UNE FRONTIÈRE DES SURFACES DE RIEMANN OUVERTES ET APPLICATIONS CONFORMES

PAR KAZUMICHI HAYASHI

Introduction.

Étant donné le fait que l'ensemble des différences de deux fonctions harmonique positives dans un ouvert d'une surface de Riemann est un espace vectoriel complètement réticulé selon l'ordre naturel, on s'aperçoit qu'il existe des théorèmes sur les fonctions harmoniques qui ne sont au fond que ceux des espaces vectoriels réticulés.

L'objet de ce travail est de construire une frontière des surfaces de Riemann ouvertes à partir de l'ensemble des fonctions harmoniques bornées, en se basant sur le théorème de représentation d'espaces vectoriels réticulés, et de montrer que cette frontière jouit de propriétés assez intéressantes pour expliquer les propriétés de la surface ou celles des applications conformes.

Dans la première partie, après un rappel de la terminologie et des résultats connus sur les espaces vectoriels réticulés, nous définirons la frontière et démontrerons quelques théorèmes concernant les propriétés fondamentales de la frontière. Parmi eux, signalons en particulier l'existence de la valeur limite des fonctions surharmoniques positives (au moins continues) en tout point de la frontière.

Dans la seconde partie, nous étudierons l'allure à la frontière des applications conformes d'une surface de Riemann dans une autre qui entraîne, comme cas particulier, celle des fonctions analytiques ou méromorphes et nous obtiendrons des résultats analogues à ceux déjà obtenus (par rapport aux autres frontières) par plusieurs auteurs (cf. [5], [7], [12], [19]). Et nous verrons, comme un des théorèmes principaux, la possibilité du prolongement d'une application lindelöfienne jusqu'à la frontière.

Les principaux résultats, surtout de la première partie, ont été résumés dans une note de Proceedings of the Japan Academy [9].

Tardivement l'auteur s'est rendu compte que la frontière dont il s'occupes est essentiellement identique à celle introduite par Feller [8] en langage probabiliste et crois que nous pouvons l'appeler aussi la "frontière de Feller".

En terminant cette introduction, l'auteur remercie sincèrement M. M. Ozawa

Reçu le 2 Juillet, 1962.

des fructueuses conversations avec qui il a eu.

Première Partie

1. Préliminaires.

Dans cette section, nous rappelons brièvement la terminologie, les notations et les résultats connus sur les espaces vectoriels réticulés qui seront utilisés dans la suite sans démonstration. Pour les détails, nous renvoyons le lecteur aux [2], [3] et [21].

Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels $\mathbf{R}$, on dit qu'il est un espace vectoriel réticulé, s'il est muni d'une structure d'ordre qui satisfait aux axiomes suivants:

(i) La relation $x \geqslant y$ entraîne $x+z \geqslant y+z$ quel que soit $z \in E$.

(ii) La relation $x \geqslant 0$ entraîne $\lambda x \geqslant 0$ pour tout scalaire $\lambda > 0$.

(iii) Deux éléments quelconques x, y de E admettent une borne supérieure $x \smile y$ et une borne inférieure $x \frown y$.

Rappelons d'abord que l'on pose:

$$x^+ = x \smile 0, \qquad x^- = (-x)^+, \qquad |x| = x \smile (-x);$$

alors on a

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-.$$

Notons ici que nous emploierons toujours le signe $|\ |$ en ce sens, et dans les sections suivantes où un élément de E sera une fonction harmonique f, $|f|$ est en général differente de la fonction qui est égale au module de f en chaque point.

Deux éléments x et y de E sont dits *orthogonaux* (ou *étrangers*) et notés $x \perp y$, si $|x| \frown |y| = 0$. x^+ et x^- sont les seuls éléments orthogonaux $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ tels que $x = y - z$. Si $x \perp y$ et $x \perp z$, on a $x \perp (y+z)$ et $x \perp \lambda y$ pour tout scalaire λ. Soient A une partie de E et $x \perp y$ pour tout $y \in A$, si A admet une borne supérieure, cette borne supérieure est orthogonale à x. Dire qu'une fonction harmonique positive est singulière (cf. [1], [18]) signifie qu'elle est orthogonale à toutes les fonctions harmoniques bornées.

On dit qu'un espace vectoriel ordonné E est *complètement réticulé,* si toute partie majorée non vide de E admet une borne supérieure dans E. On dit qu'un élément u de E est un *élément unité* (archimédien) si pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que

$$-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u.$$

Dans un espace vectoriel réticulé E, on dit qu'un sous-espace vectoriel N est un *idéal* (*sous-espace épais* dans [3]) de E s'il satisfait à la condition suivante:

(1.1) Les relations $x \in N$, $y \in E$ et $|y| \leqslant |x|$ entraînent $y \in N$.

On dit que N est un idéal *propre* s'il n'est pas identique à E tout entier. Remarquons que si $E \neq \{0\}$ possède un élément unité u, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal N soit propre est $u \notin N$. Soit N un sous-espace vectoriel de E, pour que E/N soit un espace vectoriel réticulé pour les structures induites, il faut et il suffit que N soit un idéal. Soit A une partie de E, on désigne par A' l'ensemble des éléments orthogonaux à tous les éléments de A. Alors A' est un idéal de E et si E est complètement réticulé, on a

$$E = A' \dot{+} A'' \qquad \text{(somme directe ordonnée)},$$

où $A'' = (A')'$. Pour que $A'' = A$, il faut et il suffit que pour toute partie non vide X de A majorée dans E, la borne supérieure de X appartient à A.

On dit qu'un idéal N est *maximal*, si $N \neq E$ et s'il n'existe aucun idéal propre N' tel que $N \subsetneqq N'$. Si N est un idéal maximal d'un espace vectoriel réticulé E avec un élément unité, E/N est isomorphe à l'espace vectoriel réticulé $\mathbf{R}$ des nombres réels et l'image de u est le nombre 1. Donc si l'on note $x^*(N)$ l'image de x par l'application canonique: $E \to E/N (\cong \mathbf{R})$, la correspondance π: $x \to x^*(N)$ nous donne une application de E sur un espace vectoriel réticulé $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ de fonctions bornées à valeurs réelles définies sur l'ensemble $\mathfrak{N}$ des idéaux maximaux de E. On munit $\mathfrak{N}$ de la topologie la moins fine qui rend continues toutes les $x^*(N)$ $(x \in E)$ et on voit que $\mathfrak{N}$ est un espace compact.

Théorème de représentation. (Yosida [21]) *Soit E un espace vectoriel réticulé avec un élément unité u, l'application: $x \to x^*(N)$ est un isomorphisme en tant qu'espace vectoriel réticulé de E sur $\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ tel que*

(i) $|x| \to |x^*(N)|$,

(ii) $u(N) \equiv 1$,

(iii) *$\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ sépare les points de $\mathfrak{N}$, à savoir: pour tout couple d'éléments différents $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$, il existe un x de E tel que $x^*(N_1) = 1$ et $x^*(N_2) = 0$.*

L'espace $\mathcal{C}(\mathfrak{N})$ de toutes les fonctions continues sur $\mathfrak{N}$ est un espace vectoriel réticulé et est aussi un espace de Banach pour la norme $\|f\| = \sup_{N \in \mathfrak{N}} |f(N)|$ $(f \in \mathcal{C}(\mathfrak{N}))$.

Théorème. ([21]) *$\mathcal{F}(\mathfrak{N})$ est partout dense dans $\mathcal{C}(\mathfrak{N})$ pour la topologie de la norme. En outre, si E est complet pour la topologie définie par la norme $|||x||| = \inf \lambda$ $(-\lambda u \leqslant x \leqslant \lambda u)$, π est une isométrie et est une application de E sur $\mathcal{C}(\mathfrak{N})$.*

Enfin, remarquons qu'étant donné un idéal propre quelconque de E avec élément unité, il existe toujours au moins un idéal maximal qui le contient et aussi le fait que si N est un idéal maximal, $|x| \frown |y| \in N$ (*a fortiori* $x \perp y$) entraîne au moins $x \in N$ ou $y \in N$.

2. Définition de la frontière S^*.

Soit S une surface de Riemann ouverte, on désigne par $HB(S)$ l'ensemble des fonctions harmoniques uniformes bornées dans S. Lorsque S est parabolique (c'est-à-dire $S \in O_G$) on pose, par convention, $HB(S)=\{0\}$, quoi qu'en réalité toute fonction constante appartient toujours à $HB(S)$.

On sait que $HB(S)$ est un espace vectoriel complètement réticulé, si l'on pose:

$$(f+g)(p)=f(p)+g(p), \qquad (\lambda f)(p)=\lambda(f(p))$$

(où f, $g \in HB(S)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $p \in S$),

$$f \geqslant g \Longleftrightarrow f(p) \geqslant g(p) \qquad \text{pour tout} \quad p \in S.$$

$f \smile g$ (resp. $f \frown g$) n'est que la plus petite majorante (resp. la plus grande minorante) harmonique de f et de g. Toute fonction constante est un élément unité dans $HB(S)$, mais nous adopterons, une fois pour toute, la fonction identiquement égale à 1 comme élement unité de $HB(S)$ et la notons u.

THÉORÈME 2.1. *Il existe une application biunivoque π de $HB(S)$ sur $C(S^*)$, S^* étant l'espace des idéaux maximaux de $HB(S)$ (muni de la topologie susdite). π est un isomorphisme en tant qu'espace vectoriel réticulé et est aussi une isométrie.*

Puisque $HB(S)$ est complet pour la topologie de la norme $|||f|||$ (qui est égale à $\sup_{p\in S}|f(p)|$, d'après notre choix d'élément unité), c'est une conséquence directe du théorème de représentation.

DÉFINITION. Nous appelons S^* *la frontière* de la surface de Riemann S.

Si S est parabolique, S^* étant vide, S ne possède pas de frontière en notre sens. Donc, dans le reste de la première partie, nous supposerons que S soit une surface hyperbolique et nous allons montrer que S^* mérite d'être appelé la frontière de S. Nous désignerons aussi les points de S^* par p, puisque nous considèrerons bientôt $S+S^*$ comme un entier.

3. Mesures sur la frontière.

Soit p un point fixe de S, la forme linéaire positive

$$\mu_p(f)=(\pi^{-1}f^*)(p) \qquad (f^* \in C(S^*))$$

définit une mesure de Radon positive μ_p sur S^* de masse totale égale à 1 (cf. [3]). Puisque le fait qu'un sous-ensemble de S^* est μ_p-négligeable ou qu'une fonction sur S^* est μ_p-sommable ne dépend pas du choix du point p, nous écrirons souvent simplement μ au lieu de μ_p. On dit, d'après [6], qu'une mesure μ positive sur S^* est *normale*, si pour toute famille filtrante croissante $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ des fonctions numériques continues sur S^*, de borne supérieure continue f, $\mu(f)$ est la borne supérieure des $\mu(f_\iota)$. La mesure μ_p définie ci-dessus est normale, grâce au principe de Harnack (cf. [1]).

PROPOSITION 3.1. *S^* est un espace hyperstonien de genre dénombrable.*

D'abord $\mathcal{C}(S^*)$ (isomorphe à $HB(S)$) étant complètement réticulé, S^* est un espace stonien. D'autre part, un ensemble ouvert et fermé non vide de S^* n'est pas μ-négligeable (conséquence de l'isomorphie de π). Il s'ensuit que toute famille d'ensembles ouverts et fermés non vides deux à deux disjoints est au plus dénombrable. Donc S^* est un espace hyperstonien de genre dénombrable (pour la définition de cette notion nous renvoyons à [6]).

REMARQUE. Soient $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ une famille majorée filtrante croissante de fonctions de $HB(S)$ et $f(p)=\sup_{\iota\in I}f_\iota(p)$ $(p\in S)$, on sait que $f\in HB(S)$ et est donc égale à $\cup_{\iota\in I}f_\iota$, mais la fonction égale à $\sup_{\iota\in I}(\pi f_\iota)(p)$ $(p\in S^*)$ n'est pas en général continue sur S^*, et donc pas égale à $\cup_{\iota\in I}\pi f_\iota$, cependant elle n'en diffère que sur un ensemble μ-négligeable (cf. [6]).

4. La frontière G^* d'un ouvert G de S.

Soit G un ouvert (non nécessairement connexe) de S, tel que son adhérence $\bar{G}$ ne soit pas compact et que le complémentaire ne soit pas polaire. On désigne par $H_0B(G)$ l'ensemble des fonctions harmoniques uniformes bornées dans G qui s'annulent continûment en tout point-frontière régulier de G et par $\omega_G(p)$ ou simplement ω_G) la mesure harmonique de la frontiere idéale de S par rapport à G. Dans la plus part des applications, il suffit de considérer des G de frontière relative ∂G très régulière (par exemple, formée d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs analytiques ne s'accumulant qu'à la frontière idéale de la surface).
On dit que G est parabolique (ou $G\in SO_{HB}$), si $\omega_G\equiv 0$, donc $H_0B(G)=\{0\}$ et que G est hyperbolique, si $\omega_G\not\equiv 0$.

$H_0B(G)$ est aussi un espace vectoriel complètement réticulé avec l'élément unité ω_G et encore le théorème de représentation s'applique pour obtenir l'isomorphisme:

$$\pi_G\colon\ H_0B(G)\to\mathcal{C}(G^*),$$

où G^* est l'espace des idéaux maximaux de $H_0B(G)$.

DÉFINITION. Nous appelons G^* la *frontière* de G.

Il est évident que pour que G soit parabolique, il faut et il suffit que G^* soit vide.

Soit f une fonction positive de $HB(S)$, l'enveloppe supérieure des fonctions de $H_0B(G)$ majorées (dans G) par f sera notée T_Gf et pour un élément quelconque de $HB(S)$ on definit l'application T_G par

$$T_Gf=T_G(f^+)-T_G(f^-).$$

Soit inversement f une fonction positive de $H_0B(G)$, la fonction $\hat{f}$, égale à f

dans G et à 0 dans $S-G$, sauf aux point-frontière irréguliers de ∂G, où on la prend égale à sa limite supérieure dans G, est sousharmonique. La plus petite majorante harmonique (dans S) de $\hat{f}$ sera notée $R_G f$ et pour une f quelconque de $H_0B(G)$ on pose:

$$R_G f = R_G(f^+) - R_G(f^-).$$

Il est facile à voir que T_G est un homomorphisme (en tant qu'espace vectoriel réticulé) de $HB(S)$ sur $H_0B(G)$ et que R_G est un isomorphisme de $H_0B(G)$ dans $HB(S)$. (Ici, on voit la légitimité de notre convention sur $HB(S)$ pour le cas de S parabolique.) On sait aussi les propriétés:

(i) $T_G R_G T_G = T_G$,

(ii) $T_G R_G =$ application identique,

(iii) $\omega_G = T_G u$

(cf. [1], [5], [10]. T_G et R_G sont notées respectivement par I_G et E_G dans [5] et par λ_G et μ_G dans [10].)

PROPOSITION 4.1. *On a la décomposition de $HB(S)$ en somme directe*:

$$HB(S) = (I - R_G T_G)(HB(S)) \dot{+} R_G(H_0B(G)) \tag{4.1}$$

(*I: application identique de $HB(S)$ sur lui-même). C'est aussi une décomposition orthogonale et le premier terme du second membre est égal à* $\ker T_G$ (*le noyau de l'application* T_G).

Les autres énoncés étant évidents à cause des propriétés de T_G et de R_G citées plus haut, le seul à démontrer est que c'est une décomposition orthogonale. Pour cela il suffit de remarquer que les deux termes du second membre sont des idéaux de $HB(S)$, ce qui suit de la propriété de R_G: si $f \geqslant 0$ satisfait à $R_G g \geqslant f$ avec un $g \in H_0B(G)$, il existe une fonction $f_0 \in H_0B(G)$ telle que $f = R_G f_0$ (cf. [5] ou [10]).

La proposition 4.1 nous permet d'identifier les idéaux maximaux de $H_0B(G)$ avec ceux de $HB(S)$ qui contient $\ker T_G$ et de considérer G^* comme un sous-ensemble de S^* ou plus précisément comme la portion de S^* contigüe à G.

LEMME 4.2. *G^* est un sous-ensemble ouvert et fermé de S^*.*

On a

$$(\pi u)(p) = 1 = (\pi(u - R_G\omega_G))(p) + (\pi(R_G\omega_G))(p) \qquad (p \in S^*).$$

Le fait que tout idéal maximal de $HB(S)$ qui constitue $S^* - G^*$ contient $R_G(H_0B(G))$ (puisqu'un idéal maximal contient au moins un des deux éléments orthogonaux) et la définition de la valeur de $\pi(R_G\omega_G)$ en un point de l'espace des idéaux maximaux (cf. §1) implique que

$$\pi(R_G\omega_G)(p) = 0, \qquad p \in S^* - G^*.$$

De même, on voit que

$$\pi(u - R_G\omega_G)(p) = 1, \qquad p \in G^*.$$

Donc on a

$$\pi(R_G\omega_G)(p) = 1, \qquad p \in G^*.$$

La fonction $\pi(R_G\omega_G)$ qui est égale à 1 dans G et nulle ailleurs devant être continue dans S^*, on a la conclusion.

REMARQUE. G^* peut être caractérisé comme le sous-ensemble (de S^*) où $\pi(R_G\omega_G)$ est égale à 1.

LEMME 4.3. *Soient G_1 et G_2 deux ouverts de S tels que*

$$G_1 \supseteqq G_2.$$

Alors on a

$$G_1^* \supseteqq G_2^*.$$

Il est évident que

$$\omega_{G_1}(p) \geqslant \omega_{G_2}(p), \qquad p \in G_2.$$

Donc

$$R_{G_1}\omega_{G_1} \geqslant R_{G_2}\omega_{G_2} \qquad \text{dans} \quad S,$$

ou

$$u - R_{G_1}\omega_{G_1} \leqslant u - R_{G_2}\omega_{G_2} \quad \text{dans} \quad S.$$

Puisque tout élément de $\ker T_{G_i}$ est majoré par un multiple de $u - R_{G_i}\omega_{G_i}$ ($i = 1, 2$), on déduit de la dernière inégalité que

$$\ker T_{G_1} \subseteqq \ker T_{G_2}.$$

D'où, on obtient

$$G_1^* \supseteqq G_2^*.$$

PROPOSITION 4.4. *Soient G_1 et G_2 deux ouverts quelconques de S. Alors on a*

$$(G_1 \cdot G_2)^* = G_1^* \cdot G_2^*. \tag{4.2}$$

En particulier, si $G_1 \cdot G_2 = \emptyset$, on a $G_1^* \cdot G_2^* = \emptyset$.

D'après le lemme précédent, on a

$$(G_1 \cdot G_2)^* \subseteqq G_1^* \cdot G_2^*.$$

Donc, il suffit de monter l'inclusion inverse.

La comparaison de $1 + \omega_{G_1 \cdot G_2}$ et de $\omega_{G_1} + \omega_{G_2}$ sur $\partial(G_1 \cdot G_2)$ nous donne facilement

$$u + R_{G_1 \cdot G_2}\omega_{G_1 \cdot G_2} \geqslant R_{G_1}\omega_{G_1} + R_{G_2}\omega_{G_2},$$

d'où

$$(u - R_{G_1}\omega_{G_1}) + (u - R_{G_2}\omega_{G_2}) \geqslant u - R_{G_1 \cdot G_2}\omega_{G_1 \cdot G_2}.$$

Soit N un idéal maximal qui constitue un point de $G_1^* \cdot G_2^*$, alors

$$N \ni u - R_{G_i}\omega_{G_i} \qquad (i = 1, 2).$$

N étant un idéal, on a

$$N \ni u - R_{G_1 \cdot G_2} \omega_{G_1 \cdot G_2}.$$

Donc le point de S^* déterminé par N appartient à $(G_1 \cdot G_2)^*$.

PROPOSITION 4.5. *Soient G_1 et G_2 deux ouverts quelconques de S. Alors on a*

$$(G_1 + G_2)^* \supseteqq G_1^* + G_2^*. \tag{4.3}$$

Si $G_1 \cdot G_2 = \emptyset$, on a l'égalité.

La première partie étant une conséquence triviale du lemme 4.3, démontrons la seconde partie. Si $G_1 \cdot G_2 = \emptyset$, on a

$$\hat{\omega}_{G_1+G_2} = \mathrm{Max}\,(\hat{\omega}_{G_1}, \hat{\omega}_{G_2}).$$

($\hat{\omega}$ signifie le prolongement sousharmonique de ω dans S entier. cf. §4.)
Alors, il est facile à voir que

$$R_{G_1+G_2} \omega_{G_1+G_2} = R_{G_1} \omega_{G_1} \smile R_{G_2} \omega_{G_2}.$$

Donc, on a

$$(u - R_{G_1} \omega_{G_1}) \frown (u - R_{G_2} \omega_{G_2}) = u + (-R_{G_1} \omega_{G_1}) \frown (-R_{G_2} \omega_{G_2})$$
$$= u - (R_{G_1} \omega_{G_1}) \smile (R_{G_2} \omega_{G_2}) = u - R_{G_1+G_2} \omega_{G_1+G_2}.$$

Soit N un idéal maximal qui contient $\ker T_{G_1+G_2}$, alors

$$N \ni u - R_{G_1+G_2} \omega_{G_1+G_2},$$

d'où

$$N \ni u - R_{G_1} \omega_{G_1} \quad \text{ou} \quad N \ni u - R_{G_2} \omega_{G_2},$$

autrement-dit

$$N \supseteqq \ker T_{G_1} \quad \text{ou} \quad N \supseteqq \ker T_{G_2}.$$

Donc, on a

$$(G_1 + G_2)^* = G_1^* + G_2^*.$$

REMARQUE. Puisqu'il est facile à construire deux domaines paraboliques en forme spirale du disque unité dont la réunion est le disque entier, on ne peut remplacer $\supseteqq$ dans (4.3) par égalité.

PROPOSITION 4.6. *Soient G_i $(i = 1, 2, \cdots)$ des ouverts de S tels que*
(i) $G_i \cdot G_j = \emptyset$ $\quad (i \neq j)$,
ou
(ii) $G_i \subseteqq G_{i+1}$ $\quad (i = 1, 2, \cdots)$.
Alors on a

$$(\sum_i G_i)^* = \overline{\sum_i G_i^*}. \tag{4.4}$$

L'inclusion inverse étant évidente, il suffit de montrer que

$$(\sum_i G_i)^* \subseteqq \overline{\sum G_i^*}.$$

D'abord, le même raisonnement qu'à la proposition précédente, nous montre pour les deux cas,

$$R_{\sum G_i}\omega_{\sum G_i} = \bigcup_i R_{G_i}\omega_{G_i}.$$

Puisque l'ensemble $(\sum G_i)^* - \overline{\sum G_i^*}$ est ouvert et fermé (S^* étant stonien, l'adhérence d'un ouvert est ouvert), s'il n'est pas vide il n'est pas μ-négligeable. Or, $\sum G_i^*$ est justement l'ensemble où l'enveloppe supérieure en chaque point des fonctions $\{\pi R_{G_i}\omega_{G_i}\}$ est égale à 1. Ce qui contredit la remarque après la proposition 3.1.

5. La topologie de $S+S^*$.

Maintenant, nous sommes prêts à définir la topologie sur la réunion $S+S^*$, telle que S^* mérite d'être appelé la frontière de S.

Nous adoptons comme système fondamental de voisinages d'un point p de $S+S^*$,

i) *si $p \in S$, un système fondamental de voisinages de p dans S,*

ii) *si $p \in S^*$, la famille d'ensembles $\{G+G^*\}$, où G parcourt tous les ouverts (non-nécessairement connexe) de S tels que $p \in G^*$.*

Remarque. J'ai écrit dans [9] que G dans ii) parcourt les domaines non-compacts, mais ce n'est pas suffisant. A cause de la proposition 4.6, un point de G^*, s'il n'est pas isolé dans S^*, n'est pas nécessairement un point de la frontière d'une des composantes connexes de G.

Théorème 5.1. *$S+S^*$ est un espace topologique séparé connexe. S est dense dans $S+S^*$ et S^* est compact.*

Les autres assertions étant plus ou moins évidentes, il suffit de montrer que S^* est compact. S^* étant un espace stonien, les ensembles à la fois ouverts et fermés forment la base des ensembles ouverts, donc la topologie de $S+S^*$ induite sur S^* est moins fine que celle de S^* en tant qu'espace des idéaux maximaux. Parsuite ces deux topologies sur S^* coïncident et S^* est compact dans $S+S^*$.

Notons ici que S^* est compact, mais $S+S^*$ n'est pas, en général, compact. Autrement-dit, $S+S^*$ n'est pas nécessairement un compactifié de S.

6. Valeurs limites à la frontière.

Lemme 6.1. *Soient N un idéal propre de $HB(S)$ et $U_f^n \equiv \{p \mid |f|(p) < 1/n\}$. La famille d'ensembles $\{U_f^n\}$ $(n=1, 2, \cdots; f \in N)$ est une base d'un filtre sur S.*

Puisqu'un idéal contient $|f|$ en même temps que f, on peut supposer $f \geqslant 0$. Si $U_f^n = \emptyset$, alors $f \geqslant (1/n)u$ et donc $u \in N$, ce qui contredit l'hypothèse que N est un idéal propre. L'intersection de U_f^n et U_g^m $(f, g \in N)$ contient U_{f+g}^{n+m}, donc elle n'est pas vide.

PROPOSITION 6.2. *Soient p_N un point de S^* déterminé par l'idéal maximal N et $f \in N$. Alors on a*

$$\lim_{p \to p_N} f(p) = 0 \qquad (p \in S).$$

Soit $G = \{p \mid |f|(p) < 1/n\}$ $(f \in N)$, alors on obtient, par un raisonnement simple,

$$|f| \geqslant \frac{1}{n}(u - R_G \omega_G).$$

Donc, on a

$$u - R_G \omega_G \in N$$

et

$$(u - R_G \omega_G)(p_N) = 0.$$

D'où, on a

$$p_N \in G^*.$$

Par suite le filtre à base $\{U_f^n\}$ $(n = 1, 2 \cdots; f \in N)$ est moins fin que le filtre des voisinages du point p_N restreints sur S. D'où, on a la proposition.

THÉORÈME 6.3. *Toute fonction f de $HB(S)$ admet un prolongement continu $\tilde{f}$ sur $S + S^*$ et*

$$\tilde{f}(p) = (\pi f)(p) \qquad (p \in S^*).$$

Prenons un point $p_N \in S^*$. Alors on a

$$f = \lambda u + g, \qquad \text{où} \quad \lambda = \pi f(p_N) \quad \text{et} \quad g \in N,$$

d'après la définition de la valeur de πf en un point de S^* (cf. § 1). Donc, on a

$$\lim_{p \to p_N} f(p) = \lambda = (\pi f)(p_N) \qquad (p \in S).$$

La continuité de f dans $S + S^*$ est presque évidente.

Ce théorème implique, en d'autres termes, que le problème de Dirichlet pour la donnée finie et continue sur S^* est toujours résoluble et on obtient ainsi toute fonction de $HB(S)$.

PROPOSITION 6.4. *Soit f une fonction harmonique singulière* (cf. [1], [18]) *sur S. Alors on a*

$$\lim_{p \to p^*} f(p) = 0 \qquad (p \in S),$$

en tout point p^* de S^*.

Soit $G_n = \{p \mid f(p) < 1/n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, alors on a

$$f > \frac{1}{n}(u - R_{G_n} \omega_{G_n}).$$

f étant singulière, $u - R_{G_n} \omega_{G_n}$ doit être identiquement nulle, ce qui entraîne que

$$G_n^* = S^*. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

PROPOSITION 6.5. *Soit $U^\nu(p)$ un potentiel continu d'une mesure positive ν sur S. Alors on a*

$$\lim_{p\to p^*} U^\nu(p)=0 \qquad (p\in S),$$

en tout point $p^*\in S^*$.

La démonstration tout à fait identique à la proposition précédente est valable.

REMARQUE. Comme on voit, par la démonstration, la continuité de U^ν n'est pas absolument nécessaire. Il suffit que les G_n soient ouverts. D'ailleurs, tout récemment, S. Mori a démontré, pour sa frontière très voisine à la notre (cf. [17]), une proposition parallèle sans hypothèse de continuité.

S^* étant un espace hyperstonien de genre dénombrable, une fonction μ-sommable est égale, à un ensemble μ-négligeable près, à une fonction continue à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$ (=la droite numérique complétée par $+\infty$ et $-\infty$). Par suite, nous notons par $L^\alpha_\mu(S^*)$ $(\alpha\geqq 1)$ l'espace vectoriel réticulé de fonctions continues à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$ de puissance α-ième sommable par rapport à μ.

THÉORÈME 6.6. *Il existe un isomorphisme entre l'espace des fonctions harmoniques quasi-bornées* (cf. [1], [18]) *sur S et $L^1_\mu(S^*)$. Cette correspondance nous donne aussi la valeur limite des fonctions harmoniques quasi-bornées en chaque point de S^*.*

Soient f une fonction quasi-bornée positive et

$$F_n(p)=\mathrm{Min}\,(f(p),\ nu(p)) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots;\ p\in S).$$

$\tilde{F}=\sup_n\tilde{F}_n$ est égale à f dans S et au moins semicontinue inférieurement dans $S+S^*$. (Puisque le théorème 6.3 et la proposition 6.5 entraînent que toute fonction surharmonique bornée continue admet un prolongement continu dans $S+S^*$.) D'autre part, l'ensemble $G=\{p\,|\,\tilde{F}(p)<k\}$ (k: un nombre reél arbitraire), étant égal à $\{p\,|\,\tilde{F}_n(p)<k\}$ $(n>k)$, est ouvert. Donc $\tilde{F}$ est continue dans $S+S^*$. Par suite, on a le droit d'écrire $\tilde{f}$ au lieu de $\tilde{F}$. La μ-sommabilité de $\tilde{f}(p)$ sur S^* est évidente et la normalité de la mesure μ implique inversementqu'à toute fonction de $L^1_\mu(S^*)$ correspond une fonction quasi-bornée.

REMARQUE. Pour l'addition des deux éléments de $L^1_\mu(S^*)$, on peut avoir, de première vue, des points de valeurs indéterminées, mais on peut les éviter en revenant aux fonctions quasi-bornées qui leurs correspondent. (La partie positive et la partie négative d'une fonction quasi-bonrnée ne peuvent être infinies en un même point de S^*.)

On a aussi aisément la

PROPOSITION 6.7. *Il existe un isomorphisme entre $HM_\alpha(S)$* $(\alpha\geqq 1)$ (cf. [18])

et $L_\mu^\alpha(S^*)$, *et cette correspondance nous donne la valeur limite à la frontière.*

En rassemblant les propositions 6.4, 6.5 et les théorèmes 6.3, 6.6, on obtient le

THÉORÈME 6.8. *Soit* $F(p)$ *une fonction surharmonique continue à valeurs dans* $\bar{\mathbf{R}}$ *et positive sur* S. *Alors,*

$$\lim_{p \to p^*} F(p) \qquad (p \in S)$$

existe en tout point p^* *de* S^*.

Sa valeur-frontière est égale à celle de la partie quasi-bornée de la plus grande minorante harmonique.

On a, en particulier, le

COROLLAIRE 6.9. *La valeur-frontière d'une fonction surharmonique positive et continue ne peut être infinie que sur un ensemble* μ*-négligeable de* S^*.

7. Propriétés élémentaires de la frontière S^*.

LEMME 7.1. *Étant donnée une fonction* f *de* $HB(S)$, *pour qu'il existe un idéal propre de* $HB(S)$ *qui contient* f, *il faut et il suffit que*

$$\inf_{p \in S} |f|(p) = 0.$$

On peut toujours supposer que f soit positive. La condition est nécessaire, puisque si $\inf_{p \in S} f = m \gneqq 0$, alors $f \geqslant mu$ et l'idéal qui contient f doit aussi contenir u, ce qui est absurde.

Réciproquement, si $\inf_{p \in S} f = 0$, soit N l'ensemble des fonctions de $HB(S)$ qui tendent vers 0 suivant le filtre engendré par $U_n = \{p \,|\, f(p) < 1/n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, il est évidemment un idéal propre $(N \not\ni u)$ qui contient f, donc la condition est suffisante.

PROPOSITION 7.2. (Le principe du maximum.) *Soient* $f \in HB(S)$ *et* $M = \sup_{p \in S} f(p)$ *(resp.* $m = \inf_{p \in S} f(p)$*). Alors il existe un point* p_1 *(resp.* p_2*) de* S^* *tel que* $f(p_1) = M$ *(resp.* $f(p_2) = m$*).*

Soit $g_1 = M - f$ (resp. $g_2 = f - m$), alors $\inf_{p \in S} g_i = 0$ $(i = 1, 2)$. D'après le lemme prédédent, il existe un idéal propre qui contient g_1 (resp. g_2), donc aussi un idéal maximal N_1 (resp. N_2) qui contient g_1 (resp. g_2). Soit p_1 (resp. p_2) le point de S^* déterminé par N_1 (resp. N_2). Il est évident que $f(p_1) = M$ (resp. $f(p_2) = m$).

Nous disons, d'après [10], qu'une fonction harmonique f est une *mesure harmonique généralisée,* si

$$f \frown (u - f) = 0.$$

PROPOSITION 7.3. *Il existe une correspondance biunivoque entre les mesures harmoniques généralisées sur* S *et les ensembles à la fois ouverts et* *fermés de* S^*. *En particulier, il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions minimales* (*non mutuellement proportionnelles*) (cf. [1], [18]) *de* $HB(S)$ *et les points isolés de* S^*.

Soit f une mesure harmonique généralisée. Le théorème 2.1 et le fait que, pour deux fonction f^* et g^* de $C(S^*)$, $(f^* \frown g^*)(p^*)$ est égale à $\mathrm{Min}(f^*(p^*), g^*(p^*))$ impliquent que πf qui est un élément de $C(S^*)$ ne peut prendre que les valeurs 1 et 0 sur S^*. Il suffit de prendre l'ensemble où πf est égale à 1, pour avoir la correspondance biunivoque. Si f est minimale, on voit que l'ensemble où πf est égale à 1 réduit à un seul point, puisque sinon on peut trouver une fonction positive continue sur S^* plus petite que f et pas égale à un multiple de f.

Nous disons, d'après [4], que S appartient à la classe O_{HB_n} $(n=1, 2, \cdots)$, s'il existe au plus n fonctions linéairement indépendantes de $HB(S)$.

COROLLAIRE 7.4. *Pour que* $S \in O_{HB_n} - O_{HB_{n-1}}$, *il faut et il suffit que* S^* *consiste en* n *points isolés.*

On désigne par $HD(S)$ l'ensemble des fonctions harmoniques uniformes sur S à intégrale de Dirichlet finie.

COROLLAIRE 7.5. *S'il existe une fonction HD-minimale* (cf. [4]) *sur* S, *alors il existe un ensemble ouvert et fermé de* S^* *tel que sur lequel toute fonction de* $HD(S)$ *possède la valeur limite constante.*

Soit f une fonction HD-minimale. On peut supposer que f soit positive et $\sup_{p \in S} f = 1$. Alors, le fait que $HD(S)$ est aussi un espace vectoriel réticulé selon l'ordre naturel entraîne tout de suite que f doit être une mesure harmonique généralisée. L'ensemble de S^* où πf est égale à 1 possède la propriété de l'énoncé.

Parallèlement au théorème 6.3, on peut montrer l'existence du prolongement continu $\tilde{f}$ sur $G+G^*$ (muni de la topologie induite par celle de $S+S^*$) de toute fonction f de $H_0B(G)$ et on a la

PROPOSITION 7.6. (i) *Soient* G *un ouvert de* S *et* $f \in HB(S)$, *alors*

$$\widetilde{(T_G f)}(p) = \tilde{f}(p) \qquad (p \in G^*).$$

(ii) *Soient* G *un ouvert de* S *et* $f \in H_0B(G)$, *alors*

$$\widetilde{(R_G f)}(p) = \begin{cases} \tilde{f}(p) & (p \in G^*), \\ 0 & (p \in S^* - G^*). \end{cases}$$

Soit $G_n' = \{p \mid \omega_G(p) > 1 - 1/n\}$. On a, dans G_n',

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\omega_{G_n'} \leqslant \omega_G,$$

ou autrement,

$$1-\omega_G \geqslant \frac{1}{n}(1-\omega_{G_n'}).$$

D'où, on a

$$u-R_G\omega_G \geqslant \frac{1}{n}(u-R_{G_n'}\omega_{G_n'}).$$

Alors, si N contient $\ker T_G$, il contient aussi $\ker T_{G_n'}$ ou autrement-dit $p_N \in G^*$ entraîne $p_N \in G_n'^*$. Ainsi, on a démontré (i) pour le cas $f=u$.

(ii), pour le cas $f=\omega_G$, est une conséquence de la remarque après le lemme 4.2 et le théorème 6.3.

Pour f quelconque, la proposition suit de l'isomorphie (resp. l'homomorphie) de T_G (resp. R_G).

En considérant les fonctions à intégrale de Dirichlet finie à la place des fonctions bornées, les notations SO_{HD}, O_{HDn} $(n=1, 2, \cdots)$ ou $H_0D(G)$ s'interprètent facilement (cf. [4]).

PROPOSITION 7.7. (cf. [4], [15], [16]) *S'il existe $n+1$ domaines disjoints non vides G_i $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ de S tels que $G_0 \notin SO_{HB}$ et $G_i \notin SO_{HB}$ (resp. $G_i \notin SO_{HD}$) $(i=1, 2, \cdots, n)$, alors S n'appartient pas à O_{HBn} (resp. O_{HDn}).*

Soient f_i $(\not\equiv 0) \in H_0B(G_i)$ (resp. $\in H_0D(G_i)$) $(i=1, 2, \cdots, n)$. $u-\sum_i R_{G_i}f_i$, $R_{G_i}f_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ sont évidemment indépendantes, d'après leurs valeurs sur la frontière S^*.

SECONDE PARTIE

8. Définition de S_φ^*.

Soient S et S' deux surfaces de Riemann et φ une application conforme (non nécessairement biunivoque, cf. [10], [18], [19]) de S dans S'. L'object principal de cette partie étant l'allure à la frontière des applications conformes, on suppose désormais que S soit hyperbolique, mais S' peut être quelconque (parabolique ou même compacte).

Soit $\{S_n'\}_{n=1}^\infty$ une exhaustion de S' (lorsque S' est compacte, on considère une exhaustion de $S'-\{p\}$, S' ôté d'un point p). Posons (cf. [5]):

$$HB(\varphi) \equiv \{f \mid T_{\varphi^{-1}(S_n')}f=0,\ n=1, 2, \cdots;\ f \in HB(S)\}.$$

Il est évident que $HB(\varphi)$ ne dépend pas du choix de l'exhaustion de S' et que, d'après la proposition 4.1, il est identique à l'ensemble des éléments de $HB(S)$ orthogonaux à tous les éléments de $R_{\varphi^{-1}(S_n')}T_{\varphi^{-1}(S_n')}(HB(S))$ $(n=1, 2, \cdots)$.

PROPOSITION 8.1. (i) *$HB(\varphi)$ est un idéal de $HB(S)$.*

(ii) $$HB(S)=HB(\varphi) \dotplus \{HB(\varphi)\}',$$

(où $\{HB(\varphi)\}'$ est l'ensemble des éléments de $HB(S)$ orthogonaux à tous les éléments de $HB(\varphi)$).

(i) est facile à voir, selon la définition de $HB(\varphi)$.

Pour démontrer (ii), il suffit de voir que $HB(\varphi)=\{HB(\varphi)\}''$, ce qui suit du fait que la borne supérieure des éléments de $HB(\varphi)$ majorés dans $HB(S)$, puisqu'elle est encore orthogonale à tous les éléments de $R_{\varphi^{-1}(S_n')}T_{\varphi^{-1}(S_n')}(HB(S))$ $(n=1, 2, \cdots)$ (cf. § 1), appartient aussi à $HB(\varphi)$.

On désigne par $S_\varphi{}^*$ la partie de S^*, qui consiste en des points déterminés par les idéaux maximaux de $HB(S)$ contenant $\{HB(\varphi)\}'$.

D'après la définition de $S_\varphi{}^*$, on a la

PROPOSITOIN 8.2. (i) *$S^*-S_\varphi{}^*$ est égal à l'adéhrence (dans S^*) de $\sum_n\{\varphi^{-1}(S_n')\}^*$.*

(ii) *$S^*-S_\varphi{}^*-\sum_n\{\varphi^{-1}(S_n')\}^*$ est μ-négligeable.*

On a

$$S^*-S_\varphi{}^*=(\sum_n\varphi^{-1}(S_n'))^*=\overline{\sum_n\{\varphi^{-1})S_n')\}^*},$$

(cf. proposition 4.6). Ce qui entraîne la proposition.

9. Allure à la frontière des applications lindelöfiennes.

Nous nous occupons maintenant de l'allure à la frontière des applications *lindelöfiennes* (ou applications *de caractéristique bornée* selon [19]). Nous disons qu'une application conforme φ de S dans S' est *lindelöfienne* (cf. [11]), si

$$\sum_{\varphi(r)=q'} n(r;\varphi)\mathcal{G}_S(p,r)<+\infty$$

lorsque $\varphi(p)\neq q'$. (Où, $n(r;\varphi)$ est la multiplicité de φ au point r, $\mathcal{G}_S(p,r)$ la fonction de Green de S de pôle r et $q'\in S'$.)

THÉORÈME 9.1. (cf. [12]) *Soit φ une application lindelöfienne de S dans S'. Lorsque $p(\in S)$ tend vers un point de S^*, $\varphi(p)$ tend ou bien vers un point de S' ou bien à la frontière idéale de S'.*

Soient $\mathfrak{V}=\{V(p^*)\}$ un système fondamental de voisinages d'un point $p^*\in S^*$ et $\mathfrak{U}=\{U(p^*)\mid U(p^*)=V(p^*)\cdot S,\ V(p^*)\in\mathfrak{V}\}$. L'intersection

$$\prod_{\mathfrak{U}}\overline{\varphi(U(p^*))}$$

(l'adhérence étant prise dans S') contient au plus un seul point de S'. En effet, supposons que $\prod_{\mathfrak{U}}\overline{\varphi(U(p^*))}$ contient deux points différents q_1' et q_2' de S'. D'abord, considérons le cas où S' est hyperbolique. Soit $\mathcal{G}_{S'}(p',q')$ la fonction de Green de S' de pôle q'. La fonction $\mathcal{G}_{S'}(\varphi(p),q_1')$ qui est surharmonique continue sur S doit admettre une valeur limite (finie on infinie) bien déterminée, lorsque p tend vers p^*, mais $\mathcal{G}_{S'}(p',q_1')$ est bornée au voisinage assez petit de q_2', tandis qu'elle ne l'est pas au voisinage de q_1', ce qui est absurde.

Lorsque S' est parabolique ou compact, il suffit de considérer, au lieu de $\mathcal{G}_{S'}(p',q')$, la fonction $D_{S'}(p';q_1',q_2')$ (introduite par Heins, cf. [11]) de singularité logarithmique positive au point q_1', celle négative au point q_2' et harmonique ailleurs. Si φ est lindelöfienne, on sait, d'après Heins [11], que

$$D_{S'}(\varphi(p);\, q_1',\, q_2') = \mathcal{S}(p,\, q_1') - \mathcal{S}(p,\, q_2') + H(p), \tag{9.1}$$

où

$$\mathcal{S}(p,\, q') = \sum_{\varphi(r)=q'} n(r;\, \varphi)\mathcal{G}_S(p,\, r)$$

et $H(p)$ est une différence de deux fonctions harmoniques positives. D'après ce que l'on a vu dans § 6, le deuxième membre de (9.1), donc aussi $D_{S'}(\varphi(p);\, q_1',\, q_2')$, possède une valeur limite bien déterminée, lorsque p tend vers p^*.

Notons ici que, lorsque S' est compacte, la deuxième possibilité de l'énoncé du théorème n'a pas lieu et on a, comme cas particulier où S' est la sphère de Riemann, le

COROLLAIRE 9.2. *Toute fonction méromorphe lidelöfienne sur S possède la valeur limite en tout point de S^*.*

REMARQUE. La démonstration du théorème ci-dessus est encore valable, lorsque φ est une application telle que l'ou peut trouver un ouvert $G'(\subset S')$ où il existe une fonction de Green et qui satisfait à

$$\{\varphi^{-1}(G')\}^* = S^*.$$

C'est exactement ce que Constantinescu et Cornea (cf. [5], p. 71) appelle "application de Fatou".

PROPOSITION 9.3. *Soit G un ouvert de S et φ une application conforme de S dans S' telle que $\varphi(p)$ tend à la frontière idéale de S', lorsque $p \to p^*$ $(\in G^*)$. Alors on a*

$$\omega_G \leqslant \omega_{\varphi(G)} \circ \varphi \qquad sur \quad G.$$

On peut supposer, sans perdre la généralité, que les frontières relatives ∂G et $\partial\varphi(G)$ sont suffisamment régulières. Soit ω_n' la fonction harmonique égale à 0 sur $(\partial\varphi(G))\cdot S_n'$ et à 1 sur $(\partial S_n')\cdot\varphi(G)$. Alors,

$$\omega_{\varphi(G)} = \lim_{n\to\infty} \omega_n'.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse, $(\varphi^{-1}(\varphi(G)\cdot S_n'))\cdot G$ est un ouvert relativement compact ou parabolique. Donc, le principe du minimum par rapport à la frontière relative subsiste et la comparaison de ω_G et $\omega_n' \circ \varphi$ sur la frontière relative de $(\varphi^{-1}(\varphi(G)\cdot S_n'))\cdot G$ entraîne

$$\omega_G \leqslant \omega_n' \circ \varphi \qquad \text{sur} \quad (\varphi^{-1}(\varphi(G)\cdot S_n'))\cdot G.$$

Le passage à la limite $n \to \infty$, nous donne l'inégalité cherchée.

COROLLAIRE 9.4. *Sous la même hopothèse que la proposition 9.3, l'image d'un ouvert hyperbolique est toujours hyperbolique.*

PROPOSITION 9.5. *Soit φ une application lindelöfienne de S dans S'. Lors-*

qu'un point $p(\in S)$ tend vers un point p^* de $S_\varphi{}^*$, $\varphi(p)$ tend vers un point de S'^*.

D'après la proposition précédente, $(\varphi(U(p^*))^*$ (où $U(p^*)$ signifie le même ensemble que dans la démonstration du théorème 9.1) n'est pas vide et il est compact, donc l'intersection $\prod_n(\varphi(U(p^*))^*$ n'est pas vide. Si elle contient deux points distincts q_1', q_2' il existe une fonction f de $HB(S')$ telle que $f(q_1') \neq f(q_2')$, d'autre part $f\circ\varphi(p)$ doit avoir une valeur limite bien déterminée en le point p^*, ce qui est une contradiction.

THÉORÈME 9.6. *Soit φ une application lidelöfienne de S dans S'. Lorsqu'un point p de S tend vers un point p^* de $S_\varphi{}^* + \sum_n\{\varphi^{-1}(S_n')\}^*$, $\varphi(p)$ tend vers un point de $S'+S'^*$.*

On verra dans § 12 que l'existence d'un ensemble μ-négligeable exceptionnel de S^* où φ ne peut être définie par prolongement continu est, en général, inévitable.

REMARQUE. Si φ est une application lindelöfienne et S' parabolique, $S_\varphi{}^*$ doit être vide.

Soit S un domaine (considéré lui-même comme une surface de Riemann) de S' et φ l'application identique de S dans S'. φ est lindelöfienne et on voit aisément que $S_\varphi{}^*$ est égale à la frontière de S considéré comme un ouvert de S' (au sens de § 4) avec conservation des ensembles négligeables et on a la

PROPOSITION 9.7. *Soit F une fonction surharmonique continue et positive sur un ouvert G de S. F possède la valeur limite en tout point de G^*, sauf au plus sur un ensemble μ-négligeable.*

Les points de G^* appartient, au plus à un sous-ensemble μ-négligeable près, à la frontière d'une de ses composantes connexes (cf. proposition 4.6).

10. Dans la suite, φ peut être une application conforme quelconque (non nécessairement lindelöfienne).

Remarquons d'abord que φ est toujours définie dans $\sum_n\{\varphi^{-1}(S_n')\}^*$, sauf au plus sur un sous-ensemble μ-négligeable. (Pour le voir, il suffit de considérer $G_{\varphi(S_n')}(\varphi(p), q')$ et tenir compte de la proposition 9.7.)

THÉORÈME 10.1. (F. et M. Riesz-Lusin-Priwaloff) *Soit A^* un sous-ensemble de $\sum_n\{\varphi^{-1}(S_n')\}^*$ tel que $\mu(A^*)>0$. Alors $\varphi(A^*)$ ne peut être contenu dans un compact de capacité nulle.*

Suppons que $\varphi(A^*)$ soit contenu dans un compact de capacité nulle et soit F une fonction surharmonique continue et positive définie dans un voisinage W relativement compact de $\varphi(A^*)$ qui vaut $+\infty$ sur $\varphi(A^*)$ (son existence est assurée par Evans-Selberg). Alors $F\circ\varphi$ possède la valeur limite $+\infty$ sur un sous-ensemble de μ-mesure positive de la frontière de $\varphi^{-1}(W)$, ce qui est absurde (cf. corollaire 6.9 et proposition 9.7).

COROLLAIRE 10.2. (cf. [4], [13]) *Si S admet une fonction HB-minimale (resp. HD-minimale), alors* $S \in O_L$ *(resp.* $S \in O_{AD}$*).*

(O_L (resp. O_{AD}) signifie la classe des surfaces de Riemann qui admettent aucune fonction méromorphe lindelöfienne (resp. fonction analytique à intégral de Dirichlet finie) non-constante.)

C'est une conséquence des proposition 7.3, corollaire 7.5, corollaire 9.2 et théorème 10.1.

11. LEMME 11.1 *Soit* φ *une application conforme localement du type-Bl* (cf. [10]). *Alors on a*

$$S_\varphi{}^* = S^*.$$

D'après [14], l'image inverse des ouverts relativement compacts de S' est relativement compacte ou parabolique, donc $HB(\varphi) = HB(S)$.

PROPOSITION 11.2. *Soient* φ *une application non-lindelöfienne de S dans S' et G un ouvert de S tel que*

$$G^*(\neq \emptyset) \subset S_\varphi{}^*.$$

Alors, $S' - \varphi(G)$ *est un ensemble polaire.*

Il suffit de remarquer que S' doit être parabolique et que $\varphi(G)$ ne peut posséder de fonction de Green.

En tenant compte du lemme précédent, l'hypothèse de la proposition étant toujours satisfaite lorsque φ est une application localement du type-Bl, on voit que c'est une extension d'un résultat de [14].

12. Cas du disque unité.

Finalement, examinons un peu ce qui se passe au cas où S est le disque unité $\{z \mid |z| < 1\}$ du plan complexe.

A l'aide de l'application identique (lindelöfienne) du disque unité dans le plan complexe, on peut considérer que les points p^* de S^* est situés, comme une fibre, sur chaque point de la circonférence $\{z \mid |z| = 1\}$ (cf. [20]).

Soient

$$S_1 = \left\{z \,\middle|\, \left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{3}\right\}, \qquad S_1' = \{z \mid 0 < |z| < 1\}$$

et φ l'application identique de S_1 dans S_1'. Puisque l'on voit aisément qu'il n'existe pas de point de $S_1'^*$ situé sur $z = 0$, les points de S_1^* situés sur $z = 0$

ne peut avoir d'image dans $S_1' + S_1'^*$. Voici un exemple où il existe un ensemble exceptionnel.

Étant donnés des nombres réels δ_n et θ_n $(n=1, 2, \cdots)$ tels que $\delta_n > 0$, $\theta_n > \theta_{n+1}$, $\theta_n \downarrow 0$ et $|e^{i\theta_n} - 1| > \delta_n$, $|e^{i\theta_n} - e^{i\theta_{n+1}}| > \delta_n + \delta_{n+1}$, on pose $D_n = \{z \mid |z - e^{i\theta_n}| < \delta_n\}$ et G_n=intersection de D_n et du disque unité S. $\sum_n G_n$ est la restriction sur S d'un voisinage de certains points de S^* situés sur $z=1$, autrement-dit $\{\sum_n G_n\}^*$ contient des points de S^* situés sur $z=1$.

Soit maintenant S_2 un disque quelconque tangente à S à $z=1$ et situé dans S, on peut toujours trouver une famille d'ensembles du type ci-dessus qui se trouve dans $S - \bar{S}_2$. Donc la limite en notre sens est une sorte de limite tangente plutôt qu'une limite radiale (telle qu'il apparaît dans le théorème de Fatou). Ici encore, on voit que l'application identique de S_2 dans S ne peut être prolonger, par continuité, jusqu'aux points de S_2^* situés sur $z=1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, L. V., ET L. SAIRO, Riemann surfaces. Princeton, 1960.

[2] BIRKHOFF, G., Lattice theory. A.M.S. Coll. Publ. 25, 1949.

[3] BOURBAKI, N., Intégration; Chap. I–IV. Paris, Hermann, 1952. (Act. Sci. Ind. 1175).

[4] CONSTANTINESCU, C., ET A. CORNEA, Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen. Nagoya Math. J. **13** (1958), 169–233.

[5] CONSTANTINESCU, C., ET A. CORNEA, Über das Verhalten der analytischen Abbildungen Riemannscher Flächen auf dem idealen Rand von Martin. Nagoya Math. J. **17** (1960), 1–87.

[6] DIXMIER, J., Sur certains espaces considérés par M. H. Stone. Sum. Bras. Math. **2** (1951), 151–182.

[7] DOOB, J. L., Conformally invariant cluster value theory. Illinois Math. J. **5** (1961), 521–549.

[8] FELLER, W., Boundaries induced by non-negative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 19–54.

[9] HAYASHI, K., Sur une frontière des surfaces de Riemann. Proc. Japan Acad. **37** (1961), 469–472.

[10] HEINS, M., On the Lindelöf principle. Ann. Math. **61** (1955), 440–473.

[11] HEINS, M., Lidelöfian maps. Ann. Math. **62** (1955), 418–446.

[12] HEINS, M., Functions of bounded characteristic and Lindelöfian maps. Proc. Internat. Cong. Math., Edinburgh (1958), 376–388.

[13] KURAMOCHI, Z., On the ideal boundary of abstract Riemann surface. Osaka Math. J. **10** (1958), 83–102.

[14] MATSUMOTO, K., On subsurfaces of some Riemann surfaces. Nagoya Math. J. **15** (1959), 261–274.

[15] MATSUMOTO, K., An extension of a theorem of Mori. Jap. J. Math. **29** (1959), 57–59.

[16] MORI, A., On the existence of harmonic functions on a Riemann surface. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. I, **6** (1951), 247–257.

[17] MORI, S., On a compactification of an open Riemann surface and its application. J. Math. Kyoto Univ. **1** (1961), 21–42.

[18] PARREAU, M., Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytique et la classification des surfaces de Riemann. Ann. Inst. Fourier **3** (1951), 103–197.

[19] PARREAU, M., Fonction caractéristique d'une application conforme. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **19** (1951), 175–189.

[20] SCHARK, I. J., Maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions. J. Math. Mech. **10** (1961), 735–746.

[21] YOSIDA, K., On vector lattice with a unit. Proc. Japan Acad. **17** (1941), 121–124.

INSTITUT DE TECHNOLOGIE DE TOKIO.