INTEGRALFORMEL BETREFFEND NEUMANNSCHE RANDWERTAUFGABE FÜR EINEN KREISRING

Von Yûsaku KOMATU

1. Problemstellung.

Die zweidimensionale Dirichletsche bzw. Neumannsche Randwertaufgabe der Potentialtheorie lautet: Es ist eine in einem etwa glatt berandeten Grundgebiet auf der Ebene reguläre harmonische Funktion zu bestimmen, die selbst bzw. deren Normalableitung auf dem Rand mit einer vorgeschriebenen, etwa als stetig vorausgesetzten Funktion übereinstimmt. Bei der letzten soll die Randfunktion einer Bedingung genügen, daß ihr Mittelwert bezüglich der Bogenlänge verschwindet, damit eine Lösung irgendwie existieren kann. Es ist wohlbekannt, daß die Lösung der ersten Aufgabe stets existiert und sogar sich eindeutigerweise bestimmt, sowie daß auch die Lösung der zweiten Aufgabe unter der genannten Bedingung existiert und sogar sich, abgesehen von einer willkürlichen additiven Konstanten, eindeutigerweise bestimmt.

Im Falle des auf der z-Ebene gelegenen Einheitskreises ist die Lösung der ersten bzw. zweiten Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\varphi}) = U(\varphi)$$

bzw.

$$\frac{\partial v(e^{i\varphi})}{\partial \nu} = V(\varphi) \quad \text{mit} \quad \int_0^{2\pi} V(\varphi)d\varphi = 0,$$

worin mit $\partial/\partial\nu$ die Differentiation nach der inneren Normalen bezeichnet ist, bekanntlich gegeben durch das Poissonsche Integral

$$u(z) = \mathcal{R}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\varphi)\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\,d\varphi$$

bzw. durch das Neumannsche Integral

$$v(z) = v(0) - \mathcal{R}\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\lg\frac{1}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi$$
$$= v(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\lg\frac{1}{|e^{i\varphi}-z|}\,d\varphi.$$

Während der Einheitskreis sich als ein kanonisches Grundgebiet im einfach zusammenhängenden Fall ansehen läßt, spielt ein konzentrischer Kreisring eine entsprechende Rolle im zweifach zusammenhängenden Fall. Für den Kreisring $q<|z|<1$ ist die Lösung der ersten Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\varphi}) = M(\varphi), \quad u(qe^{i\varphi}) = N(\varphi)$$

auch bekanntlich gegeben durch das sogenannten Villatsche Integral[1])

$$u(z)$$
$$= \mathcal{J}\Big\{\frac{\omega_1}{\pi^2}\Big(\int_0^{2\pi} M(\varphi)\zeta\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$- \int_0^{2\pi} N(\varphi)\zeta_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$-\Big(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\Big)\lg z\int_0^{2\pi}(M(\varphi)-N(\varphi))d\varphi\Big)\Big\},$$

worin die Bezeichnungen sich beziehen auf die Weierstraßische Theorie der elliptischen Funktionen mit den primitiven Perioden $2\omega_1$ (reell) und $2\omega_3$ (rein imaginär), die der Beziehung genügen:

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{-i\lg q}{\pi}.$$

Nebenbei bemerkt, läßt sich der Faktor im letzten Glied, infolge der Legendreschen Relation $\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1 = \pi i/2$ auch einfacher in der Form schreiben

$$\frac{1}{2\omega_3} - \frac{\eta_1}{\pi i} = -\frac{\eta_3}{\lg q}.$$

Ferner, damit $u(z)$ als den reellen Anteil einer im Kreisring eindeutig analytischen Funktion angesehen werden kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Randfunktionen der Beziehung

$$\int_0^{2\pi} M(\varphi)d\varphi = \int_0^{2\pi} N(\varphi)d\varphi$$

genügt, welche die Monodromiebedingung genannt werden soll. Dann nimmt die Formel eine einfachere Gestalt

$$u(z)$$
$$= \mathcal{J}\Big\{\frac{\omega_1}{\pi}\Big(\int_0^{2\pi} M(\varphi)\zeta\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$- \int_0^{2\pi} N(\varphi)\zeta_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi\Big)\Big\}.$$

Da nur das Quotient $\omega_3/\omega_1 = -i\lg q/\pi$ in Betracht kommt, kann man ferner

$$\omega_1 = \pi \quad \text{und} \quad \omega_3 = -i\lg q$$

setzen und dann läßt sich die Formel in noch einfachere Gestalt bringen.

In der vorliegenden Note soll eine explizite Integraldarstellung betreffend die Neumannsche Aufgabe für den Kreisring hergeleitet werden, indem diese zweite Aufgabe auf die erste reduziert wird.

2. Beiläufige Betrachtungen.

Um das Grundgedanke zu erklären, soll zuerst das Neumannsche Integral im Falle des Einheitskreises beiläufig durch unsere Methode hergeleitet werden.

Nun sei $v(z)$ eine Lösung der zweiten Aufgabe für den Einheitskreis mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v(e^{i\varphi})}{\partial\nu} = V(\varphi).$$

Bezeichnet man mit $\tilde{v}(z)$ eine zu $v(z)$ konjugiert harmonische Funktion, so wird

$$\begin{aligned}\tilde{v}(e^{i\varphi}) &= \tilde{v}(1) + \int_0^{\varphi} \frac{d\tilde{v}(e^{i\varphi})}{d\varphi}\,d\varphi \\ &= \tilde{v}(1) - \int_0^{\varphi} \frac{\partial v(e^{i\varphi})}{\partial\nu}\,d\varphi \\ &= \tilde{v}(1) - \int_0^{\varphi} V(\varphi)\,d\varphi.\end{aligned}$$

Da die additive Konstante hierbei unwesentlich ist, kann man $\tilde{v}(1)=0$ setzen, und somit

$$\tilde{v}(e^{i\varphi}) = V^*(\varphi) \equiv -\int_0^{\varphi} V(\varphi)\,d\varphi.$$

Die analytische Funktion $\tilde{v}(z) - iv(z)$ läßt sich dann durch das Poissonsche Integral darstellen in der Form

$$\begin{aligned}&\tilde{v}(z) - iv(z) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^*(\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi - iv(0).\end{aligned}$$

Mithin, die Beziehungen

$$V^*(2\pi) = 0,$$

$$\int_0^{\varphi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi = 2i\,\lg\frac{1-z}{e^{i\varphi}-z} - \varphi$$

berücksichtigend, läßt sich die rechte Seite mittels der Teilintegration umformen in die Gestalt

$$\begin{aligned}&\tilde{v}(z) - iv(z) \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[V^*(\varphi)\Big(2i\,\lg\frac{1-z}{e^{i\varphi}-z} - \varphi\Big)\Big]_{\varphi=0}^{2\pi} \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\Big(2i\,\lg\frac{1-z}{e^{i\varphi}-z} - \varphi\Big)d\varphi \\ &- iv(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -iv(0) + \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\lg\frac{1}{e^{i\varphi}-z}\,d\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi V(\varphi)\,d\varphi.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort die Neumannsche Formel, indem man den imaginären Anteil trennt.

Es ist leicht zu zeigen, daß die so gewonnene Formel tatsächlich die zweite Aufgabe löst. In der Tat, erhält man

$$\begin{aligned}-\frac{\partial v(re^{i\theta})}{\partial r} &= \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\lg\frac{1}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\Big(\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2} - 1\Big)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} V(\varphi)\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}\,d\varphi,\end{aligned}$$

woraus sich mit Berücksichtigung des bekannten Randverhaltens des Poissonschen Integrals unmittelbar ergibt

$$\frac{\partial v(e^{i\theta})}{\partial\nu} = -\lim_{r\to 1-0}\frac{\partial v(re^{i\theta})}{\partial r} = V(\theta).$$

Die letzte Gleichheit bleibt bekanntlich sogar gültig fast überall, wenn nur die Integrabilität von $V(\varphi)$ vorausgesetzt ist, und sie gilt gewiß an jeder Stetigkeitsstelle $\varphi = \theta$ von $V(\varphi)$.

3. Heuristische Überlegung.

Der zweifach zusammenhängende Fall läßt sich auch in ganz analoger Weise behandeln, was im folgenden erledigt werden soll.

Es sei nun $v(z)$ eine Lösung der zweiten Aufgabe für den Kreisring $q < |z| < 1$ mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v(e^{i\varphi})}{\partial\nu} = P(\varphi),\quad \frac{\partial v(qe^{i\varphi})}{\partial\nu} = Q(\varphi),$$

worin mit $\partial/\partial\nu$ die Differentiation nach der (bezüglich des Grundgebiets) inneren Normalen bezeichnet ist. Die Randfunktionen sollen hierbei natürlich der Bedingung genügen:

$$\int_0^{2\pi}\big(P(\varphi) + q\,Q(\varphi)\big)\,d\varphi = 0.$$

Jede zu $v(z)$ konjugiert (reguläre) harmonische Funktion $\tilde{v}(z)$ ist im allgemeinen mehrdeutig, aber besitzt einen bestimmten Periodizitätsmodul, der mit $-2\pi a$ bezeichnet werden soll. Die analytische

Funktion $v(z)+i\tilde{v}(z)+a\lg z$ ist dann im Kreisring eindeutig. Die Randwerte von $\tilde{v}(z)+a\arg z$ auf $|z|=1$ bzw. $|z|=q$ seien $P^*(\varphi)$ bzw. $Q^*(\varphi)$ (an $z=e^{i\varphi}$ bzw. $z=qe^{i\varphi}$). Es wird dann

$$P^*(\varphi)=P^*(0)-\int_0^{\varphi}P(\varphi)d\varphi+a\varphi,$$

$$Q^*(\varphi)=Q^*(0)+\int_0^{\varphi}q\,Q(\varphi)d\varphi+a\varphi.$$

Die Eindeutigkeit von $\tilde{v}(z)+a\arg z$ ergibt sich $P^*(2\pi)=P^*(0)$ (und $Q^*(2\pi)=Q^*(0)$) und somit

$$a=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi)d\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q\,Q(\varphi)d\varphi.$$

Da $v(z)+a\lg|z|$ sich auch eindeutig verhält, so ergibt sich nach der Monodromiebedingung die Beziehung

$$\int_0^{2\pi}P^*(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}Q^*(\varphi)d\varphi.$$

Die beiden Seiten der letzten Gleichheit sind

$$\int_0^{2\pi}P^*(\varphi)d\varphi=2\pi P^*(0)-2\pi\int_0^{2\pi}P(\varphi)d\varphi+\int_0^{2\pi}\varphi P(\varphi)d\varphi+2\pi^2a,$$

$$\int_0^{2\pi}Q^*(\varphi)d\varphi=2\pi Q^*(0)+2\pi\int_0^{2\pi}q\,Q(\varphi)d\varphi-\int_0^{2\pi}\varphi\,q\,Q(\varphi)d\varphi+2\pi^2a,$$

und somit läßt sich die Monodromiebedingung auch bringen in die Gestalt

$$P^*(0)-Q^*(0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(P(\varphi)+q\,Q(\varphi))d\varphi.$$

Die Anwendung der Villatschen Integralformel auf die in $q<|z|<1$ eindeutig analytische Funktion $\tilde{v}(z)-ia\lg z-iv(z)$ liefert nun

$$\tilde{v}(z)-ia\lg z-iv(z)$$
$$=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}P^*(\varphi)\zeta(i\lg z+\varphi)d\varphi$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}Q^*(\varphi)\zeta_3(i\lg z+\varphi)d\varphi-ic_1,$$

worin c_1 eine reelle Konstante bedeutet und ferner der Einfachheit wegen die primitiven Perioden

$$2\omega_1=2\pi,\qquad 2\omega_3=-2i\lg q$$

angenommen sind.

Mit Hilfe der Formeln

$$\int_0^{\varphi}\zeta(i\lg z+\varphi)d\varphi=\lg\frac{\sigma(i\lg z+\varphi)}{\sigma(i\lg z)},$$

$$\int_0^{\varphi}\zeta_3(i\lg z+\varphi)d\varphi=\lg\frac{\sigma_3(i\lg z+\varphi)}{\sigma_3(i\lg z)}$$

läßt sich die rechte Seite mittels der Teilintegration umformen:

$$\tilde{v}(z)-ia\lg z-iv(z)$$
$$=\frac{1}{\pi i}\left[P^*(\varphi)\lg\frac{\sigma(i\lg z+\varphi)}{\sigma(i\lg z)}-Q^*(\varphi)\lg\frac{\sigma_3(i\lg z+\varphi)}{\sigma_3(i\lg z)}\right]_{\varphi=0}^{2\pi}$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}(P(\varphi)-a)\lg\frac{\sigma(i\lg z+\varphi)}{\sigma(i\lg z)}d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}(q\,Q(\varphi)+a)\lg\frac{\sigma_3(i\lg z+\varphi)}{\sigma_3(i\lg z)}d\varphi+ic_1.$$

Weiter mit Berücksichtigung der Beziehungen

$$P^*(2\pi)=P^*(0),\qquad Q^*(2\pi)=Q^*(0),$$

$$\int_0^{2\pi}(P(\varphi)-a)d\varphi=\int_0^{2\pi}(q\,Q(\varphi)+a)d\varphi=0,$$

$$\lg\frac{\sigma(i\lg z+2\pi)}{\sigma(i\lg z)}=2\eta_1(i\lg z+\pi)+i\pi,$$

$$\lg\frac{\sigma_3(i\lg z+2\pi)}{\sigma_3(i\lg z)}=2\eta_1(i\lg z+\pi),$$

gewinnt man somit

$$\tilde{v}(z)-ia\lg z-iv(z)$$
$$=\frac{2\eta_1}{\pi i}(P^*(0)-Q^*(0))(i\lg z+\pi)+P^*(0)$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}(P(\varphi)-a)\lg\sigma(i\lg z+\varphi)d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}(q\,Q(\varphi)+a)\lg\sigma_3(i\lg z+\varphi)d\varphi+ic_1.$$

Indem man den imaginären Anteil der beiden Seiten vergleicht, ergibt sich daraus die Beziehung

$$v(z)=c_2-a\lg|z|-\frac{2\eta_1}{\pi}(P^*(0)-Q^*(0))\arg z$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(P(\varphi)-a)\lg|\sigma(i\lg z+\varphi)|d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(q\,Q(\varphi)+a)\lg|\sigma_3(i\lg z+\varphi)|d\varphi,$$

worin $c_2=c_1+2\eta_1(P^*(0)-Q^*(0))$ wieder eine Konstante bedeutet.

Andererseits, wenn man die beiden Seiten der Identität

$$1=\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\zeta(i\lg z+\varphi)d\varphi$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\zeta_3(i\lg z+\varphi)\,d\varphi$$

bezüglich der Veränderlichen $i\lg z$ integriert, so erhält man

$$i\lg z = \mathrm{const} + \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\lg\sigma(i\lg z+\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\lg\sigma_3(i\lg z+\varphi)\,d\varphi,$$

woraus sich durch Trennung des imaginären Anteils ergibt

$$-\lg|z| = c_3 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lg|\sigma(i\lg z+\varphi)|\,d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lg|\sigma_3(i\lg z+\varphi)|\,d\varphi$$

mit einer Konstanten c_3. Mithin gelangt man schließlich zur gewünschten Formel

$$\begin{aligned} v(z) = {} & c \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\lg|\sigma(i\lg z+\varphi)|\,d\varphi \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q\,Q(\varphi)\lg|\sigma_3(i\lg z+\varphi)|\,d\varphi \\ & + \frac{\eta_1}{\pi^2}\arg z\int_0^{2\pi}\varphi\,(P(\varphi)+q\,Q(\varphi))\,d\varphi, \end{aligned}$$

worin c eine willkürliche Konstante bedeutet.

Bisher haben wir der Einfachheit halber angenommen, daß die primitiven Perioden gleich $2\omega_1 = 2\pi$ und $2\omega_3 = -2i\lg q$ sind. Aber wenn man allgemein die primitiven Perioden $2\omega_1$ (reell) und $2\omega_3$ (rein imaginär) mit $\omega_3/\omega_1 = -i\lg q/\pi$ braucht, so wird man gelangen zur Integralformel

$$\begin{aligned} v(z) = {} & c \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\lg\left|\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)\right|d\varphi \\ & + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q\,Q(\varphi)\lg\left|\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)\right|d\varphi \\ & - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\arg z\int_0^{2\pi}\varphi\,(P(\varphi)+q\,Q(\varphi))\,d\varphi \\ = {} & c \\ & + \mathfrak{R}\Big\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\lg\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ & \quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q\,Q(\varphi)\lg\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ & \quad - i\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\lg z\int_0^{2\pi}\varphi\,(P(\varphi)+q\,Q(\varphi))\,d\varphi\Big\}. \end{aligned}$$

4. Bestätigung des Randverhaltens.

Die eben geführte heuristische Überlegung läßt sich nunmehr umkehren, um sie streng zu machen.

Es zeigt sich zuerst, daß sich der eben hergeleitete Ausdruck für $v(z)$ in $q < |z| < 1$ eindeutig verhält. In der Tat, wenn der Punkt z einmal um den Ursprung im positiven Sinne umschreibt, dann geht $i\lg z$ in $i\lg z - 2\pi$ über und also transformiert sich $v(z)$ in den Ausdruck

$$\begin{aligned} & v(z) \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\,2\eta_1\frac{\omega_1}{\pi}(-\arg z+\varphi-\pi)\,d\varphi \\ & - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q\,Q(\varphi)\,2\eta_1\frac{\omega_1}{\pi}(-\arg z+\varphi-\pi)\,d\varphi \\ & + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\,2\pi\int_0^{2\pi}\varphi\,(P(\varphi)+q\,Q(\varphi))\,d\varphi, \end{aligned}$$

der ersichtlich mit $v(z)$ selbst übereinstimmt. Mithin ist $v(z)$ eindeutig.

Um nun das Randverhalten von $v(z)$ zu bestätigen, soll es bezüglich $r = |z|$ differenziert werden. Dann erhält man

$$\frac{\partial v(z)}{\partial|z|} = \mathfrak{R}\Big\{-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\frac{1}{|z|}\int_0^{2\pi} P(\varphi)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi - \frac{\omega_1}{\pi^2 i}\frac{q}{|z|}\int_0^{2\pi} Q(\varphi)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi\Big\},$$

woraus mit Berücksichtigung des bekannten Randverhaltens des Villatschen Integrals unmittelbar folgt:

$$\frac{\partial v(e^{i\theta})}{\partial\nu} = -\lim_{r\to 1-0}\frac{\partial v(re^{i\theta})}{\partial r} = P(\theta),$$

$$\frac{\partial v(qe^{i\theta})}{\partial\nu} = \lim_{r\to q+0}\frac{\partial v(re^{i\theta})}{\partial r} = Q(\theta).$$

Die Überlegung zeigt weiter, daß die durch unsere Integralformel dargestellte Funktion $v(z)$ den eben gestellten Randbedingungen sogar fast überall genügt, wenn nur die Integrabilität von $P(\varphi)$ und $Q(\varphi)$ vorausgesetzt wird, und daß die Gleichheit gewiß an jeder Stetigkeitsstelle $\varphi = \theta$ von $P(\varphi)$ bzw. $Q(\varphi)$ gelten muß [2].

1) Eine kurze Herleitungsweise der Villatschen Formel findet sich nebst dem betreffenden Literaturverzeichnis in der Note: Y. Komatu, Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique. Proc. Imp. Acad. Tokyo 21(1945), 94-96.

2) Eine alternative Methode wird in einer demnächst erscheinenden Note enthalten, in der die verwandten Aufgaben aus mehr allgemeinem Standpunkt behandelt werden sollen.

Mathematisches Seminar,
Institut für Technologie zu Tokyo.

(*) Eingegangen am 1. April, 1953.