LES SOLUTIONS POSITIVES DE L'ÉQUATION $\Delta u = Pu$ SUR UNE SURFACE DE RIEMANN

PAR KAZUMICHI HAYASHI

Dans cette note, nous démontrerons d'abord que les théorèmes de M. Heins ([3], théorèmes 11.1, 11.2, 12.1) concernant les valeurs limites de fonctions harmoniques bornées sur un "*end*" sont encore valables pour une famille de solutions bornées de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u = Pu,$$

où $P(z)$ est non-négative, possède les dérivées continues du premier ordre et dépend de l'uniformisante locale $z = x + iy$ de telle manière que $Pdxdy$ soit invariante. Et deuxièmement, nous montrerons qu'une des conséquences de la théorie de Martin pour les solutions positives de (1) sur un "*end*" suit immédiatement de notre résultat en se servant du théorème de Hahn-Banach.

1. Soient S une surface de Riemann ouverte et $\{S_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ son exhaustion, c'est-à-dire une suite de domaines relativement compacts tels que $\bar{S}_n \subset S_{n+1}$ et que tout compact de S soit contenu dans S_n à partir d'un certain rang, alors $S - \bar{S}_n$ (n: quelconque) est un "*end*". Nous supposons encore que les courbes frontières ∂S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ soient analytiques.

Nous nous occupons toujours des surfaces de Riemann satisfaisant à la condition suivante:

"Chaque surface possède un seul élément de la frontière idéale, autrement-dit le complémentaire d'un compact a une seule composante connexe non relativement compact",

mais non nécessairement de la frontière idéale nulle.

Soit $PP(S - \bar{S}_n)$, l'ensemble de toutes les solutions non-négatives de (1) sur $S - \bar{S}_n$ qui s'annulent continûment sur la frontière ∂S_n, nous avons

LEMME 1.1. *Il existe une application biunivoque T_n de $PP(S - \bar{S}_1)$ sur $PP(S - \bar{S}_n)$ telle que*

$$T_n(v_1 + v_2) = T_n(v_1) + T_n(v_2), \quad T_n(\lambda v_1) = \lambda T_n(v_1)$$

où v_1, $v_2 \in PP(S - \bar{S}_1)$ et $\lambda > 0$.

Il suffit de prendre $T_n v = v - b_v$ où $b_v = \lim_{m \to \infty} b_v^{(m)}$, $b_v^{(m)}$ étant la solution de (1) sur $S_m - \bar{S}_n (m > n)$ qui vaut v sur ∂S_n et 0 sur ∂S_m. Il est facile à voir

Reçu le 1er Septembre, 1960.

que pour toute $v' \in PP(S - \bar{S}_n)$, $T_n^{-1} v' = \lim_{m\to\infty} v'^{(m)}$, où $v'^{(m)}$ est la solution de (1) sur $S_m - \bar{S}_1$ égale à 0 sur ∂S_1 et à v' sur ∂S_m.

COROLLAIRE. *Le nombre minimum des éléments qui engendrent $PP(S - \bar{S}_n)$ est indépendant de n, donc c'est une propriété de la frontière idéale de S (qui dépend de la densité P).*

DÉFINITION. Nous appelons le nombre minimum dans le corollaire ci-dessus la *dimension elliptique* de S par rapport à P, ou simplement la dimension elliptique de S.

Nous savons que sous certaines conditions la dimension elliptique coïncide avec la dimension harmonique de M. Heins [3]. (cf. [5], théorème 1.)

Soit $\Omega(p; \partial S_1, S_m - \bar{S}_1)$ la valeur au point $p \in S_m - \bar{S}_1$ de la solution de (1) sur $S_m - \bar{S}_1$ égale à 1 sur ∂S_1 et à 0 sur ∂S_m. Nous posons $\Omega(p, \partial S_1, S - \bar{S}_1) = \lim_{m\to\infty}\Omega(p; \partial S_1, S_m - \bar{S}_1)$ et nous l'appelons la mesure elliptique de ∂S_1 par rapport à $S - \bar{S}_1$, et souvent nous la notons simplement $\Omega(p)$. Remarquons que dans le cas harmonique ($P \equiv 0$), si S est de la frontière idéale nulle, $\Omega(p) \equiv 1$.

Soit $G^{(m)}(p, q)$ la solution de Green de (1) de pôle q sur $S_m - \bar{S}_1$, nous allons poser

$$K(p, q) = \frac{G(p, q)}{2\pi\Omega(q)} \tag{2}$$

où $G(p, q) = \lim_{m\to\infty} G^{(m)}(p, q)$. Remarquons que $K(p, q)$ satisfasse à la condition:

$$\int_{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial n} K(p, q)\, ds(p) = 1.$$

Nous noterons P^0B l'ensemble des solutions bornées de (1) sur $S - \bar{S}_1$ qui peuvent être obtenues comme $\lim_{m\to\infty} u^{(m)}(p)$, où $u^{(m)}(p)$ est la solution de (1) sur $S_m - \bar{S}_1$, $= f$ sur ∂S_1 (f: une fonction continue arbitraire sur ∂S_1) et $= 0$ sur ∂S_m, dont l'existence est assurée par notre hypothèse sur la régularité des courbes frontières. Il se voit facilement que si P est une densité parabolique [8], autrement-dit s'il n'existe aucune solution bornée de (1) sur S, P^0B coïncide avec l'ensemble de toutes les solutions de (1) bornées sur $S - \bar{S}_1$.

LEMME 1.2. *Nous avons, pour toute $u \in P^0B$,*

$$\frac{u(q)}{\Omega(q)} = \int_{\partial S_1} u(p) \frac{\partial}{\partial n} K(p, q)\, ds. \tag{3}$$

La démonstration est immédiate.

Soit

$$U_P = \left\{ v \,\middle|\, v \in PP(S - \bar{S}_1), \quad \int_{\partial S_1} \frac{\partial v}{\partial n}\, ds = 1 \right\}$$

et considérons l'intégrale

$$\lambda_v(u) = \int_{\partial S_1} u \frac{\partial v}{\partial n} ds \tag{4}$$

où $v \in U_P$.

PROPOSITION 1. *L'ensemble des valeurs limites à la frontière idéale de* u/Ω ($u \in P^0 B$) *est égal à* $U_P(u) = \{\lambda_v(u) | v \in U_P\}$.

D'après le lemme 1.2, en tenant compte du fait que $\Omega(p) = 1$ sur ∂S_1, il se voit tout de suite que l'ensemble des valeurs limites de u/Ω est contenu dans $U_P(u)$. D'autre part, pour tout $m(>1)$, nous avons

$$\lambda_v(u) = \int_{\partial S_m} u \frac{\partial (T_m v)}{\partial n} ds = \int_{\partial S_m} \frac{u}{\Omega} \left(\Omega \frac{\partial}{\partial n} (T_m v) \right) ds.$$

Puisque

$$\int_{\partial S_m} \Omega \frac{\partial}{\partial n} (T_m v) ds = 1,$$

nous obtenons

$$\min_{\partial S_m} \frac{u}{\Omega} \leqq \lambda_v(u) \leqq \max_{\partial S_m} \frac{u}{\Omega}.$$

Ceci, en tenant compte de notre hypothèse sur l'allure de la frontière idéale, implique l'inclusion inverse, et nous avons établi l'égalité des deux ensembles.

PROPOSITION 2. *Soit la dimension elliptique de S égale à 1, alors* u/Ω *possède une seule limite à la frontière idéale.*

C'est une conséquence immédiate de la Proposition 1.

PROPOSITION 3. *Si chaque* u/Ω *pour* $u \in P^0 B$ *possède une seule limite à la frontière idéale, S est de dimension elliptique égale à* 1.

Il suffit de démontrer que U_P ne contient qu'un seul élément. Mais ceci suit du fait que $\lambda_v(u)$ (pour v fixée) est une forme linéaire continue sur $C(\partial S_1)$ (=l'espace de toutes les fonctions continues sur ∂S_1, munies de la norme $\|u\| = \sup_{\partial S_1} |u(p)|$), c'est-à-dire une mesure de Radon sur ∂S_1 ([1]).

Maintenant, considérons le cas où $\inf_{S - \bar{S}_1} \Omega(p) > 0$. D'après le théorème 1 de [6], il n'existe pas de fonction de Green (harmonique) sur S, donc il n'existe pas de solution de (1) à l'intégrale d'énergie $E(u)$ finie ($S \in O_{PD}$). D'autre part, en se servant d'un autre théorème d'Ozawa ([4], théorème 5.1), nous pouvons voir que toute $u \in PP(S - \bar{S}_1)$ ne peut avoir l'intégrale d'énergie finie.

PROPOSITION 4. *Supposons que S soit de dimension elliptique égale à* 1 *et que* $\inf_{S - \bar{S}_1} \Omega(p) > 0$, *alors* $u(\not\equiv 0) \in PP(S - \bar{S}_1)$ *possède la valeur limite* $+\infty$ *à la frontière idéale.*

La démonstration du théorème 12.1 de M. Heins [3] s'applique littéralement, en faisant attention que

$$\int u \frac{\partial u}{\partial n} ds = E(u)$$

au lieu d'être égale à l'intégrale de Dirichlet.

2. Soit $\{q_m\}$ une suite de points de S qui tend vers la frontière idéale telle que $\{K(p, q_m)\}$ ait une fonction limite $K(p)$ par la convergence compacte. Nous noterons U_G l'enveloppe convexe de toutes les $K(p)$ différentes ainsi obtenues.

La proposition 1 nous fait voir que

$$U_P(u) = U_G(u) \tag{5}$$

pour toute $u \in P^0B$. Alors il est bien naturel de se demander sur la relation entre U_P et U_G. Il est clair que $U_G \subset U_P$. Nous allons démontrer que l'adhérence de U_G pour une topologie proprement choisie est égale à U_P.

LEMME 2.1. *U_P est un ensemble convexe et compact pour la topologie définie par la distance*

$$\rho(v, v') = \int_{\partial S_1} \frac{\partial}{\partial n} |v - v'| ds, \qquad v, v' \in U_P. \tag{6}$$

Les théorèmes de Harnack étant encore valables pour les solutions de (1), nous pouvons le démontrer tout pareillement au cas harmonique ([7], lemme 3).

Soit $\mathcal{M}(\partial S_1)$ l'espace des mesures de Radon sur ∂S_1, munies de la norme

$$\|\mu\| = \int_{\partial S_1} d|\mu|$$

([1], chap. III), en faisant correspondre à $v \in U_P$ la mesure de Radon donnée par $d\mu = (\partial v / \partial n) ds$, nous pouvons considérer U_P comme un sous-ensemble de $\mathcal{M}(\partial S_1)$ et la distance (6) dans U_P coïncide avec celle définie par la norme de $\mathcal{M}(\partial S_1)$.

COROLLAIRE. *$\{\mu \,|\, d\mu = (\partial v / \partial n) ds,\ v \in U_P\}$ est un sous-ensemble convexe et compact de $\mathcal{M}(\partial S_1)$.*

Nous pouvons mettre $\mathcal{M}(\partial S_1)$ et $C(\partial S_1)$ en dualité en utilisant la forme bilinéaire

$$< \mu, u > = \int_{\partial S_1} u \, d\mu, \tag{7}$$

et lorsque $\mathcal{M}(\partial S_1)$ est muni de la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(\partial S_1), C(\partial S_1))$, toute forme linéaire continue sur $\mathcal{M}(\partial S_1)$ s'écrit sous la forme (7) avec une fonction $u \in C(\partial S_1)$ proprement choisie ([2], chap. IV).

LEMME 2.2. *Soit $\overline{U}_G$ l'adhérence de U_G dans U_P pour la topologie du lemme 2.1, alors $\overline{U}_G$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}(\partial S_1)$ faiblement compact, donc il est faiblement fermé.*

Ceci est évident, puisque $\overline{U}_G$ est un sous-ensemble fortement fermé de U_P et la topologie faible $\sigma(\mathcal{M}(\partial S_1), C(\partial S_1))$ étant plus faible que la topologie forte (=topologie définie par la norme).

THÉORÈME. *U_G est partout dense dans U_P.*

Supposons que $\overline{U}_G$ ne s'identifie pas avec U_P. Alors il existe une $v \in U_P$ telle que $v \notin \overline{U}_G$ et le théorème de Hahn-Banach ([2], chap. II) insiste l'existence d'une forme linéaire faiblement continue f sur $\mathcal{M}(\partial S_1)$ telle que $f(\overline{U}_G) \not\ni f(v)$, autrement-dit il existerait une $u_f \in C(\partial S_1)$ telle que $U_G(u_f) \not\ni \lambda_v(u_f)$. Ce qui est absurde.

REMARQUE. Puisque nous n'avons pas supposer $P \not\equiv 0$, le cas des fonctions harmoniques n'est pas exclu. La même mode de raisonnement que le théorème 1 d'Ozawa [7], s'appliquerait aussi à notre théorème et vice versa.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N., Intégration; chap. I–IV. Paris, Hermann 1952 (Act. Sci. Ind. 1175).
[2] BOURBAKI, N., Espaces vectoriels topologiques. Paris, Hermann 1953 et 1955 (Act. Sci. Ind. 1189 et 1229).
[3] HEINS, M., Riemann surfaces of infinite genus. Ann. of Math. 55 (1952), 296–317.
[4] OZAWA, M., Classification of Riemann surfaces. Kōdai Math. Sem. Rep. 4 (1952), 63–76.
[5] OZAWA, M., Some classes of positive solutions of $\Delta u = Pu$ on Riemann surfaces, I. Ibid. 6 (1954), 121–126.
[6] OZAWA, M., A set of capacity zero and the equation $\Delta u = Pu$. Ibid. 12 (1960), 76–81.
[7] OZAWA, M., Positive harmonic functions on an end. Ibid. 12 (1960), 143–150.
[8] ROYDEN, H., The equation $\Delta u = Pu$, and the classification of open Riemann surfaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 271 (1959).

INSTITUT DE TECHNOLOGIE DE TOKIO.