

QUELQUES DESCRIPTIONS DE DÉSINGULARISATIONS PLONGÉES DE SURFACES

BY GÉRARD GONZALEZ-SPRINBERG

Introduction

Soit (S, O) un représentant d'un germe de surface complexe, où O est un point singulier isolé. Une *désingularisation* de S est un morphisme propre $\sigma: \hat{S} \rightarrow S$, où \hat{S} est une surface lisse, $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ est dense dans \hat{S} , tel que σ soit un isomorphisme de $\hat{S} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sur $S \setminus \{O\}$. Etant donné un plongement de S dans une variété lisse V , on appelle *désingularisation plongée* de $S \hookrightarrow V$, un morphisme propre $\sigma: \hat{V} \rightarrow V$, où \hat{V} est une variété lisse, $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ est dense dans \hat{V} , σ est un isomorphisme de $\hat{V} \setminus \sigma^{-1}(O)$ sur $V \setminus \{O\}$, et tel que σ induise une désingularisation de S avec des croisements normaux. Plus précisément σ satisfait :

- i) Soit $\hat{S} = \overline{\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})}$ le transformé strict de S , *i.e.* l'adhérence de $\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})$ dans \hat{V} . La restriction $\sigma_{|\hat{S}}$ de σ à \hat{S} est une désingularisation de S .
- ii) $\sigma^{-1}(O)$ est un diviseur de \hat{V} , réunion d'hypersurfaces lisses irréductibles D_i , $1 \leq i \leq r$; et la famille $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ est à croisements normaux.

La condition de croisement normal sur la famille $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ veut dire que, pour chaque $x \in \sigma^{-1}(O)$, les fonctions qui apparaissent dans les équations locales des variétés de la famille qui contiennent x forment un système local de coordonnées ou peuvent être complétées pour former un tel système. Autrement dit, pour chaque $x \in \sigma^{-1}(O)$ il existe un système local de coordonnées de \hat{V} en x tel que les variétés de la famille $\{\hat{S}, D_1, \dots, D_r\}$ qui contiennent x sont des sous-espaces linéaires de coordonnées, en position générale. On a donc $\sigma^{-1}(S) = \hat{S} \cup D_1 \cup \dots \cup D_r$, et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\sigma^{-1}(S \setminus \{O\})} = \hat{S} & \hookrightarrow & \hat{V} \leftarrow \supset \sigma^{-1}(O) = D_1 \cup \dots \cup D_r \\
 \sigma_{|\hat{S}} \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 S & \hookrightarrow & V
 \end{array}$$

Le diviseur $\sigma^{-1}(O)$ de \hat{V} , dont la décomposition en composantes irréductibles est $D_1 \cup \dots \cup D_r$, est appelé le diviseur exceptionnel de σ .

Mots-Clés: Surfaces, Singularités.
 Classification A.M.S.: 14B05, 14E15, 32C45.
 Received October 3, 1990.

Remarques.—

1) Pour chaque $x \in \sigma^{-1}(O) \cap \hat{S}$, la condition de croisement normal implique qu'il y a au plus deux composantes irréductibles de $\sigma^{-1}(O)$ qui contiennent x , car \hat{S} est une variété de dimension deux.

2) La désingularisation de S induite par une telle désingularisation plongée possède les propriétés de ce qu'on appelle une *bonne désingularisation* de S : les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\sigma_{\hat{S}}^{-1}(O)$ sont lisses et à croisements normaux dans \hat{S} . En effet, on a $\sigma_{\hat{S}}^{-1}(O) = \hat{S} \cap \sigma^{-1}(O)$, et la famille des composantes irréductibles de cette intersection est à croisements normaux dans \hat{S} , d'où en particulier leur lissité.

L'existence de désingularisations plongées a été démontrée par H. Hironaka, dans un cadre plus général que celui des surfaces [A-H-V]. La réalisation effective et la description de telles désingularisations posent des questions non entièrement comprises.

Par exemple, si S est plongée dans son espace tangent de Zariski, la géométrie intrinsèque de S doit jouer un rôle dans la désingularisation plongée. Peut-on définir une notion de minimalité ou de désingularisation plongée canonique? Pour les surfaces il existe une désingularisation minimale, conséquence de la caractérisation des diviseurs de première espèce (lemme de Castelnuovo). Comment obtenir une désingularisation plongée à partir d'une désingularisation minimale? En ayant obtenu une désingularisation plongée d'une surface, la description des diviseurs exceptionnels, leurs types topologiques, les multiplicités et les relations d'incidence est d'une complexité comparable aux désingularisations en dimension trois. Ces descriptions sont nécessaires pour certaines applications.

Dans ce travail, on donne la description de quelques exemples simples, où la dimension de plongement (*i.e.* la dimension de l'espace tangent de Zariski) est minimum, donc des hypersurfaces.

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir des désingularisations plongées d'hypersurfaces, mais les descriptions explicites sont rares.

Les résultats résumés ici sont une partie du contenu de plusieurs exposés réalisés aux Universités de Harvard et Northeastern en 1987 (dans un séminaire conjoint organisé par H. Hironaka, D. T. Lê, M. Spivakovsky et l'auteur) et à l'Institut Fourier en 1988.

Cette présentation introductive de quelques désingularisations plongées constitue une base expérimentale pour l'étude des liens avec les courbes tracées sur la surface et les points fixes des courbes polaires qui interviennent dans la transformation de Nash.

Exemples et descriptions des désingularisations plongées.

Les singularités de surfaces choisies sont quelques cas de points doubles rationnels. Ces exemples sont déjà suffisamment non triviaux pour illustrer quel-

ques phénomènes généraux, d'où leur ubicuité. Ce sont des singularités absolument isolées, *i. e.* on peut les désingulariser en faisant une itération d'éclatements ponctuels, c'est-à-dire des éclatements de centre l'idéal maximal d'un point. On obtient ainsi des désingularisations qui sont minimales et qui, de plus, sont des bonnes désingularisations. En suivant les diviseurs exceptionnels qui apparaissent dans l'espace ambiant, on construit une désingularisation plongée en faisant des éclatements de courbes (ou de points) de tangence de ces diviseurs avec le transformé strict de la surface.

Soit O l'origine de C^3 ; la notation choisie pour l'éclatement de C^3 de centre O est standard: l'éclaté \hat{C}^3 est recouvert par les ouverts affines U_i , $1 \leq i \leq 3$, où chaque U_i est une copie de C^3 avec coordonnées (X_i, Y_i, Z_i) , de sorte que U_i est l'ouvert où le i -ème générateur de l'idéal maximal $m=(X, Y, Z)$ de l'origine de C^3 devient le générateur de l'idéal principal $m\mathcal{O}_{\hat{C}^3}$ (*i. e.* (X_1) pour U_1 , (Y_2) pour U_2 , (Z_3) pour U_3); autrement dit ce générateur donne une équation locale du diviseur exceptionnel D de l'éclatement, diviseur qui est isomorphe à un plan projectif P^2 . On dénotera σ , un éclatement ponctuel. Un éclatement de centre une courbe est noté $\bar{\sigma}$. Si la courbe éclatée est rationnelle (lisse), le diviseur exceptionnel introduit par l'éclatement dans l'espace ambiant de dimension 3 est isomorphe à une surface réglée rationnelle: on dénotera F_m une surface isomorphe à $P_{P^1}(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(m))$ avec $m \geq 0$; en particulier on a $F_0 = P^1 \times P^1$. Si $m > 0$, on identifiera la seule courbe dans F_m avec auto-intersection négative: $-m$. Les diviseurs exceptionnels des désingularisations plongées, dans les exemples considérés, sont des surfaces rationnelles. On dénotera R_n une surface isomorphe à P^2 éclatée en n points; on donnera aussi le graphe dual des courbes de la fibre exceptionnelle de la surface rationnelle considérée, graphe pondéré par les auto-intersections. Par exemple

$$D \cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

dénote un diviseur D isomorphe à P^2 éclaté en 3 points, où le deuxième point éclaté appartient à la fibre exceptionnelle du premier éclatement et le troisième point éclaté appartient à la fibre exceptionnelle du deuxième éclatement mais pas à celle du premier. D'où le graphe dual pondéré, car l'éclatement d'un point x dans une surface lisse fait baisser d'une unité l'auto-intersection du transformé strict \hat{C} d'une courbe C portant x , par rapport à l'auto-intersection de C . En général la donnée d'un tel graphe ne suffit pas pour déterminer l'ordre des éclatements, mais cette donnée suffit dans les exemples considérés. Une surface F_1 est isomorphe à R_1 , c'est le seul cas commun entre les F_m et les R_n .

Dans la description d'une désingularisation plongée $\sigma: \hat{V} \rightarrow V$ de la surface plongée $S \subset V$, si $\sigma^{-1}(S) = \hat{S} + \sum m_a D_a$ est la décomposition, comme cycle, en composantes irréductibles du transformé total de S , l'intersection d'un diviseur exceptionnel D_a avec le transformé strict \hat{S} de S est décomposée aussi en composantes irréductibles avec la notation $D_a \cap \hat{S} = \sum d_a^{(i)}$, et la courbe intersection de deux composantes D_a, D_b du diviseur exceptionnel est notée $(ab) = D_a \cap D_b$. On donnera, pour chaque exemple, une représentation des intersections de toutes

les composantes du [transformé total avec un diagramme d'incidence, où les courbes d'intersection sont représentées par des traits.

1, Singularité A_2

Soit $S \subset V = \mathbb{C}^3$ la surface d'équation $f = XY + Z^3 = 0$, et $\sigma_1: V_1 \rightarrow V$ l'éclatement de V de centre l'origine. Le transformé strict \hat{S} de S est lisse, et son intersection $\hat{S} \cap D_1$ avec le diviseur exceptionnel est formée de deux courbes rationnelles lisses, d_1 et d'_1 . On a donc la désingularisation minimale de S , mais ce n'est pas une désingularisation plongée, car D_1 est tangente à \hat{S} en $d_1 \cap d'_1$ (point selle).

En effet, les restrictions de $\sigma_1^* f$ aux ouverts U_i , $1 \leq i \leq 3$, sont :

$$\sigma_1^* f : \begin{cases} X_1^2(Y_1 + Z_1^3 X_1) \\ Y_2^2(X_2 + Z_2^3 Y_2) \\ Z_3^2(X_3 Y_3 + Z_3) \end{cases} \quad (\text{point selle : origine de } U_3).$$

Pour obtenir une désingularisation plongée on peut faire un éclatement de centre d_1 ou de centre d'_1 , ce qui obligerait à un choix non canonique. Pour éviter un tel choix, on peut faire un éclatement de centre l'origine de U_3 , *i.e.* $d_1 \cap d'_1$. On dénote $\sigma_2: V_2 \rightarrow V_1$ cet éclatement; pour simplifier les notations on enlève les indices aux coordonnées de $U_3 = \mathbb{C}^3$ et on reprend les mêmes notations que pour σ_1 pour décrire les ouverts de ce nouvel éclatement.

Par abus de notation, on dénote par les mêmes symboles les transformés stricts de \hat{S} , D_1 , d_1 et d'_1 dans V_2 ; et par D_2 le diviseur exceptionnel introduit par σ_2 . Maintenant D_1 est tangente à \hat{S} en deux points selles (correspondant aux directions de d_1 et d'_1), or la courbe rationnelle $d_2 = D_2 \cap \hat{S}$ contient les deux points selles pour D_1 et coïncide avec l'intersection $D_1 \cap D_2$.

En effet, si $f_1 = Z^2(XY + Z)$ est la restriction de $\sigma_1^* f$ à U_3 , les restrictions de $\sigma_2^* f_1$ aux trois ouverts de l'éclaté de l'origine de U_3 sont

$$\sigma_2^* f_1 : \begin{cases} X_1^3 Z_1^2 (X_1 Y_1 + Z_1) \\ Y_2^3 Z_2^2 (X_2 Y_2 + Z_2) \\ Z_3^2 (X_3 Y_3 + 1) \end{cases}$$

$X_1 = 0$ (resp. $Y_2 = 0$, resp. $Z_3 = 0$) est l'équation locale de D_2 , $Z_1 = 0$ (resp. $Z_2 = 0$) celle de D_1 , et les autres facteurs donnent celle de \hat{S} .

Les diviseurs \hat{S} , D_1 et D_2 de V_2 ne sont pas à croisements normaux le long de la courbe d_2 . L'éclatement de V_2 de centre d_2 introduit un nouveau diviseur et donne, par composition avec $\sigma_1 \circ \sigma_2$ une désingularisation plongée.

Dénotons $\bar{\sigma}_2: \bar{V}_2 \rightarrow V_2$ l'éclatement de centre d_2 ; pour le calculer il suffit de considérer (par la symétrie des équations) la restriction $f_2 = X^3 Z^2 (XY + Z)$ de $\sigma_2^* f_1$ au premier ouvert (où on a enlevé les indices). L'idéal à éclater est celui

de d_2 dans cet ouvert: (X, Z) . Avec une notation standard analogue à celle d'un éclatement d'un point, avec deux ouverts \bar{U}_1, \bar{U}_3 , on a :

$$\bar{\sigma}_2^* f_2 : \left\{ \begin{array}{l} X_1^6 Z_1^2 (Y + Z_1) \\ X_3^3 Z_3^3 (X_3 Y_3 + 1) \end{array} \right\}, \text{ où } \left. \begin{array}{l} (X_1, Z_1) \mapsto (X_1, X_1 Z_1) \\ (X_3, Z_3) \mapsto (X_3 Z_3, Z_3) \end{array} \right\} = (X, Z)$$

où $X_1=0$ (resp. $Z_3=0$) est l'équation du nouveau diviseur exceptionnel $D_{\bar{2}}$, $Z_1=0$ celle de D_1 , $X_3=0$ celle de D_2 , et les autres facteurs celle de \hat{S} dans chaque ouvert.

Soit $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \bar{\sigma}_2 : \hat{V} = \bar{V}_2 \rightarrow V$. La désingularisation plongée de $S \subset V$ obtenue est décrite de la façon suivante. La décomposition du transformé total de S dans \hat{V} , comme cycle divisoriel avec les multiplicités de ses composantes irréductibles, est :

$$\sigma^{-1}(S) = \hat{S} + 2D_1 + 3D_2 + 6D_{\bar{2}}$$

On a

$$\begin{array}{l} D_1 \cong R_1 \left(\begin{array}{c} -1 \\ \bullet \\ (1\bar{2}) \end{array} \right) \\ D_2 \cong P^2 \\ D_{\bar{2}} \cong F_2 \left(\begin{array}{c} -2 \\ \bullet \\ (2\bar{2}) \end{array} \right) \end{array}$$

On a le diagramme d'incidence suivant (chaque trait représente une courbe intersection de deux diviseurs) :

(1.1) , où

$$\begin{array}{l} D_1 \cap \hat{S} = d_1 + d'_1 \\ D_2 \cap \hat{S} = \emptyset \\ D_{\bar{2}} \cap \hat{S} = d_{\bar{2}} \\ D_i \cap D_j = (ij), \text{ si } i \neq j \end{array}$$

Plus généralement, pour une singularité de type A_n , $n \geq 1$, plongée dans son espace tangent de Zariski, la désingularisation minimale obtenue par une itération d'éclatements ponctuels est aussi une désingularisation plongée si n est impair, et on a un point selle pour le point central du diagramme si n est pair (d'où une désingularisation plongée analogue à celle de A_2 pour la partie centrale du diagramme).

Rappels sur le cycle fondamental et la méthode de Tyurina.

Soit $\sigma : \hat{S} \rightarrow S$ une désingularisation de S . On suppose que $O \in S$ est une singularité rationnelle, donc en particulier normale ; c'est le cas des exemples ici considérés. Les singularités rationnelles sont absolument isolées, par conséquent l'idéal $\mathcal{M}\mathcal{O}_{\hat{S}}$ est localement principal, où \mathcal{M} dénote l'idéal maximal en O . L'idéal $\mathcal{M}\mathcal{O}_{\hat{S}}$ définit un diviseur dans \hat{S} , diviseur qui coïncide avec le cycle fondamental. On peut calculer le cycle fondamental de la désingularisation avec la seule donnée de la matrice intersection. Soit $\sigma^{-1}(O) = d_1 \cup \dots \cup d_r$ la décomposition en composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle de σ . Le cycle fondamental \mathcal{Z} est l'unique cycle divisoriel minimal dans la famille des cycles divisoriels positifs, à support dans $\sigma^{-1}(O)$, tels qu'on ait $(\mathcal{Z} \cdot d_i) \leq 0, \forall i$, où (\cdot) dénote la forme intersection du groupe de Picard de \hat{S} . La matrice intersection $((d_i \cdot d_j)), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$ détermine \mathcal{Z} .

L'égalité $\mathcal{M}\mathcal{O}_{\hat{S}} = \mathcal{O}_{\hat{S}}(-\mathcal{Z})$ implique que l'on puisse déterminer l'ordre dans lequel on obtient les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle, dans la suite d'éclatements. En effet, les composantes d_i telles qu'on ait $(\mathcal{Z} \cdot d_i) < 0$ sont celles qui apparaissent dans le premier éclatement. Les composantes connexes (Tyurina) de la réunion des courbes d_i telles qu'on ait $(\mathcal{Z} \cdot d_i) = 0$ sont les fibres exceptionnelles, dans \hat{S} , des singularités de l'éclaté de S de centre \mathcal{M} ; en itérant cette procédure pour les cycles fondamentaux des singularités des éclatés successifs, on détermine l'ordre d'apparition des autres composantes irréductibles. (réf. [A], [T]).

Dans les exemples suivants on donne les graphes duaux des désingularisations minimales (où chaque sommet représente une composante irréductible de la fibre exceptionnelle et chaque arête un point d'intersection des composantes correspondantes).

Des calculs combinatoires sur le cycle fondamental donnent l'ordre d'apparition des composantes irréductibles sur la surface éclatée et des calculs locaux suffisent alors pour compléter la description globale.

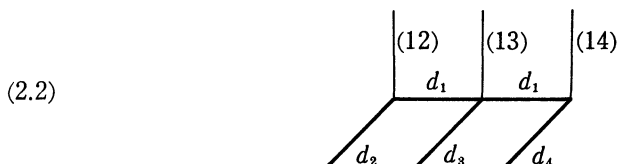
2. Singularité de type D_4

Soit $S \subset V = \mathbb{C}^3$ la surface d'équation $X^2 + Z(Y^2 + Z^2) = 0$. Le graphe dual de la désingularisation minimale est



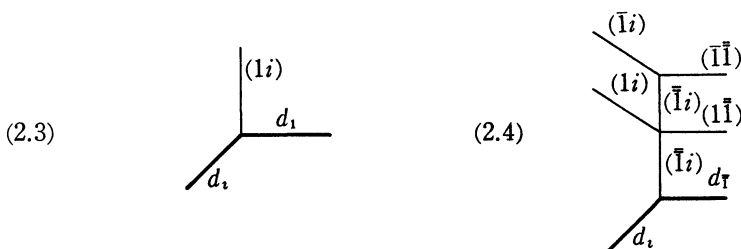
Le cycle fondamental est $\mathcal{Z} = 2d_1 + d_2 + d_3 + d_4$; on a $(d_i \cdot d_i) = -2, \forall i$. Par suite d_1 est la courbe exceptionnelle du premier éclatement, la surface éclatée possède trois singularités du type A_1 , singularités qui donnent lieu aux com-

posantes d_2, d_3, d_4 . Soit $\sigma_i, 1 \leq i \leq 4$, les éclatements ponctuels correspondants; $D_i, 1 \leq i \leq 4$ les hypersurfaces exceptionnelles dans l'espace ambiant; $d_i = \hat{S} \cap D_i, 1 \leq i \leq 4$, les courbes (rationnelles) intersection avec la transformée stricte \hat{S} de S ; $(1j) = D_1 \cap D_j, 2 \leq j \leq 4$. Le diagramme d'incidence de \hat{S} et $D_i, 1 \leq i \leq 4$, est :



Le diviseur D_1 est tangent à \hat{S} le long de d_1 ; pour obtenir des croisements normaux on fait l'éclatement $\bar{\sigma}_1$ de centre d_1 , ce qui introduit un nouveau diviseur $D_{\bar{1}}$ isomorphe à F_2 . Les transformées strictes de D_1 et \hat{S} (notées avec les mêmes symboles) ont une intersection commune avec $D_{\bar{1}}$ le long d'une courbe rationnelle $d_{\bar{1}}$, donc ce n'est pas encore à croisements normaux. L'éclatement $\bar{\sigma}_1$ de centre $d_{\bar{1}}$ introduit un nouveau diviseur $D_{\bar{\bar{1}}}$ isomorphe à $F_0 = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_1$, et on obtient ainsi une désingularisation plongée, où on a $D_1 \cap \hat{S} = \emptyset = D_{\bar{1}} \cap \hat{S}$. On note $d_{\bar{1}}$ l'intersection $D_{\bar{1}} \cap \hat{S}$, et $(ab) = D_a \cap D_b$, où a et b parcourent les indices des diviseurs, pour les intersections non vides.

Le diagramme d'incidence final est obtenu à partir du diagramme (2.2) en remplaçant les sous-diagrammes (2.3) par (2.4) :



Soit $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \bar{\sigma}_1 \circ \bar{\sigma}_1 : \hat{V} \rightarrow V$; on a

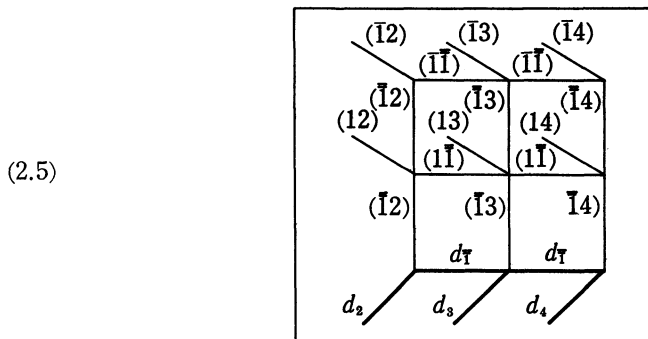
$$\sigma^*(S) = \hat{S} + 2D_1 + 3D_{\bar{1}} + 6D_{\bar{\bar{1}}} + 4D_2 + 4D_3 + 4D_4.$$

Les diviseurs exceptionnels sont des surfaces rationnelles du type suivant :

$$\begin{aligned}
 D_1 &\cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} \overset{-1}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} \\ (12) & (13) & (14) \end{array} \right) \\
 D_1 &\cong F_2 \left(\begin{array}{c} \overset{-2}{\bullet} \\ (11) \end{array} \right), \quad D_1 \cong F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \\
 D_i &\cong R_2 \left(\begin{array}{cc} \overset{-2}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} \\ (i1) & (i1) \end{array} \right), \quad \text{pour } i=2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

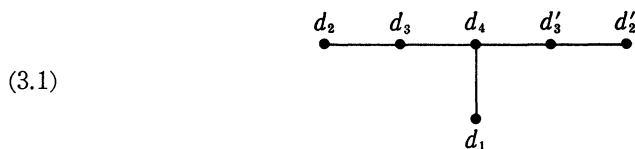
En effet, les restrictions des éclatements $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_1$ à chaque diviseur D_i , $2 \leq i \leq 4$, sont des éclatements ponctuels au point de tangence des courbes $(i1)$ et d_i , où l'ordre de contact est 2.

Le diagramme d'incidence final est :



3. Singularité E_6

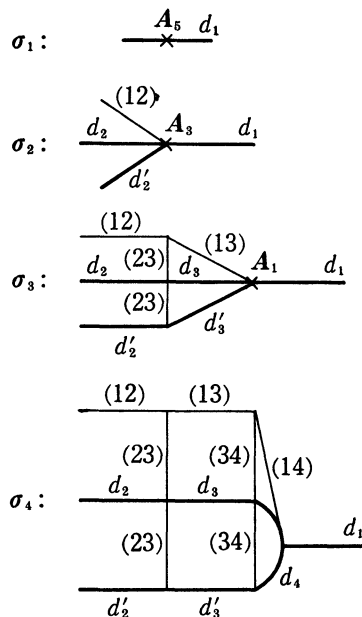
Soit $S \subset V = \mathbf{C}^3$ la surface d'équation $X^2 + Y^3 + Z^4 = 0$. Le graphe dual de la désingularisation minimale est



Le cycle fondamental est $\mathcal{Z} = 2d_1 + d_2 + d'_2 + 2d_3 + 2d'_3 + 3d_4$; on a $(d_i \cdot d_i) = -2$, $\forall i$. Par suite d_1 est la courbe exceptionnelle du premier éclatement σ_1 , la surface éclatée possède une singularité de type A_5 ; d_2 et d'_2 sont les composantes irréductibles de la courbe du deuxième éclatement σ_2 , leur point d'intersection est une singularité de type A_3 ; d_3 et d'_3 celles de σ_3 , leur point d'intersection est une singularité de type A_1 ; et d_4 celle de σ_4 . Soit D_i le diviseur exceptionnel, dans l'espace ambiant, introduit par σ_i , $1 \leq i \leq 4$.

Les diagrammes d'incidence successifs entre les diviseurs D_i et le transformé strict \hat{S} de la surface S sont :

(3.2)



Le transformé total de S par la composition des quatre éclatements se décompose comme cycle :

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4)^{-1}(S) = \hat{S} + 2D_1 + 4D_2 + 8D_3 + 12D_4.$$

Or le diviseur D_1 est tangent à \hat{S} le long de la courbe rationnelle d_1 , donc la désingularisation n'est pas à croisements normaux. Dans la surface D_4 , les courbes d_4 et (14) sont tangentes au point d'intersection avec d_1 ; l'ordre de contact est 2. Il faut faire deux éclatements de centre d_1 , du même type que dans l'exemple précédent. Soit $\bar{\sigma}_1$ (resp. $\bar{\sigma}_1$) le premier (resp. le deuxième) éclatement, $D_{\bar{1}}$ (resp. $D_{\bar{1}}$) le diviseur exceptionnel correspondant.

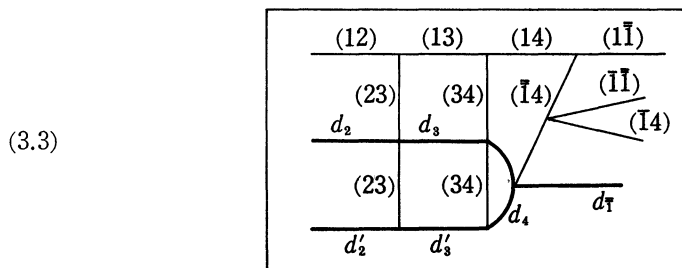
La décomposition du cycle défini par le transformé total de S par $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \sigma_4 \circ \bar{\sigma}_1 \circ \bar{\sigma}_1$ est

$$\sigma^{-1}(S) = \hat{S} + 2D_1 + 3D_{\bar{1}} + 6D_{\bar{1}} + 4D_2 + 8D_3 + 12D_4.$$

On a :

$$\begin{aligned}
 D_1 &\cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} \overset{-2}{\bullet} & \overset{-2}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} \\ (12) & (13) & (14) \end{array} \right) \\
 D_{\overline{1}} &\cong F_2 \left(\begin{array}{c} \overset{-2}{\bullet} \\ (\overline{11}) \end{array} \right), \quad D_{\overline{1}} \cong F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \\
 D_2 &\cong R_1 \left(\begin{array}{c} \overset{-1}{\bullet} \\ (23) \end{array} \right), \quad D_3 \cong R_1 \left(\begin{array}{c} \overset{-1}{\bullet} \\ (34) \end{array} \right) \\
 D_4 &\cong R_2 \left(\begin{array}{cc} \overset{-2}{\bullet} & \overset{-1}{\bullet} \\ (\overline{14}) & (\overline{14}) \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

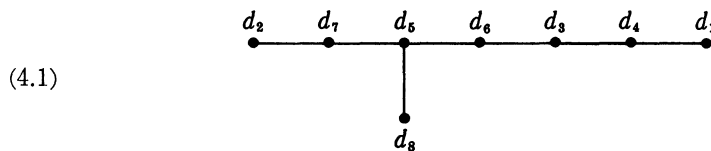
Le diagramme d'incidence final est



où $d_a \in \hat{S} \cap D_a$, $(ab) = D_a \cap D_b$.

4. Singularité de type E_8

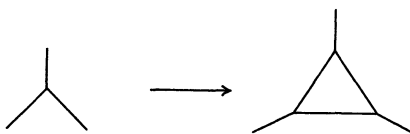
Soit $S \subset V = \mathbf{C}^3$ la surface d'équation $X^2 + Y^3 + Z^5 = 0$. Le graphe dual de la désingularisation minimale est



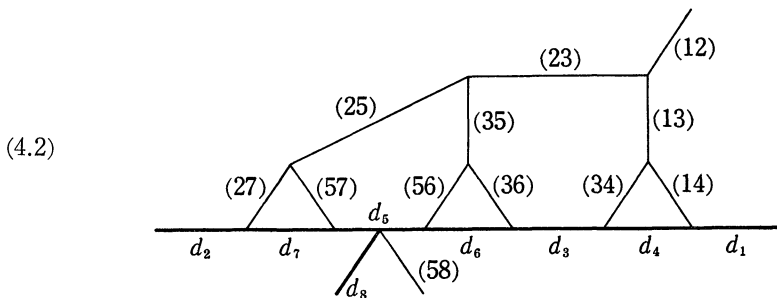
Le cycle fondamental est $\mathcal{Z} = 2d_1 + 2d_2 + 4d_3 + 3d_4 + 6d_5 + 5d_6 + 4d_7 + 3d_8$; on a $(d_i \cdot d_j) = -2, \forall i$. Il faut huit éclatements ponctuels pour obtenir la désingularisation minimale; ils sont notés $\sigma_i, 1 \leq i \leq 8$. L'ordre total induit par l'ordre des indices choisi respecte l'ordre partiel dans lequel on fait les éclatements, *i.e.* si σ_i précède σ_j , alors $i < j$. Pour chaque $i, 1 \leq i \leq 8$, l'intersection $D_i \cap \hat{S}$ du diviseur dans l'espace ambiant D_i avec le transformé strict \hat{S} de la surface S est une courbe irréductible d_i (ce qui n'est le cas pour $A_n (n > 1)$ et E_6). On peut construire le diagramme d'incidence, dans l'espace ambiant, de la composition

des huit éclatements sans effectuer d'autres calculs que ceux des composantes de Tyurina successives.

En effet, l'irréductibilité de $D_i \cap \hat{S}$, $1 \leq i \leq 8$ implique que si le diagramme d'incidence ensembliste de trois diviseurs est celui correspondant à la position général de trois hyperplans, alors le diagramme d'incidence de l'éclatement du point d'intersection des trois diviseurs est obtenu en remplaçant ce point par un triangle qui représente le nouveau diviseur exceptionnel :



Le calcul des composantes de Tyurina donne les résultats suivants : soit \hat{S}_i le transformé strict de S par la composition d'éclatements $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_{i-1} \circ \sigma_i$; alors \hat{S}_1 a une singularité de type E_7 ; \hat{S}_2 de type D_6 ; \hat{S}_3 deux singularités de type A_1 et D_4 ; \hat{S}_4 de type D_4 ; \hat{S}_5 trois singularités de type A_1 , qui sont désingularisées par σ_6, σ_7 et σ_8 . Par suite on obtient le diagramme d'incidence suivant, pour la composition $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_8$:



Un calcul local montre qu'il y a quatre diviseurs exceptionnels D_i qui sont tangents à la transformée stricte \hat{S} ($=\hat{S}_8$) le long des courbes (rationnelles) d_i , pour $i=1, 2, 3, 5$. Par suite, dans les surfaces D_j , pour $j=4, 6, 7, 8$, la courbe (ij) est tangente à d_j , si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. L'ordre de contact est deux, comme dans les exemples précédents. Pour obtenir une désingularisation plongée, il faut faire deux éclatements de centre d_i , pour $i=1, 2, 3, 5$, éclatements notés $\bar{\sigma}_i$ et $\bar{\sigma}_i$; ces couples d'éclatements sont indépendants pour deux indices i différents.

On obtient les multiplicités des diviseurs exceptionnels introduits par σ_i , $1 \leq i \leq 8$, à partir du graphe (4.1), de l'ordre déduit des cycles fondamentaux successifs, et des multiplicités des singularités intermédiaires. On a donc

$$(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_8)^{-1}(S) = \hat{S} + 2D_1 + 4D_2 + 8D_3 + 12D_4 + 14D_5 + 24D_6 + 20D_7 + 16D_8 .$$

Soit D_i (resp. D_i^-) le diviseur exceptionnel introduit par l'éclatement $\bar{\sigma}_i$ (resp.

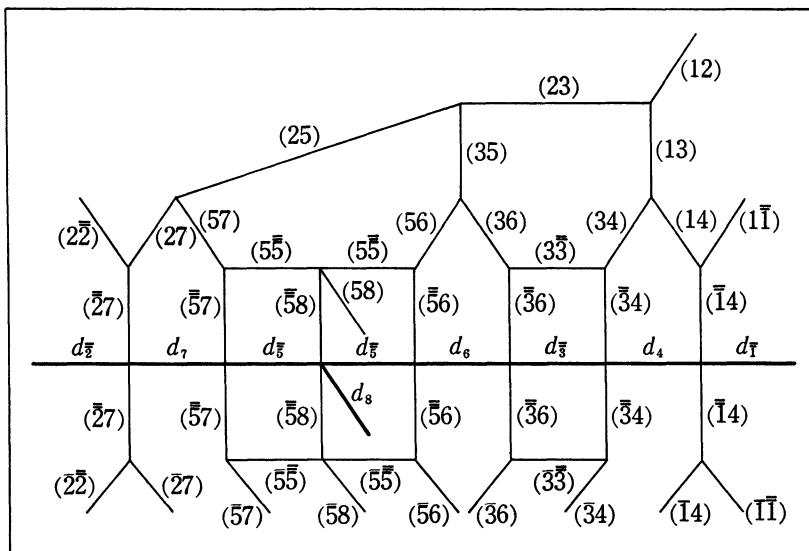
$\bar{\sigma}_i$), $i=1, 2, 3, 5$. Soit σ la composition des $\sigma_i \circ \sigma_{\bar{i}}$, $i=1, 2, 3, 5$, avec $\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_8$. Dans $\sigma^{-1}(S)$, la multiplicité de chaque D_i est la même que celle qu'il a dans $(\sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_8)^{-1}(S)$, car c'est le transformé strict. Soit m_i la multiplicité de D_i , alors celle de $D_{\bar{i}}$ (resp. de $D_{\bar{i}}$), dans $\sigma^{-1}(S)$, est m_i+1 (resp. $2m_i+2$). On a donc

$$\begin{array}{l} \sigma^{-1}(S) = \hat{S} + 2D_1 + 4D_2 + 8D_3 + 12D_4 + 14D_5 + 24D_6 + 20D_7 + 16D_8 \\ \quad + 3D_{\bar{1}} + 5D_{\bar{2}} + 9D_{\bar{3}} + 15D_{\bar{5}} \\ \quad + 6D_{\bar{1}} + 10D_{\bar{2}} + 18D_{\bar{3}} + 30D_{\bar{5}} \end{array}$$

Les diviseurs exceptionnels sont des surfaces rationnelles du type suivant :

$$\begin{array}{l} D_1 \cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} -2 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ (12) & (13) & (14) \end{array} \right) \\ D_2 \cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} -2 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ (23) & (25) & (27) \end{array} \right) \\ D_3 \cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} -1 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ (34) & (35) & (36) \end{array} \right) \\ D_4 \cong R_4 \left(\begin{array}{ccc} -2 & -1 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (14) & (14) & (34) & (34) \end{array} \right) \\ D_5 \cong R_3 \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ (56) & (57) & (58) \end{array} \right) \\ D_6 \cong R_4 \left(\begin{array}{ccc} -2 & -1 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (36) & (36) & (56) & (56) \end{array} \right) \\ D_7 \cong R_4 \left(\begin{array}{ccc} -2 & -1 & -2 & -1 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (27) & (27) & (57) & (57) \end{array} \right) \\ D_8 \cong R_2 \left(\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ \bullet & \bullet \\ (58) & (58) \end{array} \right) \\ D_{\bar{i}} \cong F_2 \left(\begin{array}{c} -2 \\ \bullet \\ (i\bar{i}) \end{array} \right) \text{ et} \\ D_{\bar{i}} \cong F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \text{ pour } i=1, 2, 3, 5. \end{array}$$

Le diagramme d'incidence de toutes les composantes irréductibles de $\sigma^{-1}(S)$ est obtenu à partir du diagramme (4.2), en remplaçant les sous-diagrammes de type (2.3) attachés à d_1 , d_2 , d_3 et d_5 par des sous-diagrammes du type (2.4). La partie centrale correspondante à d_5 est un diagramme de type (2.5). Le résultat final est le diagramme suivant :



où $d_a = D_a \cap \hat{S}$, $(ab) = D_a \cap D_b$.

Remarques.—Dans les exemples précédents, la désingularisation plongée obtenue induit la désingularisation minimale de la surface considérée, sauf dans le cas A_n , n pair. Dans ce dernier cas, il existe aussi des désingularisations plongées dont la désingularisation induite de la surface soit minimale, mais elles sont obtenues avec un choix non canonique.

Dans le cas général, il faudrait peut-être considérer comme point de départ une désingularisation minimale à croisements normaux où l'idéal maximal devient inversible, et remplacer l'étude du cycle fondamental par celle du cycle maximal.

RÉFÉRENCES

[A] ARTIN, M., On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math., 88 (1966), 129-136.
 [A-H-V] AROCA, J. M., HIRONAKA, H. AND VICENTE, J. L., Desingularization theorems, Mem. de Mat. 30, Madrid, 1977.
 [T] TYURINA, G. N., Absolute isolatedness of rational singularities, Func. Anal. Appl., 2 (1968), 324-332.

INSTITUT FOURIER
 LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES ASSOCIÉ AU C. N. R. S.
 UNIVERSITÉ DE GRENOBLE I
 B. P. 74
 38402 ST MARTIN D'HÈRES CEDEX
 (FRANCE)