# SUR LES SOLUTIONS AUTOUR D'UN POINT SINGULIER FIXE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU PREMIER ORDRE

Par Tosiya SAITO

1. Considérons une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

où $f(x,y)$ est une fonction analytique en $x$, et rationnelle en $y$. Les points singuliers de la solution générale de cette équation sont de deux sortes. Les uns sont des points singuliers fixes qui sont communs pour toutes les solutions. Les autres sont des points singuliers mobiles qui peuvent se varier avec la solution considérée. Comme on sait, la solution est algébroïde en $x$ dans le voisinage de chaque point singulier mobile. Contrairement, les points singuliers fixes sont, en générale, des singularités transcendantes de la solution, et sauf le cas simple étudié par Briot et Bouquet, nous ne savons rien concernant l'expression analytique des solutions autour de telle singularité.

Dans ce mémoire, nous nous proposons de généraliser, dans quelque cas particulier, les résultats classiques de Briot et Bouquet, et donnons une expression analytique de la solution autour d'un point singulier fixe isolé.

2. Dans ce qui suit, nous envisageons une équation différentielle

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y\,P(x,y)}{Q(x,y)}, \\ P(x,y) &= \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, y^k, \\ Q(x,y) &= \sum_{k=0}^{n} b_k(x)\, y^k, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où $a_k(x)$, $b_k(x)$ sont des fonctions analytiques et uniformes de $x$, et $y\,P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont, pour $x$ quelconque, premiers entre eux. Afin de simplifier la discussion qui va suivre, nous supposons que les points singuliers fixes de cette équation soient en nombre fini.

Traçons dans le plan de $x$ un cercle assez grand

$$\Gamma : \quad |x| = R > 0$$

Soient

$$x = \xi_1, \quad x = \xi_2, \quad \cdots, \quad x = \xi_p$$

dés points singuliers fixes contenus a l'intérieur du cercle $\Gamma$. Nous décrivons un cercle

$$\gamma_k : \quad |x - \xi_k| = r$$

autour de chaque $\xi_k$, où le nombre positif $r$ est choisi suffisamment petit de sorte que les cercles $\Gamma$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, ....., $\gamma_p$ sont disjoints l'un et l'autre.

Désignons par $F$ le domaine compact

$$\{x \,;\, |x| \leqq R,\ |x - \xi_k| \geqq r,\ k = 1, 2, \cdots, p\}$$

Si nous joignons chaque point $x = \xi_k$ au point à l'infini par des coupures mutuellement disjointes, le domaine $F$ sera rendu simplement connexe au moyen de ces coupures. Nous le désignerons par $F'$.

Soit $\mathfrak{P}(x)$ un élément de la fonction analytique prenant la valeur $y_0$ au point $x = x_0$ arbitrairement choisi dans $F'$, et satisfaisant à l'équation (1). Si $|y_0|$ est suffisamment petit, il représente un élément holomorphe. En faisant le prolongement analytique de cet élément $\mathfrak{P}(x)$, le long de tous les chemins contenus dans $F'$, nous obtenons une fonction analytique satisfaisant a l'équation (1) à chaque point de $F'$. Nous la désignerons désormais par $y(x, x_0, y_0)$.

Nous allons d'abord montrer que $y(x, x_0, y_0)$ est partout holomorphe sur $F'$ si $|y_0|$ est suffisamment petit.

Soit $G$ un domaine compact défini par

$$G = \{ x ; \ |x| \leq R + \frac{r}{2}, \ |x - \xi_k| \geq \frac{r}{2}, \ k = 1, 2, \cdots p \}.$$

Lorsque $x$ parcourt dans le domaine $G$ tout entier, la totalité des valeurs de $y$ qui satisfont à l'équation $Q(x, y) = 0$ forme dans le plan de $y$ un ensemble fermé $D$ qui ne contient pas le point $y = 0$. En effet, s'il contenait le point $y = 0$, il faudrait qu'une au moins des racines de l'équation $Q(x, 0) = 0$ soit contenu dans $G$. Mais cela est impossible car, comme on le voit de la forme même de l'équation (1), tel point $x$ est un point singulier fixe de notre équation.

Désignons par $\delta \ (>0)$ la distance du point $y = 0$ à $D$. La fonction $P(x, y) / Q(x, y)$ est évidemment holomorphe pour

$$x \in G, \quad |y| \leq \frac{\delta}{2}$$

Soit $M$ la valeur maximum de $|P/Q|$ dans cette région.

Puisque $F'$ est simplement connexe, nous pouvons construire une famille des courbes simples $L(x)$ joignant le point $x_0$ au point $x$ sur la frontière de $F'$ possédant les propriétés suivantes:

(1) Tout point de $F'$ autre que $x_0$ se trouve sur une courbe $L(x)$ de cette famille et sur une seulement.

(2) Soient $x$ et $x'$ deux points sur la frontières de $F$. Lorsque $x'$ tend vers $x$, la courbe $L(x')$ tend uniformément vers $L(x)$.

Alors pour demontrer notre proposition, il suffit de faire voir que $\mathfrak{P}(x)$ peut être prolongé régulièrement le long de chaque $L(x)$.

Soit $L(a)$ une de ces courbes. Prenons une valeur initiale $y_0$ telle que l'on ait

$$0 < |y_0| < \frac{\delta}{2(N+1)},$$

$N$ étant un entier positif assez grand. Si

$$|x - x_0| < \frac{r}{2}, \quad |y - y_0| < |y_0|,$$

on a

$$x \in G, \quad |y| < 2|y_0| < \frac{\delta}{2},$$

et, par suite,

$$\left| y \frac{P}{Q} \right| < 2|y_0| \cdot M.$$

D'après l'estimation bien connue au moyen de la série majorante, la solution de (1) qui prend la valeur $y = y_0$ pour $x = x_0$ est holomorphe pour

$$|x - x_0| < \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{|y_0|}{2|y_0| M r}}\right) = \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2Mr}}\right) = 2r_1$$

et

$$|y| < 2|y_0|$$

pour ces valeurs de $x$. Décrivons maintenant un cercle

$$C_1 : \ |x - x_0| = r_1.$$

Soit $x_1$ un point d'intersection de $C_1$ avec $L(a)$ et $y_1$ la valeur correspondante de $y$. Si

$$|x - x_1| < \frac{r}{2}, \quad |y - y_1| < |y_0|,$$

on a

$$x \in G, \quad |y| < 3|y_0| < \frac{\delta}{2},$$

et

$$\left| y \frac{P}{Q} \right| < 3|y_0| \cdot M.$$

Donc la solution prenant la valeur $y_1$ pour $x = x_1$ est holomorphe pour

$$|x - x_1| < \frac{r}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{3rM}}\right) = 2r_2.$$

En désignant par $x_2$ le point d'intersection du cercle

$$C_2 : \ |x - x_2| = r_2$$

avec $L(a)$, nous répétons le raisonnement analogue.

Ce procédé du prolongement peut être continue jusqu'au cercle $C_N$.

Donc, si nous désignons par $D_K$ la région a l'intérieur de $C_K$, $\mathfrak{P}(x)$ peut être prolongé régulièrement dans la région $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_K$.

Cr la somme infinie

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r}{4}\left(1 - e^{-\frac{1}{kTM}}\right)$$

est évidemment divergente, on peut choisir un entier positif $N(a)$ de telle manière que

$$a \in D_{N(a)}.$$

Alors, si

$$|y_0| < \frac{\delta}{2(N(a)+1)},$$

$\mathfrak{P}(x)$ peut être prolongé le long du chemein $L(a)$ et représente une fonction holomorphe dans une certaine région contenant $L(a)$ dans son intérieur.

Puisque la frontière de $F'$ est un ensemble compact, il exists un entier positif $N$ plus grand que tout $N(a)$. Par conséquent, si l'on choisit $y_0$ de telle façon que l'on ait

$$|y_0| < \frac{\delta}{2(N+1)},$$

on peut prolonger l'élément $\mathfrak{P}(x)$ régulièrement le long de chaque $L(x)$. Notre proposition est ainsi démontré.

$F'$ étant simplement connexe, la fonction $y(x, x_0, y_0)$ ainsi construite est une fonction uniforme, et, comme on voit de la discussion faite plus haut, $|y(x, x_0, y_0)| < \frac{\delta}{2}$ sur $F'$.

Si nous faisons le prolongement analytique de $\mathfrak{P}(x)$ le long d'un contour fermé $C$ contenu dans $F$ qui, à partir de $x_0$, tourne autour du point $\xi_1$ une fois dans le sens positif sans franchir les coupures issues de $\xi_2$, $\xi_3$, ......, $\xi_p$, nous obtenons un autre élément $\bar{\mathfrak{P}}(x)$ de la même fonction. A partir de cet élément, nous construisons une nouvelle branche $\bar{y}(x, x_0, y_0)$ de la même fonction par le prolongement analytique le long de tous les chemins dans $F'$. Alors, par le raisonnement analogue, on peut démontrer le lemme suivant.

LEMME. Si $\varepsilon$ est un nombre suffisamment petit, $y(x, x_0, y_0)$ et $\bar{y}(x, x_0, y_0)$ sont holomorphes et

$$|y(x, x_0, y_0)| < \frac{\delta}{2},$$

$$|\bar{y}(x, x_0, y_0)| < \frac{\delta}{2},$$

pour $x \in F'$ et $|y_0| < \varepsilon$.

3. Nous allons maintenant chercher l'expression analytique valable autour du point singulier $\xi_1$ de la fonction $y(x, x_0, y_0)$ que nous venons de définir dans le paragraphe précédent.

Afin d'éviter la complication dans le calcul, nous supposons que $\xi_1 = 0$. Soit $\Delta$ le domaine annulaire

$$\Delta = \{x;\ \rho_1 \leqq |x| \leqq \rho_2\}$$

contenu dans $F$. Si

$$x \in \Delta, \quad |y| < \frac{\delta}{2},$$

$y \cdot P/Q$ est une fonction holomorphe de $x$ et de $y$. Par suite, on peut y écrire l'équation (1) dans la forme suivante:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots, \qquad (2)$$

ou $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... sont des fonctions uniformes et holomorphes dans $\Delta$. Développons - les en séries de Laurent absolument convergentes dans $\Delta$ comme il suit:

$$f_k(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_{kj} x^j, \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (3)$$

En particulier, nous posons

$$f_{1,-1} = \lambda$$

et supposons que $\lambda$ ne soit pas un nombre rationnel.

Soit $x = \eta$ un point quelconque de $\Delta$. $\bar{y}(\eta, x_0, y_0)$ peut être regardé comme la valeur à $x = \eta$ d'une branche de la solution de (1) prenant la valeur initiale $y = y(\eta, x_0, y_0)$ pour $x = \eta$. Donc, en regardant $\bar{y}(x, x_0, y_0)$ comme fonction de $x$ et de $y(x, x_0, y_0)$, on peut écrire

$$\bar{y} = R(x, y(x, x_0, y_0)),$$

Soit $U(\eta)$ un domaine défini par

$$U(\eta) = \{ y(\eta, x_0, y_0) \ ; \ |y_0| < \varepsilon \}$$

où $\varepsilon$ est un nombre positif choisi de telle façon que la conclusion du Lemme soit vrai. $U(\eta)$ est un domaine ouvert dans le plan de $y$. De plus, il contient le point $y = 0$ dans son intérieur, parce que, comme on le voit de la forme même de l'équation (1), $y(x, x_0, y_0) \equiv 0$ pour $y_0 = 0$.
Soit

$$C(\eta) : \ |y| = \rho(\eta) > 0$$

le plus grand cercle contenu dans la fermeture de $U(\eta)$. Si l'on fait varier $\eta$ d'une manière continue dans $\Delta$, $\rho(\eta)$ se changera aussi continûment. Donc, $\Delta$ étant un ensemble compact,

$$\rho = \min_{\eta \in \Delta} \rho(\eta) > 0.$$

Alors le domaine

$$|y| < \rho$$

sera contenu dans chaque $U(\eta)$, $\eta \in \Delta$.

Si $x \in \Delta$ et $|y_0| < \varepsilon$, la fonction $\bar{y}(x, x_0, y_0)$ sera une fonction holomorphe et uniforme de $x$. Donc, d'après le théorème fondamental de l'équation différentielle,

$$\bar{y}(x, x_0, y_0) = R(x, y(x, x_0, y_0))$$

est une fonction holomorphe et uniforme de $x$ et de $y(x, x_0, y_0)$ si $x \in \Delta$ et $|y(x, x_0, y_0)| < \rho$. Par suite, on peut développer $R(x, y)$ en série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de $y$ comme il suit

$$\bar{y} = R(x, y) = w_0(x) + w_1(x) y + \cdots, \qquad (4)$$

ou $w_0(x)$, $w_1(x)$, ... sont des fonctions uniformes et holomorphes dans $\Delta$. De plus,

$$w_0(x) \equiv 0$$

puisque $\bar{y} \equiv 0$ pour $y \equiv 0$.

Comme $\bar{y}$ est une solution de (1), et $|\bar{y}| < \frac{\delta}{2}$ pour $x \in \Delta$, elle satisfait à l'équation (2)

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = f_1(x)\bar{y} + f_2(x)\bar{y}^2 + \cdots, \qquad (5)$$

En substituant l'expression (4) dans (5), on a

$$\sum \frac{dw_k}{dx} y^k + \sum k w_k y^{k-1} \frac{dy}{dx}$$
$$= \sum f_k \left( \sum w_j y^j \right)^k.$$

Or, $y(x, x_0, y_0)$ est aussi une solution de (1) et $|y| < \frac{\delta}{2}$ pour $x \in \Delta$, elle satisfait à l'équation (2). On a donc

$$\sum \frac{dw_k}{dx} y^k + \sum k w_k y^{k-1} \cdot \sum f_k y^k$$
$$= \sum f_k \left( \sum w_j y^j \right)^k. \qquad (6)$$

Puisque l'équation (6) est valable pour toute $y(x, x_0, y_0)$, $|y_0| < \varepsilon$, on trouve, en égalant les termes de la même puissance de $y$ dans les deux membres de (6),

$$\frac{dw_1}{dx} = 0, \qquad (7, 1)$$

$$\frac{dw_2}{dx} = -f_1 w_2 + (w_1^2 - w_1) f_2, \qquad (7, 2)$$

. . . . . .

$$\frac{dw_k}{dx} = -(k-1) f_1 w_k + P_k(f, w), \qquad (7, k)$$

. . . . . .

$P_k(f, w)$ étant un polynome en $f_1$, $f_2$, ...., $f_k$, $w_1$, $w_2$, ...., $w_{k-1}$.

Il s'agit de déterminer $w_1$, $w_2$, ... de ce système des équations comme fonctions holomorphes et uniformes dans $\Delta$. En remarquant que

$$f_1(x) = \cdots + \frac{\lambda}{x} + f_{1,0} + \cdots,$$

et que $\lambda$ n'est pas un nombre rationnel, on obtient, après un calcul tout à fait élémentaire,

$$w_1 = \mu = \text{const.}$$
$$w_2 = e^{-\int f_1 dx} \int e^{\int f_1 dx} (\mu^2 - \mu) f_2 \, dx,$$

. . . . .

$$w_k = e^{-(k-1)\int f_1 dx}\int e^{(k-1)\int f_1 dx} P_k \, dx ,$$

. . . . .

Comme on voit facilement, $w_k$ est un polynom de $k^{ième}$ degré en $\mu$ ne contenant pas de terme indépendant de $\mu$ . Donc, en ordonnant l'expression

$$\bar{y} = \mu y + \sum_{k=2}^{\infty} w_k(x,\mu) y^k$$

suivant les puissances croissantes de $\mu$ , on a

$$\bar{y} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y)\mu^k \qquad (8)$$

où $u_k(x,y)$ est une série entière de $y$ commençant par le terme de degré au moins égal a $k$ et dont les coefficients sont des fonctions uniformes et holomorphes de $x$ .

Puisque l'expression (8) satisfait formellement à l'équation

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}(f_1 y + f_2 y^2 + \cdots)$$
$$= f_1 \bar{y} + f_2 \bar{y}^2 + \cdots \qquad (9)$$

quelle que soit la valeur de $\mu$ , on trouve, en substituant l'expression (8) dans (9) et en égalant les termes de la même puissance en $\mu$ dans les deux membres de cette équation,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}(f_1 y + f_2 y^2 + \cdots) = f_1 u_1 , \qquad (10,1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}(f_1 y + f_2 y^2 + \cdots) = f_1 u_2 + f_2 u_1^2 , \qquad (10,2)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial u_k}{\partial y}(f_1 y + f_2 y^2 + \cdots)$$
$$= f_1 u_k + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_j=k} f_j(x)\, u_{m_1}\cdots u_{m_j} , \qquad (10,k)$$

. . . . .

Remplaçons $y$ par la solution $y(x,x_0,y_0)$ dans ces équations. Alors le premier membre de l'équation (10, k) sera égal a $du_k/dx$ . De l'équation (10, 1), on a

$$\frac{du_1}{dx} = f_1 u_1 .$$

Donc

$$u_1 = C e^{\int f_1 dx} = C x^{\lambda} v_1(x) , \qquad (11)$$

où $v_1(x)$ est une fonction uniforme et holomorphe dans $\Delta$ . Si nous faisons le prolongement analytique le long d'un contour fermé contenu dans $\Delta$ tournant autour de l'origine une fois dans le sens positif, $u_1(x,y)$ se changera en $u_1(x, \bar{y})$ . Par suite

$$\bar{u}_1 = u_1(x,\bar{y}) = e^{2\pi i\lambda} u_1(x,y). \qquad (12)$$

Or, en se rappelant la définition de $u_1$ , on a

$$u_1(x,y) = y + \alpha_2(x) y^2 + \cdots \qquad (13)$$

ou $\alpha_2(x)$ , $\alpha_3(x)$ , ... sont des fonctions uniformes de $x$ . Donc

$$\bar{u}_1 = \bar{y} + \alpha_2(x)\bar{y}^2 + \cdots$$
$$= \mu y + A_2(x) y^2 + \cdots . \qquad (14)$$

Ainsi, par (12), (13) et (14)

$$(\mu - e^{2\pi i\lambda}) y + (A_2(x) - e^{2\pi i\lambda}\alpha_2(x)) y^2$$
$$= 0 .$$

Puisque cette relation est valable pour toute $y(x,x_0,y_0)$, $|y_0| < \varepsilon$ , et que $\mu$ et $e^{2\pi i\lambda}$ sont des constantes indépendantes de $y_0$ , on a

$$\mu = e^{2\pi i\lambda}$$

Ensuite, l'équation (10, 2) nous donne

$$u_2 = C' e^{\int f_1 dx} + e^{\int f_1 dx}\int e^{-\int f_1 dx} f_2 u_1^2 dx$$
$$= C' x^{\lambda} v_1(x) + C^2 x^{\lambda} v_1(x)\int x^{\lambda} f_2 v_1^2 dx$$
$$= C' x^{\lambda} v_1(x) + (C x^{\lambda})^2 v_2(x) ,$$

$v_2(x)$ étant uniforme et holomorphe dans $\Delta$ . Par suite, on a

$$\bar{u}_2 = u_2(x,\bar{y})$$
$$= \mu C' x^{\lambda} v_1 + \mu^2 (C x^{\lambda})^2 v_2 .$$

Cependant, comme nous avons remarqué plus haut, $u_2(x,y)$ est une série entière de $y$ ne contenant que des termes de degré au moins égaux à 2. Donc $u_2(x, \bar{y})$ ne peut pas contenir le terme du premier degré en $\mu$, d'où il résulte

$$C' = 0, \quad u_2 = (Cx^\lambda)^2 v_2(x).$$

De même, on obtient en générale

$$u_K = (Cx^\lambda)^K v_K(x),$$

$v_K(x)$ étant une fonction uniforme et holomorphe dans $\Delta$ que l'on peut calculer par quadrature. Par conséquent

$$\bar{y} = \sum_{K=1}^{\infty} (Cx^\lambda)^k v_K(x) \mu^K, \quad \mu = e^{2\pi i \lambda}.$$

Pour obtenir l'expression analytique de $y(x, x_0, y_0)$, il suffit de faire un prolongement analytique de $\bar{y}$ le long d'un contour tournant autour de l'origine une fois dans le sens négatif. On trouve ainsi

$$y(x, x_0, y_0) = \sum_{K=1}^{\infty} (Cx^\lambda)^k v_k(x). \qquad (15)$$

On peut facilement vérifier que les fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ... ont, en générale, un point singulier essentiel a l'origine. Mais, quand l'origine est un pôle de $f_1$, $f_2$, ... au plus de premier ordre, $v_1$, $v_2$, ... sont toutes holomorphes à l'origine.

Dans ce cas, notre résultat coïncide avec celui de Briot et Bouquet.

Dans la discussion faite plus haut, nous avons supposé que les points singuliers fixes de l'équation (1) soient en nombre fini. Mais, quoiqu' ils soient en nombre infini, notre conclusion subsiste encore, à condition que l'origine soit un point singulier fixe isolé. Pour le démontrer, il suffit de faire une modification convenable des domaines $F$ et $F'$. Nous sommes ainsi arrivé au théorème suivant.

THEOREME. Soit $x = 0$ un point singulier fixe isolé de l'équation (1), et $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ une solution prenant la valeur initiale $y_0$ pour $x = x_0$. Si $|y_0|$ est suffisamment petit et si le résidu $\lambda$ de $a_0(x)/b_0(x)$ à $x = 0$ n'est pas un nombre rationnel, $\varphi(x, x_0, y_0)$ a des branches dont les expressions sont de la forme (15) dans le domaine annulaire autour de l'origine ne contenant aucun des points singuliers fixes.

Notre résultat peut s'étendre, sous certaines conditions, au cas où $a_K(x)$, $b_K(x)$ sont des fonctions multiformes. Mais ici, nous ne discuterons pas en détail sur ce sujet.

(*) Reçu le 17 Sep. 1953.

Institut de Technologie à Tokio.