UNE DÉMONSTRATION DIRECTE D'UN THÉORÈME DE M. G.W.MACKEY

Par Osamu TAKENOUCHI

(Communicated by Y. Komatu)

Soit E un espace linéaire sur le corps des nombres réels ou complexes. Une fonctionnelle $N(x)$ convexe et non-négative sur E s'appelle une pseudo-norme si elle satisfait à l'égalité $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ pour tous les nombres α et $x \in E$. Une fonctionnelle linéaire $f(x)$ sur E est appelée bornée (N), si l'inégalité

$$f(x) \leqslant C \cdot N(x)$$

est toujours remplie par un certain nombre fixe $C > 0$, quel que soit l'élément $x \in E$.

L'ensemble P de toutes les fonctionnelles linéaires sur E bornées (N) pour une certaine pseudo-norme fixée N constitue évidemment un espace linéaire qui est nommé "pseudo-norm set" par M. G.W.Mackey. Il a établi, dans son mémoire, le théorème suivant très intéressant (cf. la note):

<u>Étant donnés deux</u> "pseudo-norm sets" P_1, P_2, <u>le plus petit espace linéaire formé des fonctionnelles linéaires sur</u> E <u>et contenant</u> P_1, P_2, <u>qui se note</u> $P_1 + P_2$, <u>est aussi un</u> "pseudo-norm set".

Il y a d'autre forme de ce théorème. Observons que s'il sont données deux pseudo-normes $N_1(x)$, $N_2(x)$ sur E, la fonctionnelle $N(x)$ donnée par $N(x) = N_1(x) + N_2(x)$ pour tous les $x \in E$ est aussi une pseudo-norme, que l'on pourrait écrire $N = N_1 + N_2$. Alors, le théorème s'énonce ainsi:

<u>Théorème</u>: <u>Si la fonctionnelle linéaire</u> $f(x)$ <u>sur</u> E <u>est bornée</u> $(N_1 + N_2)$, <u>elle est la somme de deux fonctionnelles linéaires</u> $f_1(x)$, $f_2(x)$ <u>sur</u> E, <u>chacune est bornée</u> (N_1) <u>et</u> (N_2) <u>respectivement</u>.

Dans cette note nous donnons une démonstration directe de son théorème sous cette forme.

En premier lieu, nous pouvons admettre que $f(x)$ est bornée ni pour (N_1) ni pour (N_2). Sous cette convention le sous-espace linéaire est fermé par rapport à la pseudo-norme $N_1 + N_2$, mais il ne l'est pas pour aucune des pseudo-normes N_1 et N_2. Par conséquent, si nous étendons dans E ce sous-espace M comme être fermé par rapport à la pseudo-norme N_1 ou N_2, c'est nécessairement identique à E. Donc, pour un élément $x_o \in M$ arbitraire mais fixé, on peut choisir deux suites d'éléments de M, $x_1, x_2, \dots$ et $y_1, y_2, \dots$ telles que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} N_1(x_n - x_o) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} N_2(y_n - x_o) = 0.$$

D'autre part considérons dans M ces pseudo-normes N_1, N_2 et les désignons par $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$. Alors la fonctionnelle $\bar{N}(z)$ sur M définie comme

$$\bar{N}(z) = \inf\left\{ \bar{N}_1(z_1) + \bar{N}_2(z_2) \ ; \ z_1, z_2 \in M, \quad z_1 + z_2 = z \right\}$$

est aussi une pseudo-norme sur M. Évidemment $\bar{N}(z) \leqslant \bar{N}_1(z)$, $\bar{N}_2(z)$ pour tous $z \in M$, donc les suites $x_1, x_2, \dots ; y_1, y_2, \dots$ sont des suites de Cauchy suivant cette pseudo-norme $\bar{N}$, et, par suite, $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots$ l'est aussi. Mais cette dernière ne converge pas vers 0. En effet, pour les $x_n - y_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ il existe des $z_n \in M$ tels que

$$\bar{N}_1(x_n - z_n) + \bar{N}_2(z_n - y_n) \leqslant \bar{N}(x_n - y_n) + 2^{-n}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}(N_1+N_2)(z_n-x_o) &= N_1(z_n-x_o)+N_2(z_n-x_o) \\ &\leqslant N_1(x_n-x_o)+\bar{N}_1(x_n-z_n)+N_2(y_n-x_o) \\ &\quad +\bar{N}_2(z_n-y_n)\end{aligned}$$

$$\leq N_1(x_n - x_o) + N_2(y_n - x_o) + \bar{N}(x_n - y_n) + 2^{-n} .$$

Or, si la suite $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, ... convergait vers 0 suivant la pseudo-norme N, cette inégalité impliquerait que

$$\lim_{n\to\infty} (N_1 + N_2)(z_n - x_o) = 0.$$

Mais cela est évidemment une contradiction, car $z_n \in M$ et M était fermé par rapport à la pseudo-norme $N_1 + N_2$.

Posons maintenant

$$M_1 = \{z; \quad z \in M, \quad \bar{N}(z) = 0\} .$$

Alors M_1 est un sous-espace de M, et on peut former l'espace quotient (algébrique) $\bar{M} = M/M_1$. L'image d'un élément $z \in M$, c'est-à-dire la classe suivant M_1 qui contient l'élément z, sera notée par $\bar{z}$. Une pseudo-norm se laisse introduire dans $\bar{M}$ très naturellement de la pseudo-norme $\bar{N}$ sur M, car pour $z_1, z_2 \in M$, appartenant à la même classe suivant M_1, on a $\bar{N}(z_1) = \bar{N}(z_2)$; de plus, il est clair que cette pseudo-norme fournit, en réalité, une norme sur $\bar{M}$. La suite d'éléments $\bar{x}_1 - \bar{y}_1$, $\bar{x}_2 - \bar{y}_2$, ... forme une suite de Cauchy suivant cette norme, mais cela n'est pas convergente vers 0, parce qu'elle ne converge pas vers 0 dans M.

Alors on peut établir l'existence d'une fonctionnelle linéaire $\bar{g}$ sur $\bar{M}$ qui est bornée $(\bar{N})$ et qui satisfait à la condition

$$\lim_{n\to\infty} \bar{g}(\bar{x}_n - \bar{y}_n) \neq 0.$$

Par la multiplication d'un nombre convenable, nous pouvons prendre cette limite égale à $f(x_o)$. Si l'on définit la fonctionnelle linéaire $g(z)$ sur M par

$$g(z) = \bar{g}(\bar{z}) \qquad (z \in \bar{z})$$

c'est aussi bornée $(\bar{N})$ dans M. Par suite, comme $x_1, x_2, \ldots$; $y_1, y_2, \ldots$ forment des suites de Cauchy suivant la pseudo-norme $\bar{N}$, il existe les $\lim_{n\to\infty} g(x_n)$, $\lim_{n\to\infty} g(y_n)$, et on a

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) - \lim_{n\to\infty} g(y_n) = f(x_o).$$

Posons maintenant pour un arbitraire $x = \lambda x_o + z \quad (z \in M)$,

$$f_1(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} g(x_n) + g(z),$$

$$f_2(x) = -\lambda \lim_{n\to\infty} g(y_n) - g(z).$$

Alors nous avons deux fonctionnelles linéaires sur E et elles sont bornées (N_1) et (N_2) respectivement. De plus il est clair que

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

pour tous $x \in E$, ce qui démontre la proposition.

(*) Reçu le 31 Mai 1951.

Note: G.W.Mackey: On infinite-dimensional linear spaces, Theorem VII-5, Trans. Amer. Math. Soc. tome 57 (1945), p.199.

Université d'Okayama, Okayama.