

SUR ALLURES DE LA DENSITÉ DE POINCARÉ ET SES DÉRIVÉES AU VOISINAGE D'UN POINT FRONTIÈRE

Dédié à Monsieur le professeur Nobuyuki Suita à l'occasion
de son soixantième anniversaire

SHINJI YAMASHITA

Résumé. Soit a un point frontière et isolé d'un domaine hyperbolique du plan complexe. Soit $\Pi(z)|dz|$ la métrique de Poincaré de ce domaine. Nous étudions quelques allures de Π et ses dérivées partielles Π_z, Π_{zz} et $\Pi_{z\bar{z}}$ au voisinage de a . Par exemple,

$$\Pi_z(z) = O(|z-a|^{-2}(-\log|z-a|)^{-1}) \quad \text{pour } z \rightarrow a.$$

L'exactitudes d'ordres sont démontrées. Quelques résultats sont obtenus aussi dans le cas où a n'est pas isolé.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30C99.

1. Introduction. Soit G toujours un domaine du plan complexe $C = \{z \mid |z| < +\infty\}$ tel que le complément $C \setminus G$ contienne au moins deux points. Un tel domaine s'appelle hyperbolique. Alors, G a la métrique de Poincaré $\Pi_G(z)|dz|$ avec la densité $\Pi_G > 0$ définie par une projection holomorphe f sur G du disque unité ouvert $D = \{w \mid |w| < 1\}$, regardé comme le revêtement universel de G , en notation: $f \in \text{Proj}(D, G)$. Autrement dit, on définit

$$(1.1) \quad 1/\Pi_G(z) = (1 - |w|^2)|f'(w)|,$$

où $z = f(w)$, $w \in D$. Le côté droit est indépendant du choix particulier de f et w , pour autant que $z = f(w)$ soit satisfaite. La dérivée f' de $f \in \text{Proj}(D, G)$ ne s'annule jamais dans D . Soit ∂G la frontière de G dans C . Soit, de plus,

$$\Phi_n(z, a) = |z-a|^n \log \frac{1}{|z-a|}$$

où $a \in C$, $z \in C \setminus \{a\}$ et $n=1, 2, 3$. Le premier résultat est le

THÉORÈME 1. Soit $a \in \partial G$ un point isolé de ∂G . Alors,

Received June 5, 1992.

$$(1.2) \quad \lim_{z \rightarrow a} \Phi_1(z, a) \Pi_G(z) = 1/2.$$

Peut-être, le théorème 1 est connu ; voir, par exemple [6, p. 322, Corollary 1], l'expression est un peut incomplète ; nous n'insistons jamais de priorité. Je remercie la/le référée qui m'a appris le mémoire [6]. Mais, il est intéressant pour la comparaison du théorème 2 ci-dessous.

Soient, pour $z = x + iy \in C$,

$$2(\partial/\partial z) = \partial/\partial x - i\partial/\partial y \quad \text{et} \quad 2(\partial/\partial \bar{z}) = \partial/\partial x + i\partial/\partial y.$$

Alors, l'opérateur $\Delta = 4(\partial^2/\partial z \partial \bar{z})$ est laplacien. Nous allons étudier quelques allures asymptotiques des dérivées, jusqu'à les secondes, de Π_G , allures qui sont moins précises relativement à celle pour Π_G elle-même dans (1.2). Le second résultat est le

THÉORÈME 2. *Soit $a \in \partial G$ un point isolé de ∂G . Alors, nous avons inégalités (1.3)-(1.5) suivantes :*

$$(1.3) \quad \limsup_{z \rightarrow a} \Phi_2(z, a) |(\partial/\partial z) \Pi_G(z)| \leq 1.$$

$$(1.4) \quad \limsup_{z \rightarrow a} \Phi_3(z, a) |(\partial^2/\partial z^2) \Pi_G(z)| \leq 11/2.$$

$$(1.5) \quad \limsup_{z \rightarrow a} \Phi_3(z, a) |(\partial^2/\partial z \partial \bar{z}) \Pi_G(z)| \leq 2.$$

Notons que $(\partial^2/\partial \bar{z}^2) \Pi_G(z) = \overline{(\partial^2/\partial z^2) \Pi_G(z)}$ et $(\partial^2/\partial z \partial \bar{z}) \Pi_G(z) \geq 0$. Nous ne pouvons pas affirmer l'exactitudes de trois constantes 1, 11/2, et 2 dans (1.3)-(1.5). Mais, l'exactitudes d'ordres $\Phi_n(z, a)$ dans (1.3)-(1.5) se démontrent par les suivantes, où $H = D \setminus \{0\}$, disque percé ; voir la section 4.

$$(1.6) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_2(z, 0) |(\partial/\partial z) \Pi_H(z)| = 1/4.$$

$$(1.7) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_3(z, 0) |(\partial^2/\partial z^2) \Pi_H(z)| = 3/8.$$

$$(1.8) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \Phi_3(z, 0) |(\partial^2/\partial z \partial \bar{z}) \Pi_H(z)| = 1/8.$$

Dans la section 3 nous étudions des allures dans le cas où a n'est pas isolé. Dans la section 5 nous étudions des allures du rayon d'univalence dans le cas où a est isolé.

2. Preuve du théorème 1. Pour le disque percé :

$$\Delta(b, S) = \{z; 0 < |z - b| < S\}, \quad b \in C, \quad S > 0,$$

nous avons l'égalité

$$1/\Pi_{\Delta(b, S)}(z) = 2|z - b| \log \frac{S}{|z - b|}$$

par la projection :

$$z = b + S \exp\left(\frac{w+1}{w-1}\right) \in \text{Proj}(D, \Delta(b, S)).$$

Notre théorème 1 est, en effet, une conséquence immédiate du

THÉORÈME 1 BIS. Soit $a \in \partial G$ un point isolé de ∂G et soit

$$R(a) = \inf\{|\zeta - a|; \zeta \in \partial G \setminus \{a\}\}.$$

Alors,

$$(2.1) \quad 2|z - a| \log \frac{R(a)}{|z - a|} \leq 1/\Pi_G(z) \leq 2|z - a| \log \frac{R(a)}{|z - a|} + 2c_H |z - a|$$

pour $z \in \{z \in G; |z - a| \leq R(a)\}$, où

$$c_H = \Gamma(1/4)^4 (4\pi^2)^{-1} = 4.376\dots$$

L'égalité dans la première partie de (2.1) arrive en chaque $z \in G$ quand $G = \Delta(a, S)$ car $R(a) = S$ dans ce cas. D'autre part, celle dans la seconde arrive en $z = -1$ dans le cas $G = C \setminus \{0, 1\}$ et $a = 0$. En effet, $2\Pi_{C \setminus \{0, 1\}}(-1) = 1/c_H$; voir [1, p. 436].

Posons $R = R(a)$ pour simplicité. Nous avons besoin du principe des métriques hyperboliques (ou, de Poincaré): Pour un sous-domaine A d'un domaine hyperbolique B nous avons:

$$\Pi_A(z) \geq \Pi_B(z) \quad \text{pour tout } z \in A;$$

voir [3, p. 50]. Alors, la première inégalité de (2.1) est une conséquence immédiate de ce principe par la relation $\Delta(a, R) \subset G$ avec la continuité de Π_G .

Il y a $q \in \partial G \setminus \{a\}$ tel que $|q - a| = R$. Alors, la relation $G \subset C \setminus \{a, q\}$ montre que

$$(2.2) \quad 1/\Pi_G(z) \leq 1/\Pi_{C \setminus \{a, q\}}(z) \quad \text{pour tout } z \in G.$$

Puisque $z = (q - a)\zeta + a$ représente $C \setminus \{0, 1\}$ sur $C \setminus \{a, q\}$, on a

$$(2.3) \quad 1/\Pi_{C \setminus \{a, q\}}(z) = |q - a| / \Pi_{C \setminus \{0, 1\}}\left(\frac{z - a}{q - a}\right)$$

pour chaque $z \in C \setminus \{a, q\}$. D'autre part, J. A. Hempel a démontré l'inégalité du type de Landau en la forme exacte:

$$1/\Pi_{C \setminus \{0, 1\}}(\zeta) \leq 2|\zeta|(|\log|\zeta|| + c_H)$$

pour chaque $\zeta \in C \setminus \{0, 1\}$; voir [1, (4.1)]. Notons que Hempel adopte $2\Pi_G$ comme la densité de Poincaré. En combinant cette estimation avec (2.2) et (2.3) nous avons la seconde inégalité dans (2.1) par la continuité de Π_G .

3. Allures de Π_G près d'un $b \in \partial G$ général ou non isolé. En effet, (2.2) est vraie pour toute paire a, q des points sur ∂G pour autant que $a \neq q$ soit satisfaite; ici, a n'est pas nécessairement isolé. Donc,

$$(3.1) \quad 1/\Pi_G(z) \leq 2|z-b| \left\{ \left| \log \left| \frac{z-b}{q-b} \right| \right| + c_H \right\}, \quad z \in G,$$

où $b, q \in \partial G$ et $b \neq q$. Alors, on a

$$\liminf_{z \rightarrow b} \Phi_1(z, b) \Pi_G(z) \geq 1/2$$

pour tout point $b \in \partial G$. En particulier, $\lim_{z \rightarrow b} |z-b|^p \Pi_G(z) = +\infty$ pour tout point $b \in \partial G$ et pour tout $0 \leq p < 1$.

Soit $b \in \partial G$. Supposons qu'il y a deux constantes $\varepsilon = \varepsilon(b) > 0$ et $Q = Q(b) \geq 1$ telles que, pour tout $r, 0 < r < \varepsilon$, on puisse trouver $q = q(r) \in \partial G$ avec

$$r/Q \leq |q-b| \leq rQ.$$

Alors,

$$1/\Pi_G(z) \leq 2(\log Q + c_H)|z-b| \text{ pour } z \in G \text{ avec } |z-b| < \varepsilon(b).$$

En effet, considérons (3.1) avec b et $q = q(|z-b|)$. Évidemment, b n'est pas isolé. En particulier, on a immédiatement,

$$\liminf_{z \rightarrow b} |z-b| \Pi_G(z) \geq 1/(2 \log Q + 2c_H).$$

Deux tels exemples de b sont proposés.

Exemple 1. Si la composante connexe de ∂G contenant $b \in \partial G$ est un continu non dégénéré, alors on a $Q(b) = 1$ toujours avec $\varepsilon(b) > 0$ appropriée.

Exemple 2. Étant donné $Q > 1$ nous posons N le plus petit nombre naturel $\geq 1/(Q^2 - 1)$. Soit $P_n = Q/n$, et soit $G = \mathbb{C} \setminus \{P_n\}_{n \geq N}$. Alors, pour $b = 0 \in \partial G$ on a $\varepsilon = 1/N$ et $Q(b) = Q$. En effet, pour $r, 0 < r < 1/N$, on a $n \geq N$ tel que $1/(n+1) \leq r < 1/n$. Ensuite, $r/Q < P_{n+1} \leq rQ$, d'où $q = P_{n+1}$.

Il est facile d'observer que

$$\liminf_{z \rightarrow 1} |z-1| \Pi_D(z) = 1/2.$$

Est-ce que

$$\limsup_{z \rightarrow b} |z-b| \Pi_G(z) < +\infty$$

pour $b \in \partial G$ spécifié ci-dessus par ε et Q ? Un contre-exemple plus fort est pourvu par

$$\limsup_{z \rightarrow 1} |z-1|^2 \Pi_D(z) = +\infty$$

car $|z-1|^2 \Pi_D(z) = 1/\operatorname{Re}\{(1+z)/(1-z)\}$. Encore, il y a un domaine U tel que U soit "maigre" près de $0 \in \partial U$, ∂U étant un continu, et que

$$(3.2) \quad \limsup_{z \rightarrow 0} |z|^2 \Pi_U(z) = +\infty.$$

Le domaine cité est

$$U = \{z; |\operatorname{Im}(z^{-1} + 2^{-1}\pi i)| < \pi/2\}$$

avec $\partial U = \{z; |z|^2 = \operatorname{Im}z/\pi \text{ ou } \operatorname{Im}z = 0\}$ et 0 étant une cuspide de ∂U . Puisque

$$1/\Pi_U(z) = 2|z|^2 \sin\left(\frac{\operatorname{Im}z}{|z|^2}\right) \quad \text{pour } z \in U,$$

on a, sur un cercle $\{z; |z|^2 = (k/\pi) \operatorname{Im}z\}$ (pour tout $k > 1$ fixé),

$$|z|^2 \Pi_U(z) = 1/(2 \sin(\pi/k)).$$

Maintenant, il est facile de démontrer (3.2). Notons que

$$\liminf_{z \rightarrow 1} |z-1|^2 \Pi_D(z) = 0 \quad \text{et toujours } |z|^2 \Pi_U(z) \geq 1/2.$$

4. Preuve du théorème 2. Pour $z \in G$ nous posons

$$\delta_G(z) = \inf\{|\zeta - z|; \zeta \in \partial G\} \quad \text{et} \quad \gamma_G(z) = |(\partial/\partial z)\{1/\Pi_G(z)\}|.$$

Nous connaissons l'inégalité exacte :

$$(4.1) \quad \delta_G(z) \Pi_G(z) \leq \frac{2}{2 + \gamma_G(z)}, \quad z \in G;$$

voir [4, (7.3)]. Il résulte de (4.1) et de (2.1), avec $\delta_G(z) = |z-a|$ pour $0 < |z-a| \leq R(a)/2$, que

$$(4.2) \quad |(\partial/\partial z)\Pi_G(z)| \leq \frac{\log(R(a)/|z-a|) + c_H - 1/2}{|z-a|^2 (\log(R(a)/|z-a|))^2}$$

pour $z \in \{0 < |z-a| \leq R(a)/2\}$. Alors, il est facile de démontrer (1.3).

Après quelques calculs simples, partant de (1.1), on a

$$(\partial^2/\partial z \partial \bar{z})\Pi_G(z) = \Pi_G(z)^3 + |(\partial/\partial z)\Pi_G(z)|^2 \Pi_G(z)^{-1}, \quad z \in G,$$

qui est essentiellement l'identité de la courbure de Gauss pour la métrique $\Pi_G(z)|dz|$, c'est-à-dire que

$$\Delta \log \Pi_G(z) = 4\Pi_G(z)^2, \quad z \in G.$$

Il résulte donc de (2.1) et (4.2) que

$$\begin{aligned}
& (\partial^2/\partial z\partial\bar{z})\Pi_G(z) \\
& \leq \frac{2(\log(R(a)/|z-a|)+c_H)(\log(R(a)/|z-a|)+c_H-1/2)^2+(1/8)\log(R(a)/|z-a|)}{|z-a|^3(\log(R(a)/|z-a|))^4}
\end{aligned}$$

pour $z \in \{0 < |z-a| \leq R(a)/2\}$. L'inégalité (1.5) alors s'obtient immédiatement.

Pour démontrer (1.4) nous allons utiliser l'inégalité exacte :

$$(4.3) \quad (1-|w|^2)^2 \left| \frac{g'''(w)}{g'(w)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(w)}{g'(w)} \right)^2 \right| \leq 6 \left(\left\{ \frac{(1-|w|^2)|g'(w)|}{\delta(w, g)} \right\}^2 - 1 \right)$$

pour $w \in D$ où g est holomorphe dans D , $g'(w) \neq 0$, et $\delta(w, g)$ est le plus grand $r > 0$ tel que le disque d'une feuille et du centre $g(w)$, $\{\zeta; |\zeta - g(w)| < r\}$, se situe sur la surface de Riemann qui est l'image de D par g ; voir [4, (6.2)].

Puisque nous avons, pour $f \in \text{Proj}(D, G)$, que $\delta_G(z) = \delta(w, f)$, $z = f(w) \in G$, et, de plus, un calcul montre que

$$\{2/\Pi_G(z)\} |(\partial^2/\partial z^2)\{1/\Pi_G(z)\}| = (1-|w|^2)^2 \left| \frac{f'''(w)}{f'(w)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(w)}{f'(w)} \right)^2 \right|,$$

on a, avec l'aide de (4.3) pour $g=f$, que

$$|(\partial^2/\partial z^2)\Pi_G(z) - 2\Pi_G(z)^{-1}\{(\partial/\partial z)\Pi_G(z)\}^2| \leq 3\Pi_G(z)^3(\{\delta_G(z)\Pi_G(z)\}^{-2} - 1), \quad z \in G.$$

Il résulte donc de (2.1) et (4.2) que

$$\begin{aligned}
& |(\partial^2/\partial z^2)\Pi_G(z)| \\
& \leq \frac{4(\log(R(a)/|z-a|)+c_H)(\log(R(a)/|z-a|)+c_H-1/2)^2+(3/2)(\log(R(a)/|z-a|))^3}{|z-a|^3(\log R(a)/|z-a|)^4} \\
& \quad - \frac{3}{8|z-a|^3(\log(R(a)/|z-a|)+c_H)^3}
\end{aligned}$$

pour $z \in \{0 < |z-a| \leq R(a)/2\}$. Cette estimation démontre (1.4).

Il est facile de calculer les suivantes pour $z \in H$,

$$\begin{aligned}
(\partial/\partial z)\Pi_H(z) &= \frac{\log|z|+1}{4z|z|(\log|z|)^2}, \\
(\partial^2/\partial z^2)\Pi_H(z) &= \frac{3(\log|z|)^2+4\log|z|+2}{-8z^2|z|(\log|z|)^3}, \\
(\partial^2/\partial z\partial\bar{z})\Pi_H(z) &= \frac{(\log|z|)^2+2\log|z|+2}{-8|z|^3(\log|z|)^3},
\end{aligned}$$

et ces identités montrent (1.6)-(1.8).

Remarque 4.1. Si la dérivée g' de g holomorphe dans D ne s'annule jamais dans D et si

$$(1 - |w|^2) |g'(w)| \leq (2/\sqrt{3}) \delta(w, g) \text{ pour tout } w \in D,$$

alors, g est univalente dans D . En effet, dans ce cas, on a

$$\sup_{w \in D} (1 - |w|^2) \left| \frac{g'''(w)}{g'(w)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(w)}{g'(w)} \right)^2 \right| \leq 2$$

par (4.3). Le théorème bien connu de Z. Nehari [2] démontre l'univalence de l'univalence g dans D .

5. Le rayon d'univalence. Pour $f \in \text{Proj}(D, G)$ et $w \in D$, nous désignons par $\rho(w, f)$ le maximum de r , $0 < r \leq 1$, tel que f soit univalente dans un disque d'Apollonius $\{\zeta; |\zeta - w| / |1 - \bar{w}\zeta| < r\}$. Nous définissons $\rho_G(z)$, $z \in G$, par $\rho_G(z) = \rho(w, f)$, $z = f(w)$. Donc, $\rho_G(z)$ est bien définie parce que $\rho(w, f) = \rho(w', f)$ si $f(w) = f(w')$. De plus, $\rho_G(z)$ est indépendante du choix particulier de f . La quantité $\rho_G(z)$ s'appelle le rayon d'univalence de G en $z \in G$. On connaît l'estimation exacte pour g holomorphe et univalente dans G :

$$(5.1) \quad \{ \rho_G(z) / \Pi_G(z) \} |g''(z) / g'(z)| \leq 8 \quad \text{pour tout } z \in G;$$

voir [5].

Il y a des étroites relations entre ρ_G et Π_G ; par suite, nous pouvons étudier aussi l'allure de $\rho_G(z)$ au voisinage de $a \in \partial G$ isolé. Notre résultat est:

THÉORÈME 3. *Soit $a \in \partial G$ un point isolé de ∂G . Alors, pour le rayon d'univalence ρ_G nous avons*

$$(5.2) \quad 1/8 \leq \liminf_{z \rightarrow a} \left(\log \frac{1}{|z-a|} \right) \rho_G(z) \text{ et } \limsup_{z \rightarrow a} \left(\log \frac{1}{|z-a|} \right) \rho_G(z) \leq 2.$$

Par $\rho_G(z) \gamma_G(z) \leq 2$ et $\rho_G(z) \leq \{2 + \rho_G(z) \gamma_G(z)\} \delta_G(z) \Pi_G(z)$ pour $z \in G$ (voir [4, (7.1) et (7.2)]) on obtienne

$$\rho_G(z) \leq 4 \delta_G(z) \Pi_G(z).$$

Donc, nous avons l'estimation:

$$\left(\log \frac{1}{|z-a|} \right) \rho_G(z) \leq 4 \Phi_1(z, a) \Pi_G(z)$$

pour $0 < |z-a| \leq R(a)/2$. La seconde partie de (5.2) est alors une conséquence de (1.2).

Par

$$\delta_G(z) \Pi_G(z) (\rho_G(z) + 1)^2 \leq 4 \rho_G(z), \quad z \in G$$

(voir [4, (7.4)]) on a $\delta_G(z) \Pi_G(z) \leq 4 \rho_G(z)$. Donc,

$$\Phi_1(z, a) \Pi_G(z) \leq 4 \left(\log \frac{1}{|z-a|} \right) \rho_G(z)$$

pour $0 < |z-a| \leq R(a)/2$, d'où on a la première partie de (5.2) par (1.2).

Remarque 5.1. Nous pouvons obtenir la seconde inégalité dans (5.2) aussi par (5.1) en posant $g(z) = 1/(z-a)$. En combinant (1.2) avec $|z-a| |g''(z)/g'(z)| \equiv 2$ on a l'inégalité.

Remarque 5.2. On peut démontrer

$$\rho_H(z) = \pi^{-1} (\log |z| + \{(\log |z|)^2 + \pi^2\}^{1/2}), \quad z \in H.$$

En effet, par $\eta = \varphi(\zeta) = (\zeta+1)/(\zeta-1)$, le disque d'Apollonius $\{\zeta; |\zeta-w|/|1-\bar{w}\zeta| < r\}$ ($w \in D, 0 < r \leq 1$) dans D est représenté sur le disque d'Apollonius $\{\eta; |\eta - \varphi(w)|/|\eta + \overline{\varphi(w)}| < r\}$ dans le demi-plan gauche, dont le diamètre euclidien est $E(r) = -4r \operatorname{Re} \varphi(w)/(1-r^2)$. En résolvant l'équation de $r: E(r) = 2\pi$ pour $\operatorname{Re} \varphi(w) = \log |z|$ ($z \in H$) donnée, on a $r = \rho_H(z)$.

Finalement il est facile de déduire

$$\lim_{z \rightarrow 0} (-\log |z|) \rho_H(z) = \pi/2.$$

Donc, une conjecture un peu hardie est que :

$$\lim_{z \rightarrow a} \left(\log \frac{1}{|z-a|} \right) \rho_G(z) = \pi/2$$

pour tout point $a \in \partial G$ isolé.

Références bibliographiques

- [1] J. A. HEMPEL, The Poincaré metric on the twice punctured plane and the theorems of Landau and Schottky. *J. London Math. Soc.* **20** (1979), 435-445.
- [2] Z. NEHARI, The Schwarzian derivative and schlicht functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 545-551.
- [3] R. NEVANLINNA, Eindeutige analytische Funktionen. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [4] S. YAMASHITA, The derivative of a holomorphic function and estimates of the Poincaré density. *Kodai Math. J.* **15** (1992), 102-121.
- [5] S. YAMASHITA, La dérivée d'une fonction univalente dans un domaine hyperbolique. *C.R. Acad. Sci. Paris* **314** (1992), 45-48.
- [6] A. YAMADA, Bounded analytic functions and metrics of constant curvature on Riemann surfaces. *Kodai Math. J.* **11** (1988), 317-324.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE,
UNIVERSITÉ MÉTROPOLITAINE DE TOKYO,
MINAMI-OSAWA, HACHIOJI, TOKYO 192-03
JAPON