K. ISHIGURO, W. MEYER-KÖNIG UND K. ZELLER
KODAI MATH. J.
13 (1990), 47—51

DIE TURÁNSCHE MATRIX ALS PRODUKT EINER EULER-KNOPP- UND EINER TAYLOR-MATRIX

BY K. ISHIGURO, W. MEYER-KÖNIG UND K. ZELLER

Two conformally equivalent infinite series $\sum a_n$ and $\sum b_n$ (with complex terms and partial sums $s=\{s_n\}$, $t=\{t_n\}$ respectively) do not necessarily possess the same convergence-behaviour. This surprising discovery goes back to Turán. He showed in a quite subtle way that in the relation $t=As$ the matrix A has unbounded row-norms, and hence is not a regular summability matrix.

The fact that Turán's result is rather hidden makes it desirable to gain more knowledge about the transformation $t=As$. We write it in series-to-series form, i. e. in the form $b=Ka$, denoting $K=K_u$ as Turán's matrix (the parameter u characterizes the underlying conformal mapping). Then we exhibit a decomposition $K_u=E_pT_u$, where E_p is a Euler-Knopp matrix and T_u a Taylor matrix. A crucial point is the relation between the parameters u and p. The decomposition allows more insight into the structure of K_u and its summability properties.

1. Einleitung

P. Turán ([8], siehe auch [9]) verdankt man die überraschende und versteckt liegende Erkenntnis, dass zwei unendliche Reihen mit komplexen Gliedern, die in einer gewissen Weise (siehe unten) vermöge konformer Abbildung miteinander zusammenhängen, nicht notwending das gleiche Konvergenzverhalten besitzen. Der damit eröffnete Themenkreis der konform äquivalenten Reihen wurde seither vielfältig untersucht. Wir nennen die Arbeiten Alpár [1], Clunie [2], Halász [3], Indlekofer [4, 5, 6], Schwarz [7], Trautner [5], Warlimont [6, 10, 11] (in denen weitere Literatur zitiert wird).

In der vorliegenden Note zeigen wir, dass der Übergang von einer vorgegebenen Reihe zu den zugehörigen konform äquivalenten Reihen eng mit zwei in der Limitierungstheorie (vgl. [12]) geläufigen Matrixtransformationen, nämlich der Taylor- und der Euler-Knopp-Transformation zusammenhängt. Am prägnantesten lässt sich der Sachverhalt beschreiben, wenn wir—in leichter Abänderung der Turánschen Darstellung—folgendermassen verfahren. Wir gehen aus von der Reihe $\sum a_n$ (charakterisiert durch die Folge $a=\{a_n\}$ mit komplexen Gliedern; $n=0, 1, \cdots$), wobei wir voraussetzen, dass die Potenzreihe $\sum a_n z^n$ (z komplexe

AMS (1980) subject classification: Primary 30 B 30, Secondary 40 G 05.
Received April 14, 1989

Veränderliche) für $|z|<1$ konvergiert, also

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{für } |z|<1 \tag{1}$$

regulär ist. Unter Einführung des Parameters u (u komplex, $|u|<1$) betrachten wir diejenige umkehrbar eindeutige lineare konforme Abbildung des abgeschlossenen Einheitskreises $\{|z|\leqq 1\}$ der z-Ebene auf den abgeschlossenen Einheitskreis $\{|w|\leqq 1\}$ der komplexen w-Ebene, die $z=1$ in $w=1$ und $z=u$ in $w=0$ überführt (vgl (3)). Bei dieser Abbildung gehe $f(z)$ in die für $|w|<1$ reguläre Funktion $g(w)$ über (vgl. (4)), und es sei

$$g(w)=\sum_{0}^{\infty} b_n w^n \qquad \text{für } |w|<1\,. \tag{2}$$

Natürlich hängt $b=\{b_n\}$ ausser von a auch von u ab. Unter der für den Parameterwert u zu $\sum a_n$ gehörigen konform äquivalenten Reihe verstehen wir die Reihe $\sum b_n$. Wir werden zeigen (Satz 1), dass b aus a durch Hintereinanderausführung einer Taylor-Transformation (in RR-, d. h. Reihe-Reihe-Form) und einer Euler-Knopp-Transformation (ebenfalls in RR-Form) entsteht. Es ergibt sich: b lässt sich als Transformation von a mittels einer Matrix K_u, also in der Form $b=K_u a$ darstellen, wobei K_u durch Multiplikation einer Euler-Knopp- mit einer Taylor-Matrix entsteht. Wir bezeichnen K_u als Turánsche Matrix (Turán verwendet die zugehörige Folge-Folge-Form). Das eingangs erwähnte Ergebnis von Turán besagt: Für $0<|u|<1$ ist K_u nicht RR-permanent.

In Nr. 2 stellen wir die von uns benötigten Grundlagen zusammen. Nr. 3 bringt den Satz 1 samt Beweis. Einige Schlussbemerkungen (Nr. 4) betreffen den Fall, dass u reell ist.

2. Vorbereitendes

Unter T_v verstehen wir die Matrix des Taylorschen Limitierungsverfahrens der komplexen Ordnug v ($|v|<1$) in der RR-Form (vgl. [12] S. 140; die dort benützte Ordnung α und unser v stehen zueinander in der Beziehung $\alpha=1-v$). T_v ist obere Dreiecksmatrix und hat die Elemente

$$(T_v)_{n,k}=(1-v)^n\binom{k}{n}v^{k-n} \qquad (n=0,\,1,\,\cdots;\ k=0,\,1,\,\cdots);$$

speziell ist (mit $0^\circ=1$) $T_0=I$ (=Einheitsmatrix).

HILFSSATZ 1. Ist $h(z)=\sum_{0}^{\infty}\gamma_n z^n$ regulär für $|z|<|v|$ sowie bei $z=v$, und existiert $\delta=T_v\gamma$, so gilt

$$h(v+(1-v)\zeta)=\sum_{0}^{\infty}\delta_n\zeta^n \qquad \text{für kleines } |\zeta|.$$

Unter E_q verstehen wir die Matrix des Euler-Knoppschen Limitierungsverfahrens der komplexen Ordnung q ($q\neq 0$) in der RR-Form (vgl. [12] S. 130). E_q ist untere Dreiecksmatrix und hat die Elemente

$$(E_q)_{0,0}=1, \qquad (E_q)_{n,0}=0 \quad (n=1, 2, \cdots), \qquad (E_q)_{0,k}=0 \quad (k=0, 1, \cdots),$$

$$(E_q)_{n,k}=\binom{n-1}{k-1}q^k(1-q)^{n-k} \quad (n=1, 2, \cdots;\ k=1, 2, \cdots);$$

speziell ist $E_1=I$.

HILFSSATZ 2. Ist $h(z)=\sum_0^\infty \gamma_n z^n$ regulär bei $z=0$, und ist $\delta=E_q\gamma$, so gilt

$$h\Big(\frac{q\zeta}{1-(1-q)\zeta}\Big)=\sum_0^\infty \delta_n\zeta^n \qquad \text{für kleines } |\zeta|.$$

Die den Übergang von $f(z)$ (vgl. (1)) zu $g(w)$ (vgl. (2)) vermittelnde lineare konforme Abbildung wird (bei fest gedachtem u, $|u|<1$; $\bar{u}$ die zu u konjugiert komplexe Zahl) durch das Formelpaar

$$w=\varphi(z)=\frac{1-\bar{u}}{1-u}\,\frac{z-u}{1-\bar{u}z}, \qquad z=\psi(w)=\frac{(1-u)w+(1-\bar{u})u}{(1-u)\bar{u}w+(1-\bar{u})} \tag{3}$$

erfasst. Mit diesen Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(w)$ gilt

$$g(w)=f(\psi(w)) \quad \text{für } |w|<1, \qquad f(z)=g(\varphi(z)) \quad \text{für } |z|<1. \tag{4}$$

3. Ergebnis und Beweis

Es gilt der

SATZ 1. Sind die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ und die Funktion $f(z)$ wie in (1) gegeben, und ist (den Beziehungen (2) bis (4) entsprechend) $\sum_0^\infty b_n$ die für den Parameterwert u ($|u|<1$) zu $\sum_0^\infty a_n$ gehörige konform äquivalente Reihe, so gilt

$$b=E_p(T_u a)=(E_pT_u)a \qquad \text{mit } p=\frac{1-u\bar{u}}{1-\bar{u}}. \tag{5}$$

Also lässt sich der Zusammenhang zwischen a und b in der Gestalt

$$b=K_u a \qquad \text{mit } K_u=E_pT_u \tag{6}$$

schreiben.

Beweis. Wir setzen

$$T_u a=\alpha\,, \qquad E_p\alpha=\beta\,,$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$f(u+(1-u)z)=\sum_0^\infty \alpha_n z^n \qquad \text{für kleines } |z|,$$

und nach Hilfssatz 2

$$f\Big(u+\frac{(1-u)pw}{1-(1-p)w}\Big)=\sum_0^\infty \beta_n w^n \qquad \text{für kleines } |w|.$$

Für kleines $|w|$ gilt aber auch

$$\sum_0^\infty b_n w^n = g(w) = f\Big(\frac{(1-u)w+(1-\bar{u})u}{(1-u)\bar{u}w+(1-\bar{u})}\Big)$$

$$= f\Big(u+\frac{(1-u)pw}{1-(1-p)w}\Big)=\sum_0^\infty \beta_n w^n;$$

somit ist $b=\beta$, d. h. $b=E_p(T_u a)$. Weiter (da $T_u a$ existiert und E_p zeilenfinit ist) gilt $E_p(T_u a)=(E_p T_u)a$, also $b=(E_p T_u)a$. —

Man wird fragen, welche Werte p in (5) und (6) auftreten. Es sind dies genau diejenigen p, für welche $|p-1|<1$ ist. Dies ergibt sich aus dem folgenden einfachen

HILFSSATZ 3. Sind u und p komplexe Zahlen ($u\neq 1$, $p\neq 0$), so gilt: Aus

$$p=\frac{1-u\bar{u}}{1-\bar{u}} \qquad \text{folgt} \quad u=\frac{-p(1-\bar{p})}{\bar{p}},$$

und umgekehrt. Stehen u und p in dem angegebenen Zusammenhang, so ist $|p-1|=|u|$.

4. Schlussbemerkungen

Ist u reell, so besitzt unsere Produktdarstellung der Turánschen Matrix die besonders einfache Gestalt

$$K_u = E_{1+u} T_u \qquad (-1<u<1). \tag{7}$$

Dieser Fall ist auch deshalb von Interesse, weil dann (für $u\neq 0$) einer der beiden Faktoren des nicht-permanenten Produkts (7) permanent, der andere nicht-permanent ist: Im Fall $-1<u<0$ vermag das permanente E_{1+u} die Nichtpermanenz von T_u nicht auszugleichen, im Fall $0<u<1$ vermag die Permanenz von T_u die Nichtpermanenz von E_{1+u} nicht auszugleichen. Anders wird es, d. h. unser Matrixprodukt wird permanent, wenn wir den Euler-Knopp-Faktor verstärken, indem wir bei E_{1+u} zu einem kleineren positiven Index übergehen. Nach Warlimont [11] ist für $0<q<1$ nämlich $E_q K_u$ permanent, und damit auch

$$E_q(E_{1+u}T_u)=(E_q E_{1+u})T_u = E_{q(1+u)}T_u.$$

LITERATUR

[1] L. ALPÁR, Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence, Publ. Math. Inst.

Hungar. Acad. Sci. **7** (1962), 287-316.
[2] J. Clunie, On equivalent power series, Acta math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 165-169.
[3] G. Halász, On Taylor series absolutely convergent on the circumference of the circle of convergence III, Acta math. Acad. Sci. Hungar. **25** (1974), 81-87.
[4] K.-H. Indlekofer, Über die Invarianz der absoluten Konvergenz bei konformer Abbildung, Math. Z. **134** (1973), 171-177.
[5] K.-H. Indlekofer, und R. Trautner, Fortsetzbare äquivalente Potenzreihen, Publ. Math. Debrecen **28** (1981), 25-30.
[6] K.-H. Indlekofer, und R. Warlimont, Über die starke Cesàro Summierbarkeit von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises, Math. Nachrichten **63** (1974), 393-399.
[7] W. Schwarz, Bemerkungen zu einem Satz der Herren Turán und Clunie über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande des Konvergenzkreises II, Publ. Math. Debrecen **18** (1971), 129-137.
[8] P. Turán, A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle, Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. **12** (1958), 19-26.
[9] P. Turán, Remarks on the preceding paper of J. Clunie entitled "On equivalent power series", Acta math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967), 171-173.
[10] R. Warlimont, Über die starke Cesàro-Summierbarkeit konform-äquivalenter Reihen, Studia Sci. math. Hungar. **10** (1975), 343-354.
[11] R. Warlimont, Euler-Summierbarkeit konform-äquivalenter Reihen, Monatsh. Math. **81** (1976), 63-68.
[12] K. Zeller, und W. Beekmann, Theorie der Limitierungsverfahren. 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1970.

Department of Mathematics
Hokkaido Institute of Technology
Sapporo

Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
D-7000 Stuttgart
Bundesrepublik Deutschland

Mathematisches Institut
Universität Tübingen
D-7400 Tübingen
Bundesrepublik Deutschland