positives de t pour $t\geqq t_0\geqq 0$ et telles que*

1) *$\psi(t)$ n'est pas décroissante,*

2) $$\limsup_{t\to\infty}\phi(t)=+\infty,$$

3) $$\lim_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{\psi(t)}=0.$$

Alors, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que

1) $$t_0<r_1 \quad et \quad r_n \uparrow +\infty,$$

2) $$\phi(t)\leqq\phi(r_n) \quad (t_0\leqq t\leqq r_n) \quad et \quad \frac{\phi(t)}{\psi(t)}\leqq\frac{\phi(r_n)}{\psi(r_n)} \quad (r_n\leqq t)$$

pour tout n ([3], p. 101).

THÉORÈME 1.[2] *Soient* $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ *fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que l'ordre* ρ *du système* $f=(f_0,\cdots,f_n)$ *est fini non entier. Alors, on a*

$$K(f)\geqq K(\rho)$$

où $K(\rho)\geqq(1-\rho)$ *si* $0<\rho<1$ *et* $K(\rho)\geqq(q+1-\rho)(\rho-q)/\rho c(q)$ *si* $\rho>1$ *et* $q=[\rho]$.

Démonstration. En utilisant les lemmes 1 et 3, on peut supposer que les ordres de $f_0,\cdots,f_n$ sont au plus égal à ρ. Par conséquent, on peut écrire

$$f_i(z)=z^{p_i}\exp(P_i(z))\Pi_i(z)$$

où p_i est entier, $P_i(z)$ est polynome de degré q au plus et $\Pi_i(z)$ est produit canonique des zéros ($\neq 0$) de $f_i(z)$, de sorte que

$$T(r,f_i)\leqq T(r,\Pi_i)+O(r^q)+O(\log r),$$

en utilisant le lemme 4 et $T(r,\Pi_i)\leqq\log M(r,\Pi_i)$,

$$T(r,f_i)\leqq c(q)r^q\left\{\int_0^r\frac{n_i(t)}{t^{q+1}}dt+r\int_r^\infty\frac{n_i(t)}{t^{q+2}}dt\right\}+O(\log r)+O(r^q)$$

où $n_i(t)=n(t,0,\Pi_i)$, intégrant en partie

$$T(r,f_i)\leqq c(q)r^q\left\{q\int_0^r\frac{N_i(t)}{t^{q+1}}dt+(q+1)r\int_r^\infty\frac{N_i(t)}{t^{q+2}}dt\right\}+O(r^q)+O(\log r)$$

où

$$N_i(t)=\int_0^t\frac{n_i(t)}{t}dt.$$

Or, utilisant le lemme 1 ou de la définition de $T(r,f)$, on a

$$\begin{aligned}T(r,f)&\leqq\sum_{i=0}^n T(r,f_i)+O(1)\\&\leqq c(q)r^q\left\{q\int_0^r\frac{N(t)}{t^{q+1}}dt+(q+1)r\int_r^\infty\frac{N(t)}{t^{q+2}}dt\right\}+O(r^q)+O(\log r)\end{aligned}$$

où $N(t)=\sum_{i=0}^n N_i(t)$.

2) Ce théorème a été amélioré d'après une suggestion de Prof. Ozawa.

Si l'ordre de $N(r)$ est plus petit que ρ, l'ordre de $T(r,f)$ devient plus petit que ρ. C'est une contradiction, par conséquent, l'ordre de $N(r)$ est égal à ρ. On applique le lemme 5 à

$$\phi(t)=\frac{N(t)}{t^{\rho-\varepsilon}} \qquad \text{et} \qquad \psi(t)=t^{2\varepsilon}$$

où ε est un nombre positif quelconque suffisamment petit. Alors, on a

$$\begin{aligned} &N(t)\leqq\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon}N(r_n) \qquad (1\leqq t\leqq r_n), \\ (2)\qquad & \\ &N(t)\leqq\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho+\varepsilon}N(r_n) \qquad (r_n\leqq t<\infty) \end{aligned}$$

pour tout n.

Si $0<\rho<1$, $q=0$ et $c(q)=1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} T(r_n,f)&\leqq r_nN(r_n)\int_{r_n}^{\infty}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho+\varepsilon-2}dt+O(1) \\ &=\frac{N(r_n)}{1-\varepsilon-\rho}+O(1). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$K(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{T(r,f)}\geqq 1-\rho.$$

Quand $q>0$, $q<\rho<q+1$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} &T(r_n,f)-O(r_n{}^q) \\ &\leqq c(q)r_n^qN(r_n)\left\{q\int_0^{r_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho-\varepsilon}\frac{dt}{t^{q+1}}+(q+1)r_n\int_{r_n}^{\infty}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\rho+\varepsilon}\frac{dt}{t^{q+2}}\right\} \\ &=c(q)N(r_n)\left(\frac{q}{\rho-q-\varepsilon}+\frac{q+1}{q+1-\rho-\varepsilon}\right) \\ &=\frac{c(q)(\rho-(2q+1)\varepsilon)N(r_n)}{(\rho-q-\varepsilon)(q+1-\rho-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

De (2), il existe un nombre c positif tel que

$$0<c<\frac{N(r_n)}{r_n^{\rho-\varepsilon}}$$

pour tout $n\geqq n_0$. Par conséquent

$$r_n{}^q=o(N(r_n)) \qquad (n\to\infty).$$

En conséquence, on a

$$K(f)=\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r)}{T(r,f)}\geqq\frac{(q+1-\rho)(\rho-q)}{\rho c(q)}.$$

COROLLAIRE. *Si $K(f)=0$, l'ordre du système f est entier ou l'infini.*

THÉORÈME 2. *Soient $f_0,\cdots,f_n$ $(n\geqq1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{T(r,f)}{\log r}=+\infty.$$

S'il y a $n+1$ combinaisons $F_0,\cdots,F_n$ linéaires, homogènes à coefficients constants (ou de polynomes sans zéros communs à tous) de $f_0,\cdots,f_n$, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que

$$\delta(F_i)=1 \qquad (i=0,1,\cdots,n),$$

alors, l'ordre du système $f=(f_0,\cdots,f_n)$ est entier ou l'infini.

Démonstration. Soit

$$(F_0,\cdots,F_n)^t=A(f_0,\cdots,f_n)^t,$$

alors, $A\neq0$ (ou $\not\equiv0$) et d'après le lemme 2,

$$\text{l'ordre de } T(r,f)=\text{l'ordre de } T(r,F)$$

où $F=(F_0,\cdots,F_n)$. Parce que l'on peut supposer que les ordres de $f_0,\cdots,f_n$ n'excèdent pas celui de $T(r,f)$, les ordres de $F_0,\cdots,F_n$ n'excèdent pas celui de $T(r,F)$. Soit l'ordre de $T(r,f)$ fini.

$$0\leqq K(F)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\sum_{i=0}^{n}N(r,0,F_i)}{T(r,F)}\leqq n+1-\sum_{i=0}^{n}\delta(F_i)=0.$$

Par conséquent, d'après le corollaire, l'ordre de F, ou de f est entier.

Le théorème 2 s'applique en particulier aux algébroïdes en utilisant le lemme suivant.

LEMME 6. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1). *Alors,*

$$\left|T(r,f)-\frac{1}{n}T(r,A)\right|<O(1)$$

où $A=(A_0,\cdots,A_n)$ ([7]).

THÉORÈME 3. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1). *S'il y a $n+1$ valeurs $a_1,\cdots,a_{n+1}$ telles que*

$$\delta(a_i, f)=1 \qquad (i=1, \cdots, n+1),$$

l'ordre de la fonction $f(z)$ est entier ou l'infini.

Démonstration. Les vecteurs

$$(a_i^n, a_i^{n-1}, \cdots, 1) \qquad (i=1, \cdots, n+1)$$

sont linéairement indépendants où on considère

$$(a^n, a^{n-1}, \cdots, 1)=(1, 0, \cdots, 0) \qquad \text{si} \quad a=\infty.$$

De plus, d'après le lemme 6, on a

$$\delta(a, f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, a, f)}{T(r, f)}$$

$$=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, 0, F(z, a))}{T(r, A)}=\delta(F(z, a))$$

où $F(z, a)=A_0(z)a^n+\cdots+A_n(z)$ si $a\neq\infty$ et $F(z, \infty)=A_0(z)$.

Par conséquent, on obtient ce théorème tout de suite en vertu du théorème 2.

4. D'après le théorème fondamental de Selberg [6], le nombre de valeurs a telles que $\delta(a, f)=1$ est au plus égal à $2n$ où f est définie par (1). Dans le cas particulier, comme une conséquence du théorème 2, on a

THÉORÈME 4. *Soient $f_0, \cdots, f_n$ $(n\geqq 1)$ $n+1$ fonctions entières sans zéros communs à toutes et telles que l'ordre du système $f=(f_0, \cdots, f_n)$ n'est pas entier. Alors, le nombre de combinaisons F linéaires, homogènes à coefficients constants (ou de polynomes sans zéros communs à tous) de $f_0, \cdots, f_n$, linéairement indépendantes $n+1$ à $n+1$ et telles que*

$$\delta(F)=1$$

est au plus égal à n.

Le théorème 4 s'applique en particulier aux algébroïdes d'après le lemme 6.

THÉORÈME 5. *Soit $f(z)$ une fonction algébroïde définie par l'équation* (1) *dont l'ordre n'est pas entier. Alors, le nombre de valeurs a (resp. de polynomes P) telles que*

$$\delta(a, f)=1 \qquad (\textit{resp. } \delta(P, f)=1)$$

est au plus égal à n, où

$$\delta(P, f)=1-\limsup_{r\to\infty}\frac{N(r, P, f)}{T(r, f)},$$

$$N(r, P, f)=\frac{1}{n}N(r, 0, F(z, P)) \quad \textit{et} \quad F(z, P)=A_0(z)P^n+\cdots+A_n(z).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN, H., Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données. Mathematica **7** (1933), 5–33.

[2] DUFRESNOY, J., Théorie nouvelle des familles complexes normales; applications à l'étude des fonctions algébroïdes. Ann E. N. S. (3) **61** (1944), 1–44.

[3] HAYMAN, W. K., Meromorphic functions. Oxford Math. Monogr. (1964).

[4] NEVANLINNA, R., Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, Gauthier-Villars (1929).

[5] OZAWA, M., Deficiencies of an algebroid function. Kōdai Math. Sem. Rep. **21** (1969), 262–276.

[6] SELBERG, H. L., Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 8 (1934), 1–72.

[7] VALIRON, G., Sur la dérivée des fonctions algébroïdes. Bull. Soc. Math. **59** (1931), 17–39.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES,
UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.