J. Math. Soc. Japan
Vol. 54, No. 3, 2002

Polyèdre de Newton et trivialité en famille

By Ould M. Abderrahmane

(Received Jul. 3, 2000)
(Revised Nov. 24, 2000)

Abstract. In this paper we consider the following problem suggested by T.-C. Kuo. Given a convenient Newton polyhedron Γ and a convergent power series f. Under what conditions the topological type of f is not affected by perturbations by the functions whose Newton diagram lies above Γ? If Γ consists of one face only (weighted homogeneous case) then the answer is given by theorems of Kuiper-Kuo and of Paunescu. In order to answer this problem we introduce a pseudo-metric adapted to the polyhedron Γ which allows us to define the gradient of f with respect to Γ. Using this construction we obtain versions relative to the Newton filtration of Łojasiewicz Inequality for f and of Kuiper-Kuo-Paunescu theorem. We show that our result is optimal: if Łojasiewicz Inequality with exponent r is not satisfied for f then the r-jet of f with respect to the Newton filtration is not C^0 sufficent. In homogeneous case this result is known as Bochnak-Łojasiewicz Theorem.

Next we study one parameter families of germs $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ of analytic functions under the assumption that the leading terms of f_t with respect to the Newton filtration satisfy the *uniform* Łojasiewicz Inequality. We show that in this case there is a toric modification π of $\boldsymbol{R}^n$ such that the family $f_t \circ \pi$ is analytically trivial. Our result implies in particular the criteria for blow-analytic trivliality due to Kuo, Fukui-Paunescu, and Fukui-Yoshinaga.

Our technique can be also used to improve the criteria on C^k-sufficiency of jets originally due to Takens.

Introduction.

La notion de suffisance de jets a été introduite par René Thom dans les années 60. L'idée repose sur le fait que l'on peut "identifier" un germe de fonction aux premiers termes de son développement de Taylor. En fonction de l'identification que l'on veut faire, le problème est de savoir où il est suffisant de s'arrêter dans le développement.

T. C. Kuo et N. H. Kuiper (voir [**6**], [**9**]) ont démontré indépendamment, à la fin des années soixante, que le nombre de Łojasiewicz déterminait l'ordre r du développement de Taylor où il faut s'arrêter pour résoudre le problème d'un point de vue topologique (C^0-suffisance de r-jets). Plus précisément, ils ont démontré le théorème suivant:

2000 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14B05; Secondary 58K45, 14M25, 32S45.
Key Words and Phrases. Newton polyhedron, C^0-sufficiency, modified analytic trivialization, toric modification.

Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ *un germe de fonction analytique. Supposons qu'il existe un réel* ε *strictement positif tel que*

$$|\mathrm{Grad}\, f(x)| \geq \varepsilon |x|^{r-1} \quad \textit{quand} \ x \to 0,$$

alors f *et* $H_{r_0}(x) + \cdots + H_r(x)$ *ont le même type topologique local, où* $H_{r_0}(x) + \cdots + H_r(x)$ *est la partie régulière du développement de Taylor à l'ordre* r.

L'inégalité du théorème s'appelle *inégalité de Łojasiewicz* et le plus petit entier r tel que l'inégalité soit vraie s'appelle *exposant de Łojasiewicz*. Il est bien connue que si le germe f est à singularité isolée, alors l'exposant de Łojasiewicz est fini.

J. Bochnak et S. Łojasiewicz (voir [**2**]) ont établi le théorème réciproque, c'est-à-dire que pour tout germe de fonction f qui ne vérifie pas l'inégalité de Łojasiewicz à l'ordre r, il existe un germe de fonction qui a le même développement de Taylor que f à l'ordre r sans avoir le même type topologique local.

Pour démontrer ce théorème, dans [**6**], Kuo a construit un champ de vecteurs pour avoir la C^0-suffisance de germes de fonction. Etant donnés deux germes de fonction à singularités isolées, considérons l'homotopie qui les relie. Ce champ de vecteurs est construit en projetant le vecteur unité de l'axe t (espace du temps) sur l'espace tangent des niveaux de surface non nuls de l'homotopie, et en normalisant le vecteur projeté de telle sorte que la composante sur l'axe t devienne égale à 1. Le champ de vecteurs ainsi obtenu est très naturel et est essentiel pour établir équivalence ou trivialité dans de nombreuses catégories. Toute la difficulté est alors de trouver une nouvelle version du champ de vecteurs de Kuo pour obtenir cette équivalence ou cette trivialité.

En dérivant le champs de vecteurs de Kuo, F. Takens a montré (voir [**15**]) qu'un germe f qui vérifie l'inégalité de Łojasiewicz à l'ordre r est C^k-suffisante, $(k(r-r_0)+k-1)$-jets (i.e.: f est C^k-équivalente à la partie régulière de degré $k(r-r_0)+k-1$ de son développement de Taylor).

On peut interpréter géométriquement les théorèmes de Kuiper-Kuo et de Bochnak-Łojasiewicz de la façon suivante: Un germe f n'est pas perturbé topologiquement par les fonctions dont le diagramme de Newton se trouve au-dessus du polyèdre de Newton de $|x|^r$ si et seulement si le germe f vérifie l'inégalité de Łojasiewicz pour l'entier r. Cette vision géométrique a amené Kuo à se poser le problème suivant dans les années 80:

Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ *un germe de fonction et soit* Γ *un polyèdre de Newton commode fixé. Existe-t-il une condition nécessaire et suffisante* $C(f)$ *telle que* f *ne soit pas perturbée topologiquement par les fonctions dont le diagramme de Newton se trouve au-dessus du polyèdre* Γ?

L. Paunescu (voir [**14**]) a trouvé la condition $C(f)$ lorsque Γ représente un polynôme quasi-homogène commode relativement à un système de poids w.

Dans la section 1, nous trouvons la condition $C(f)$ lorsque Γ est un polyèdre de Newton commode quelconque. Pour résoudre ce problème, motivé par le théorème 1.3.6, nous introduisons une fonction de contrôle et des fonctions compensatrices relatives au polyèdre.

Dans la section 2, nous donnons une généralisation naturelle du résultat de Takens en introduisant un critère de C^k-suffisance relative à un polyèdre de Newton.

Soit $W_t(x,y) = xy(x-y)(x-ty)$, $t > 1$, la famille de singularités de Whitney, et soit $\beta : M^2 \to \boldsymbol{R}^2$ l'éclatement de $\boldsymbol{R}^2$ en 0, où M^2 est le ruban de Möbius. Cette famille est C^0-triviale mais n'est pas C^1-triviale. Kuo a cependant constaté que la famille $W_t \circ \beta$ est analytiquement triviale. Ce qui l'a amené plus tard à introduire les notions de *blow-analytique* et de *modification analytique* (voir [**8**]). Une fonction continue $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ est dite *blow-analytique* s'il existe une composition finie d'éclatements, β, telle que $f \circ \beta$ soit analytique. Par exemple, $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ est blow-analytique (mais pas C^1). Un homéomorhpisme local $h : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (R^n, 0)$ est dit *blow-analytique* si les composants de h et de h^{-1} sont blow-analytiques. On dit que deux germes f_1 et $f_2 : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (R, 0)$ sont blow-analytiquement équivalents s'il existe un homéomorhpisme local h blow-analytique tel que $f_1 = f_2 \circ h$.

Dans [**8**], [**3**], Kuo et Fukui-Paunescu, en deux étapes, ont démontrer le théorème suivant:

Soit $f_t(x)$, $t \in [a,b] \subset \boldsymbol{R}$, une famille de germes de fonction analytique ayant une forme initiale relative à une filtration homogène ou quasi-homogène et admettant une singularité isolée à l'origine, alors la famille est analytiquement triviale après une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

Dans [**4**], Fukui et Yoshinaga ont démontré le même résultat en supposant que d'une part, f_t est non-dégénérée au sens de Kouchnirenko, et d'autre part que le polyèdre $\Gamma_+(f_t)$ est indépendant de t et qu'il est commode.

Nous montrons dans la section 3, qu'il est possible de supposer que la filtration est liée à un polyèdre de Newton commode quelconque:

Si $f_t(x)$, $t \in [a,b] \subset \boldsymbol{R}$, est une famille de germes de fonction analytique, ayant une forme initiale relative à une filtration liée à un polyèdre de Newton commode Γ qui vérifie la condition $C(f)$ nécessaire pour résoudre le problème de Kuo (voir plus haut), alors la famille est analytiquement triviale après une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

Ce résultat implique, en particulier, les théorèmes de Kuo, Fukui-Paunescu et Fukui-Yoshinaga (voir [**8**], [**3**], [**4**]).

Je remercie T.-C. Kuo, A. Parusiński et L. Paunescu de leurs nombreux conseils.

1. Théorème de Kuiper-Kuo-Paunescu relatif à un polyèdre de Newton.

Deux germes de fonction $f,\ g:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R},0)$ ont le même type topologique (local en 0) s'il existe un homéomorphisme local $h:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ tel que $f\circ h=g$. On note $\pounds_k$ l'ensemble de tous les germes de fonction $f:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R},0)$ de classe C^k, au voisinage de l'origine privé de 0. On donne une relation d'équivalence sur l'ensemble $\pounds_2$ déterminée par le type topologique.

Dans [**6**], [**9**], [**14**] Kuiper-Kuo et Paunescu ont montré que pour toute fonction f de $\pounds_2$ vérifiant l'inégalité de Łojasiewicz relative à un polyèdre de Newton Γ_+ commode et quasi-homogène (i.e.: défini par un polynôme quasi-homogène), la fonction f n'est pas perturbée topologiquement par les fonctions dont le diagramme de Newton est au-dessus du polyèdre Γ_+.

L'objectif de cette section est d'arriver à une généralisation naturelle de ce résultat, qui consiste à étudier le type topologique des fonctions de $\pounds_2$ vérifiant une nouvelle inégalité de Łojasiewicz relative à un polyèdre commode non nécessairement quasi-homogène.

1.1. Diagramme de Newton.

Soit $A=(a_i^j)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ une matrice de nombres rationnels non-negatifs. Nous notons les vecteurs lignes et colonnes de A:

$$a_i=(a_i^1,\dots,a_i^m),\quad i=1,\dots,n,$$

$$a^j=(a_1^j,\dots,a_n^j),\quad j=1,\dots,m.$$

Nous notons aussi:

$$\operatorname{supp}(A)=\{a^j\mid j=1,\dots,m\},$$

$$\Gamma_+(A)=\text{enveloppe convexe dans } \boldsymbol{R}^n \text{ de l'ensemble } \operatorname{supp}(A)+\boldsymbol{R}^n_+ \text{ et}$$

$$\Gamma(A)=\text{réunion des faces compactes de } \Gamma_+(A).$$

Nous appelons $\operatorname{supp}(A)$ le *support* de A, $\Gamma_+(A)$ le *polyèdre de Newton* de A et $\Gamma(A)$ le *diagramme de Newton* de A. On dit que A est une *matrice de sommets* si le support de A est égal à l'ensemble des sommets du polyèdre de Newton de A (i.e.: $\operatorname{supp}(A)=\{$faces compactes de dimension 0 de $\Gamma_+(A)\}$). Nous supposons que le polyèdre $\Gamma_+(A)$ est *commode*, c'est-à-dire que l'intersection du polyèdre $\Gamma_+(A)$ avec chaque axe coordonnée est non vide. On dit que la matrice A est *commode* si le polyèdre $\Gamma_+(A)$ est commode. Par la suite, nous supposerons que A est une matrice de sommets commode.

Si p est un nombre réel positif, nous notons:

$$p_i^j = pa_i^j \quad \text{et} \quad p^j = pa^j.$$

Nous introduisons la fonction de contrôle du polyèdre $\Gamma_+(A)$; c'est la pseudonorme ρ définie par, pour tout point x de $\boldsymbol{R}^n$,

$$\rho(x) = \left(\sum_{j=1}^{m} x^{2p^j}\right)^{1/2p} = \left(\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} x_i^{2p_i^j}\right)^{1/2p}. \tag{1.1.1}$$

Nous pouvons choisir p assez grand pour que les réels $2p_i^j$ soient des entiers, de telle sorte que ρ^{2p} soit de classe C^∞. Par conséquent, les sphères associées (non vides)

$$S_r = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \rho(x) = r\} \tag{1.1.2}$$

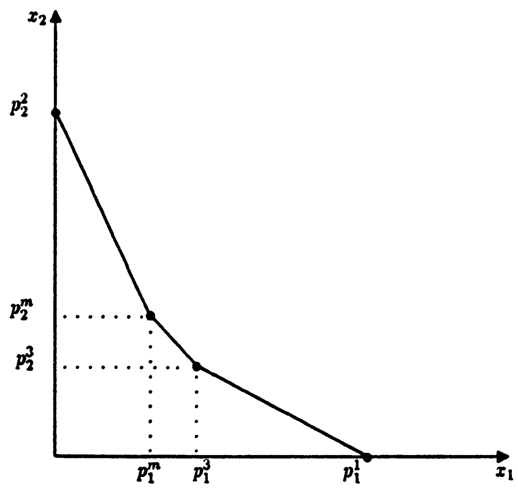
à la fonction de contrôle ρ sont des variétés de classe C^∞.

On pourra supposer par la suite que les n premières colonnes de la matrice de sommets A représentent les sommets axiaux du polyèdre $\Gamma_+(A)$ (i.e.: l'intersection du diagramme de Newton de A avec les axes de coordonnées). Ceci revient à dire que les n premiers sommets (ou colonnes) de A vérifient:

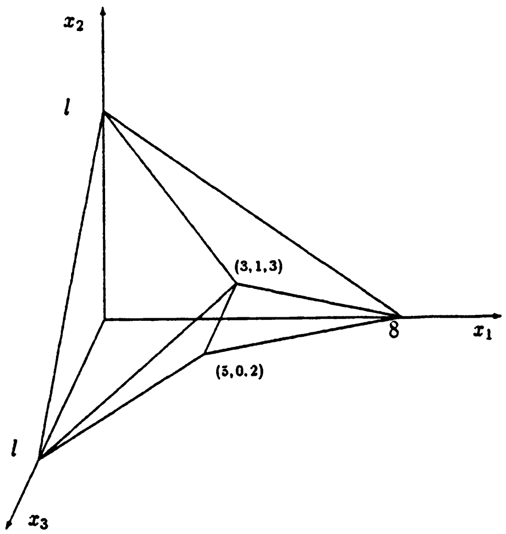
$$a^j = (0,\dots,a_j^j,\dots,0) \quad \text{et} \quad a_j^j > 0,\ \forall j = 1,\dots,n.$$

Exemple 1.1.1. Pour $n = 2$, la matrice A est de la forme: $\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & a_1^m \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \end{pmatrix}$.

Voici le diagramme de Newton de ρ^{2p}:



Exemple 1.1.2. Si la matrice A est de la forme: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on a le polyèdre de Newton $\Gamma_+(A)$ suivant:



et la fonction de contrôle est donnée par: $\rho(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{16} + x_2^{2l} + x_3^{2l} + x_1^{10}x_3^4 + x_1^6x_2^2x_3^6)^{1/2}$.

1.2. Les fonctions compensatrices.

Rappelons que pour une fonction f de $\pounds_2$, f est une *w-forme de degré r*, pour le système de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$, si pour tout nombre réel positif t, on a:

$$f(t^{w_1}x_1, \ldots, t^{w_n}x_n) = t^r f(x).$$

Soit A une matrice de sommets commode. Dans le cas où les entiers m et n sont égaux, ρ est une w-forme de degré 1 pour le système de poids $w = (w_1, \ldots, w_n)$, avec $w_k = 1/a_k^k$ pour $k = 1, \ldots, n$. On appelle $w(x_i) = w_i$ le *poids* de x_i. Dans [**14**], les fonctions compensatrices sont définies par:

$$\rho_i = \rho^{w_i}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire si m est supérieur ou égal à n, on peut faire une subdivision simpliciale de $\Gamma(A)$ pour que chaque simplexe possède n sommets linéairement indépendants $a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}$ (considérés comme des vecteurs de $\boldsymbol{R}^n$). Il existe un unique système de poids $w^{\{j_1,\ldots,j_n\}}$ correspondant à ces sommets tel que les fonctions $x^{a^{j_1}}, \ldots, x^{a^{j_n}}$ soient des $w^{\{j_1,\ldots,j_n\}}$-formes de degré 1. Par exemple, pour les sommets $a^1, \ldots, a^n$, le système de poids correspondant est:

$$w^{\{1,\ldots,n\}} = \left(\frac{1}{a_1^1}, \ldots, \frac{1}{a_n^n}\right).$$

Nous notons $\mathscr{F}$ l'ensemble des faces de $\Gamma(A)$ de dimension $n-1$. Pour chaque face $F \in \mathscr{F}$, soit w^F l'unique vecteur de $\boldsymbol{Q}_+^n$ tel que pour tout $b \in F$, $\langle b, w^F \rangle = 1$. La face F contient au moins un simplexe de n sommets $a^{j_1}, \ldots, a^{j_n}$. On en déduit que:

$$w^F = w^{\{j_1,\ldots,j_n\}}.$$

Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, on définit le *poids* de x_i relatif au polyèdre $\Gamma_+(A)$, que l'on note $A(i)$, comme le maximum des $w^{\{j_1,\dots,j_n\}}(x_i)$ où $a^{j_1}, \dots, a^{j_n}$ sont les sommets d'un simplexe de $\Gamma(A)$. Ceci revient à dire que:

$$A(i) = \max_{F \in \mathscr{F}} \{w_i^F\}.$$

Par exemple si $n = 2$ ou si $m = n + 1$, on pose $J(i) = \{j \in \{1, \dots, m\} / a_i^j > 0\}$. On obtient alors:

$$A(i) = \max_{j \in J(i)} \left\{ \frac{1}{a_i^j} \left(1 - \sum_{k \neq i} \frac{a_k^j}{a_k^k} \right) \right\}. \tag{1.2.1}$$

On introduit les fonctions compensatrices comme suit:

$$\rho_i(x) = \left(x_i^{2p/A(i)} + \sum_{k \neq i} x_k^{2pa_k^k} \right)^{A(i)/2p} \tag{1.2.2}$$

pour $i = 1, \dots, n$. Observons que les ρ_i sont des w-formes de degré $A(i)$ pour le système de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$ où $w_k = 1/a_k^k$ pour $k \neq i$ et $w_i = A(i)$.

Exemple 1.2.1. Soit A la matrice: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. La fonction de contrôle du polyèdre $\Gamma_+(A)$ est: $\rho(x, y) = x^6 + x^2y^2 + y^4$ et les poids relatifs à A sont: $A(1) = 1/4$, $A(2) = 1/3$. Les fonctions compensatrices sont: $\rho_1(x, y) = (x^4 + y^4)^{1/4}$ et $\rho_2(x, y) = (y^6 + x^{12})^{1/6}$.

Exemple 1.2.2. Soit A la matrice: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & l & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l & 2 & 3 \end{pmatrix}$ où l est choisi strictement supérieur à 16. La fonction de contrôle est:

$$\rho(x, y, z) = (x^{16} + y^{2l} + z^{2l} + x^{10}z^4 + x^6y^2z^6)^{1/2}$$

et les poids sont $A(1) = (l - 4)/3l$, $A(2) = (2l - 9)/5l$ et $A(3) = (5l - 8)/24l$. Pour $l = 20$, les fonctions compensatrices sont:

$$\rho_1(x, y, z) = (x^6 + y^{32} + z^{32})^{1/6},$$

$$\rho_2(x, y, z) = (y^{100} + x^{248} + z^{620})^{1/100} \quad \text{et}$$

$$\rho_3(x, y, z) = (z^{60} + x^{92} + y^{230})^{1/60}.$$

Les fonctions ρ_i nous permettent d'introduire une métrique Riemannienne sur $\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$, définie par la forme bilinéaire suivante:

$$\left\langle \rho_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \rho_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{i,j} \tag{1.2.3}$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. On désigne par Grad_A et $\| \ \|_A$ respectivement le gradient et la norme associés.

Pour une fonction différentiable f on a les égalités suivantes:

$$\mathrm{Grad}_A f = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \rho_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{1.2.4}$$

$$\|\mathrm{Grad}_A f\|_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2. \tag{1.2.5}$$

DÉFINITION 1.2.3. Un germe de fonction $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ de $\pounds_2$ est D-stable s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in \pounds_2$ vérifiant les conditions suivantes dans un voisinage de 0:

(1) $|g| \leq \varepsilon \rho^D$,

(2) $|\rho_i \partial_{x_i} g| \leq \varepsilon \rho^D$, $1 \leq i \leq n$, $x \neq 0$,

on a $f + g \sim f$ (i.e.: $f + g$ et f ont le même type topologique dans un voisinage de l'origine).

REMARQUE 1.2.4. Si $m = n$, on retombe sur le cas relatif à un système de poids $w = (1/a_1^1, \dots, 1/a_n^n)$, c'est-à-dire sur la définition de Paunescu [**14**].

1.3. L'inégalité de Łojasiewicz relative à un polyèdre de Newton.

Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ un germe de fonction de $\pounds_2$. On rappelle que f vérifie l'inégalité de Łojasiewicz pour l'exposant r s'il existe un réel $c > 0$ tel que:

$$|x|\,|\mathrm{grad}\, f(x)| \geq c|x|^r \quad \text{quand } x \to 0.$$

PROPRIÉTÉ 1.3.1. *Un germe de fonction $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ de $\pounds_2$ vérifie la propriété $Q_A(r)$ s'il existe un réel $c > 0$ tel que*:

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A \geq c\rho(x)^r \quad \textit{quand } x \to 0. \tag{1.3.1}$$

(*on l'appelle l'inégalité de Łojasiewicz relatif au polyèdre $\Gamma_+(A)$*).

On définit l'exposant de Łojasiewicz relatif à A comme suit:

$$l_A(\mathrm{Grad}_A f) = \inf\{\lambda > 0 : \|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A \geq \mathit{const} \cdot \rho(x)^\lambda, x \text{ voisin de zéro}\}$$

Par le lemme du petit chemin on peut affirmer que $l_A(\mathrm{Grad}_A f) \in \boldsymbol{Q}_+ \cup \{\infty\}$. Dans le cas où la matrice A est la matrice identité, l'inégalité de Łojasiewicz relative au polyèdre $\Gamma_+(A)$ n'est autre que l'inégalité de Łojasiewicz habituelle.

DÉFINITION 1.3.2. Soit A une matrice de sommets commode et d un nombre rationnel non-negatif. dA est une matrice de sommets commode. Nous notons par:

$$\Gamma_+(\rho^d) := \Gamma_+(dA),$$

$$\Gamma(\rho^d) := \Gamma(dA).$$

Définition 1.3.3. Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle, définie par

$$f(x) = \sum_{\nu} c_\nu x^\nu, \quad \text{où } \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

On dit que f est une A-forme de degré d si f est définie par

$$f(x) = \sum_{\nu \in \Gamma(\rho^d)} c_\nu x^\nu.$$

Remarque 1.3.4. Nous pouvons supposer que les coefficients de A sont assez petits pour que tous les systèmes de poids $w^{\{j_1,\dots,j_n\}}$ où $\{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ (défini dans la deuxième section) soient des n-uplets d'entiers. Si f est une A-forme de degré d, nous pouvons affirmer que pour chaque monôme de f il existe un système de poids $w^{\{j_1,\dots,j_n\}}$ tel que ce monôme soit une $w^{\{j_1,\dots,j_n\}}$-forme de degré d et dans ce cas d est un entier positif. Nous supposerons dorénavant que la matrice A satisfait cette propriété.

Pour $a = (a_1, \dots, a_n) \in \boldsymbol{R}^n_+$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \boldsymbol{R}^{n^*}_+$, où $\boldsymbol{R}^{n^*}$ désigne l'espace dual de $\boldsymbol{R}^n$, on pose:

$$\langle a, \alpha \rangle = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n$$

$$l_d(\alpha) = \min\{\langle a, \alpha \rangle \mid a \in \Gamma_+(\rho^d)\}$$

$$\gamma_d(\alpha) = \{a \in \Gamma_+(\rho^d) \mid \langle a, \nu \rangle = l_d(\alpha)\}.$$

On dit que γ est une *face coordonnée* si elle n'est pas compacte et si elle contient un ouvert non vide d'un sous-espace coordonnée. Comme le polyèdre $\Gamma_+(\rho^d)$ est commode de sommets da^j, $j = 1, \dots, m$ (car les a^j sont les sommets de $\Gamma_+(\rho)$), les faces de $\Gamma_+(\rho^d)$ sont compactes ou coordonnées. On peut introduire le lemme suivant:

Lemme 1.3.5. *Soit b un vecteur de $\boldsymbol{R}^n_+$. Si b n'appartient pas à $\Gamma_+(\rho^d)$ alors il existe un vecteur $v \in \boldsymbol{R}^{n^*}_+$ tel que $\langle b, v \rangle$ est strictement inférieur à $l_d(v)$ et $\gamma_d(v)$ est une face compacte de dimension $n - 1$.*

Démonstration. Comme b n'appartient pas à $\Gamma_+(\rho^d)$, il existe un vecteur $v \in \boldsymbol{R}^{n^*}_+$ tel que

$$\langle b, v \rangle < l_d(v).$$

On a donc:

$$\langle da^j, v \rangle > 0 \quad \forall j = 1, .., m.$$

On en déduit que les composantes v_j du vecteur v sont strictement supérieures à 0 (car $da^j_j v_j = \langle da^j, v \rangle > 0$). Ainsi $\gamma_d(v)$ est une face compacte de dimension k.

On peut affirmer l'existence de s faces compactes $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ (où $\sigma_i = \gamma_d(\alpha^i)$) de dimension $n-1$ et de r faces coordonnées $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_r$ (où $\sigma'_j = \gamma_d(\beta^j)$) de dimension $n-1$ telles que

$$\gamma_d(v) = \bigcap_{i=1}^{s} \gamma_d(\alpha^i) \bigcap_{j=1}^{r} \gamma_d(\beta^j),$$

et donc on a:

$$v = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \alpha^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda'_j \beta^j, \quad \lambda_i, \lambda'_j > 0, \forall i, j.$$

Mais d'après l'hypothèse, et du fait que la face $\gamma_d(v)$ est non vide, on en déduit:

$$\langle b, v \rangle < l_d(v) = l_d\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \alpha^i + \sum_{j=1}^{r} \lambda'_j \beta^j\right) = \sum_{i=1}^{s} l_d(\lambda_i \alpha^i) + \sum_{j=1}^{r} l_d(\lambda'_j \beta^j).$$

Or on a $l_d(\lambda'_j \beta^j) = 0$ (car σ'_j est une face coordonée) et donc il existe un entier $i_0 \in \{1, \ldots, s\}$ tel que:

$$\langle b, \lambda_{i_0} \alpha^{i_0} \rangle < l_d(\lambda_{i_0} \alpha^{i_0}). \qquad \square$$

Soit $h : (\boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle. On peut l'écrire:

$$h(t) = b_s t^s + b_{s+1} t^{s+1} + \cdots, \quad \text{avec } b_s \neq 0.$$

On dit que $h(t)$ est équivalente à t^s et on le note $h(t) \sim t^s$.

THÉORÈME 1.3.6. *Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle. Si f est une A-forme de degré d alors il existe un réel $M > 0$ tel que dans un voisinage de l'origine on a*:

(1) $|f(x)| \leq M \rho(x)^d$,

(2) $|\rho_i \partial_i f(x)| \leq M \rho(x)^d$, $1 \leq i \leq n$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer (1), il suffit de prouver que pour tout élément a de $\Gamma_+(\rho^d)$, il existe un réel $c > 0$ tel que

$$\rho^d \geq c|x^a| \quad \text{quand } x \to 0.$$

Supposons que quelque soit $c > 0$ cette inégalité n'est pas vrai. Donc 0 appartient à la fermeture de $X = \{(x, c) \mid \rho^d(x) < c|x^a|\}$.

Comme X est semi-analytique, d'après le lemme des petits chemins, il existe une courbe analytique $\lambda :]0, \varepsilon] \to X$, où $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t), c(t))$ avec:

$$\lambda_1(t) \sim t^{\alpha_1}, \ldots, \lambda_n(t) \sim t^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad c(t) \sim t^{\beta}.$$

On en déduit que:

$$\langle a, \alpha \rangle < \inf_{1 \le j \le m} \{\langle da^j, \alpha \rangle\},$$

ce qui contredit le fait que $\gamma_d(\alpha)$ est une face du polyèdre $\Gamma_+(\rho^d)$, car elle contient au moins un sommet da^j.

Pour démontrer (2), il suffit de prouver que pour tout élément a de $\Gamma(\rho^d)$, il existe un réel M strictement positif tel que:

$$|\rho_i \partial_i x^a| \le M\rho(x)^d \quad \text{quand } x \to 0, \text{ avec } 1 \le i \le n.$$

Or par construction des fonctions ρ_i, on a, pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$|\rho_i \partial_i x^a| \lesssim |x^a| + \sum_{k \ne i} |x_k^{a_k^k A(i)} x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i - 1} \cdots x_n^{a_n}|. \tag{1.3.2}$$

En utilisant le fait que pour tout $k = 1, \dots, n$ on a

$$|x_k^{a_k^k A(i)} x_i^{a_i - 1}| \lesssim |x_k^{a_k^k A(i) a_i}| + |x_i^{a_i}|,$$

l'inégalité 1.3.2 devient

$$|\rho_i \partial_i x^a| \lesssim |x^a| + \sum_{k \ne i} |x^{b^{(k)}}|$$

où

$$b_i^{(k)} = 0, \quad b_k^{(k)} = a_k^k A(i) a_i + a_k \quad \text{et} \quad b_j^{(k)} = a_j \text{ pour } j \ne i, k.$$

Compte tenu de l'inégalité (1), que l'on a démontrée précédement, il suffit de démontrer que les points $b^{(k)}$ sont éléments du polyèdre $\Gamma_+(\rho^d)$.

Supposons que $b^{(k)} \notin \Gamma_+(\rho^d)$. D'après le lemme 1.3.5, il existe un vecteur v de $\boldsymbol{R}_+^{n^*}$ tel que $\langle b^{(k)}, v \rangle$ soit strictement inférieur à $l_d(v)$ et $\gamma_d(v)$ soit une face compacte de dimension $n - 1$ qui contient au moins n sommets $da^{j_1}, \dots, da^{j_n}$ linéairement indépendants. Or le système de poids $w^{\{j_1, \dots, j_n\}}$ correspondant aux sommets $a^{j_1}, \dots, a^{j_n}$ (défini dans la deuxième section), n'est autre que $dv/l_d(v)$. Etant donné que a est un point de $\Gamma_+(\rho^d)$, on en déduit l'inégalité suivante:

$$\langle b^{(k)}, w^{\{j_1, \dots, j_n\}} \rangle < \langle a, w^{\{j_1, \dots, j_n\}} \rangle,$$

c'est-à-dire:

$$w_k^{\{j_1, \dots, j_n\}} a_k^k A(i) a_i < a_i w_i^{\{j_1, \dots, j_n\}}.$$

Or pour tout $k = 1, \dots, n$, on a $w_k^{\{j_1, \dots, j_n\}} \ge 1/a_k^k$, donc le poids $A(i)$ de x_i est strictement inférieur à $w_i^{\{j_1, \dots, j_n\}}$, ce qui contredit la définition de $A(i)$ comme le maximum des poids $w^{\{j_1, \dots, j_n\}}(x_i) = w_i^{\{j_1, \dots, j_n\}}$. $\square$

REMARQUE 1.3.7. Par le même procédé que dans la démonstration précédente nous pouvons établir que pour tout point α de $\boldsymbol{N}^n$ il existe un réel strictement positif M tel que dans un voisinage de l'origine nous ayons l'inégalité suivante:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \rho_i^{\alpha_i}\right) \partial^\alpha f \leq M \rho^d$$

où f est un fonction analytique réelle et une A-forme de degré d.

THÉORÈME 1.3.8. *Soit A une matrice de sommets commode et $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle telle que $\partial f(0) = 0$. Alors f admet une singularité isolée à l'origine si et seulement si l'exposant de Łojasiewicz de f relatif à A est fini* (*i.e.*: $l_A(\mathrm{Grad}_A f) < +\infty$).

DÉMONSTRATION. La preuve est similaire à celle de ([**9**], théorème 4A). □

1.4. Non-dégénérescence et propriété $Q_A(r)$.

Dans cette section, on s'intéresse à la relation entre la non-dégénérescence (au sens de Kouchnirenko) et la propriété $Q_A(r)$.

Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle, définie par $f(x) = \sum_\nu c_\nu x^\nu$, avec $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Pour A une matrice de sommets commode fixée on définit:

$$H_j(x) = \sum_{\nu \in \Gamma(\rho^j)} c_\nu x^\nu.$$

Par la remarque 1.3.4, on a l'écriture suivante:

$$f(x) = H_d(x) + H_{d+1} + \cdots, \quad H_d(x) \neq 0.$$

Les H_j sont des A-formes de degré j. Nous appelons H_d la A-forme initiale de f. Dans le cas où $m = n$ on l'appelle la forme initiale quasi-homogène de f (pour le système de poids $w^{\{1,\dots n\}} = (1/a_1^1, \dots, 1/a_n^n)$). Dans le cas toujours de $m = n$, si A est la matrice identité, alors H_d est la forme initiale usuelle (ou homogène) de f.

Pour tout sous-ensemble γ de $\Gamma_+(\rho^d)$, on définit la fonction f_γ par:

$$f_\gamma(x) = \sum_{\nu \in \gamma} c_\nu x^\nu.$$

DÉFINITION 1.4.1. Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle, définie par:

$$f(x) = H_d(x) + H_{d+1}(x) + \cdots$$

où les fonctions H_j sont des A-formes de degré j. On dit que 0 est un point initialement A-isolé (ou $\Gamma_+(\rho^d)$-isolé) pour f si pour toute face compacte γ de $\Gamma_+(\rho^d)$, l'équation

$$f_\gamma(x) = 0$$

n'a pas de solution dans $(\boldsymbol{R} - \{0\})^n$.

La fonction f est dite initialement A-non-dégénérée (ou $\Gamma_+(\rho^d)$-non-dégénérée) si pour toute face compacte γ de $\Gamma_+(\rho^d)$ l'équation:

$$x_1 \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_1} = \cdots = x_n \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_n} = 0$$

n'a pas de solution dans $(\boldsymbol{R} - \{0\})^n$.

Remarque 1.4.2. Comme le polyèdre de Newton $\Gamma_+(\rho^d)$ est commode, la $\Gamma_+(\rho^d)$-non-dégénérescence n'est autre que la non-dégénérescence au sens de Kouchnirenko.

Théorème 1.4.3. *Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle, définie par*

$$f(x) = \sum_v c_v x^v = H_D(x) + \cdots + H_L + \cdots$$

où les fonctions H_i sont des A-formes de degré i.

Si f est $\Gamma_+(\rho^D)$-non-dégénérée alors f vérifie la propriété $Q_A(D)$.

Remarquons avant tout que la réciproque n'est pas vraie. En effet, on pose:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/6 & 1/12 \\ 0 & 3 & 5/6 & 2 \end{pmatrix}$$

pour $f(x, y) = x^6 + xy^5$, f vérifie la propriété $Q_A(6)$ et est non-dégénérée au sens de Kouchnirenko mais n'est pas $\Gamma_+(\rho^6)$-non-dégénérée, car $f_\gamma = 0$ où γ est la face compacte de $\Gamma_+(\rho^6)$ de sommets $(1/2, 12)$ et $(0, 18)$. En vue de démontrer ce théorème, considérons d'abord le lemme suivant:

Lemme 1.4.4. *Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction analytique réelle, définie par*

$$f(x) = H_D(x) + \cdots + H_L(x) + \cdots.$$

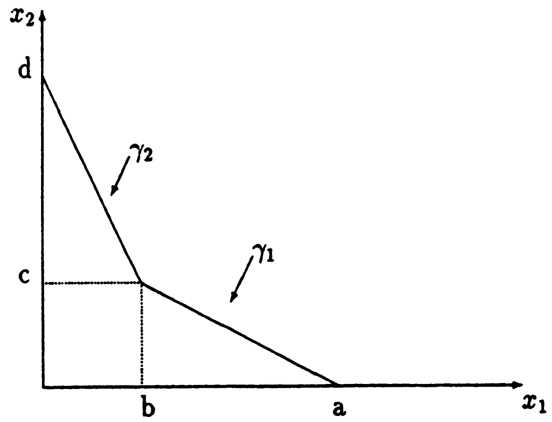
Si f admet 0 comme point $\Gamma_+(\rho^D)$-isolé alors il existe un réel θ strictement positif tel que:

$$|f(x)| \geq \theta \rho^D(x) \quad \textit{quand} \ \ x \to 0.$$

Démonstration du lemme. On va faire la démonstration dans le cas de deux variables (ou $n = 2$) et $\Gamma(\rho^D)$ n'a que deux faces compactes de dimension 1 (ou $m = 3$), la démonstration dans le cas général étant identique. On peut supposer que la fonction de contrôle est:

$$\rho^D(x) = |x_1|^a + |x_1|^b|x_2|^c + |x_2|^d.$$

Regardons son polygone $\Gamma_+(\rho^D)$:



Supposons que 0 est dans la fermeture de

$$X = \{(x, \theta) \mid |f(x)| < \theta\rho^D(x)\}.$$

Comme X est un ensemble semi-analytique, d'après le lemme des petits chemins, il existe une courbe analytique

$$\lambda :]0, \varepsilon] \to X,$$

où $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) = (x_1(t), x_2(t), \theta(t))$, avec:

$$x_1(t) \sim t^{\alpha_1}, \quad x_2(t) \sim t^{\alpha_2} \quad \text{et} \quad \theta(t) \sim t^{\beta}.$$

Donc on a l'équivalence suivante:

$$\rho^D(\lambda(t)) \sim t^A$$

où $A = \min\{a\alpha_1, b\alpha_1 + c\alpha_2, d\alpha_2\}$.

Comme l'équation $f_\gamma(x) = 0$ n'a pas de solution dans $(\boldsymbol{R} - \{0\})^2$, pour tout $\gamma \in \Gamma_+(\rho^D)$, alors il existe un réel c_1 strictement positif tel que

$$(1.4.1) \qquad |f_{\gamma_1}(x)| \geq c_1(|x_1|^a + |x_1|^b|x_2|^c) \quad \text{quand } x \to 0.$$

Par conséquent, on a:

$$f_{\gamma_1}(x) \sim t^{A_1}$$

avec $A_1 = \min\{a\alpha_1, b\alpha_1 + c\alpha_2\}$.

Nous définissons g par

$$g(x) = f(x) - f_{\gamma_1}(x).$$

Si le réel A est strictement inférieur à $d\alpha_2$, alors on peut choisir δ suffisament petit tel que A soit strictement inférieur à $(d-\delta)\alpha_2$. De plus, puisque le polyèdre de Newton de g^2 est strictement au-dessus du polyèdre de Newton de $x_1^{2a} + x_1^{2b}x_2^{2c} + x_2^{2(d-\delta)}$, donc par le théorème 1.3.6 on a:

$$|g(x)| \leq \frac{c_1}{2}(|x_1|^a + |x_1|^b|x_2|^c + |x_2|^{d-\delta}). \tag{1.4.2}$$

Par (4.1) et (4.2), on a:

$$f(\lambda(t)) \sim t^A,$$

ce qui contredit l'hypothèse

$$|f(\lambda(t))| \leq \theta(t)\rho^D(\lambda(t)).$$

En faisant le même raisonnement pour la deuxième face, on obtient:

$$A = a\alpha_1 = d\alpha_2 = b\alpha_1 + c\alpha_2,$$

ce qui contredit le fait que $\Gamma(\rho^D)$ a deux faces compactes de dimension 1. □

Démonstration du théoréme. L'origine est un point $\Gamma_+(\rho^D)$-isolé pour $\|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A$, donc par le lemme précédent, il existe un réel c strictement positif tel que

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A \geq c\rho^D(x) \quad \text{quand } x \to 0.$$ □

1.5. Stabilité topologique.

Dans cette section, on aborde l'objet principal de cette section où il s'agit de démontrer la version du théorème de Kuiper-Kuo-Paunescu relatif à un polyèdre de Newton $\Gamma_+(A)$.

Théorème 1.5.1. *Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ un germe de fonction de £$_2$. Supposons qu'il existe un réel c strictement supérieur à 0 tel que*

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A \geq c\rho(x)^D \quad \textit{quand } x \to 0, \tag{1.5.1}$$

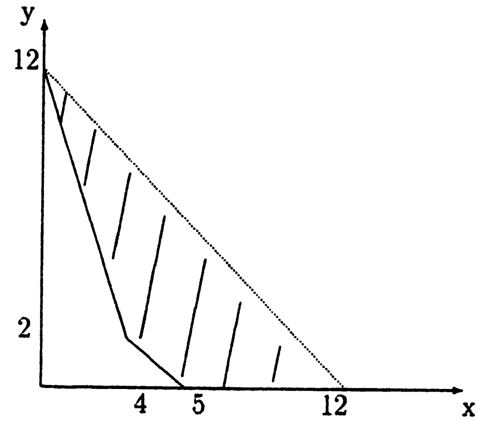
alors f est D-stable.

Si les entiers m et n sont égaux on retrouve le théorème de Kuiper-Kuo-Paunescu (voir [**6**], [**9**], [**14**]).

Dans le cas où f est analytique et définit une singularité isolée à l'origine, alors par le théorème 1.3.8 et le théorème 1.5.1, pour toute matrice A de sommets commode, il existe un nombre D tel que f soit D-stable.

En particulier si f est non-dégénéré au sens de Kouchnirenko et $\Gamma_+(f)$ est un polyèdre commode alors par le théorème 1.4.3 et le théorème 1.5.1, f est 1-stable pour la matrice de sommets de $\Gamma_+(f)$.

EXEMPLE 1.5.2. Soit $f(x, y) = (x - y^2)(x^4 + y^{10})$. On a le diagramme suivant:

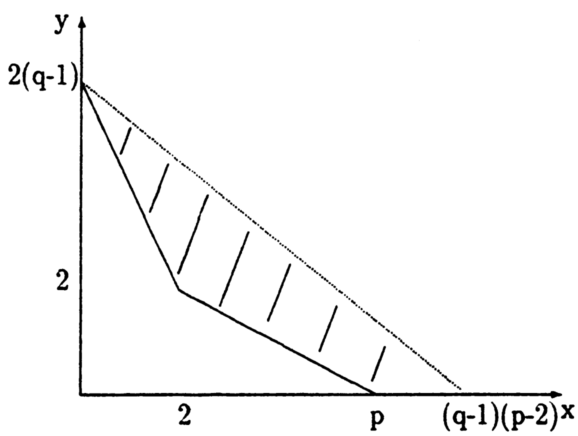


La fonction f n'est pas perturbée topologiquement par les fonctions dont le diagramme est au-dessus de la ligne en pointillés, car f est C^0-suffisant, 12 jet (voir [7]). Nous gagnons ici la zone hachurée. En effet, nous vérifions à laide du théorème 1.4.3 que:

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x, y)\|_A \geq c\rho(x, y) \quad \text{quand } (x, y) \to 0, \quad \text{pour } A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc par le théorème 1.5.1, f est 1-stable.

EXEMPLE 1.5.3. Soit $f(x, y) = x^2y^2 + x^p + xy^q$, avec $p \geq 5$, $q \geq 3$. On a le diagramme suivant:

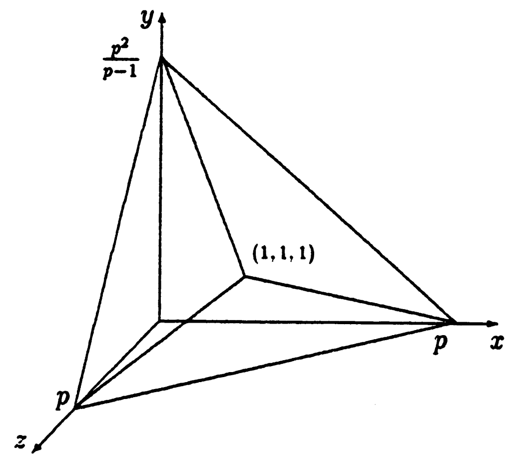


La fonction f n'est pas perturbée topologiquement par les fonctions dont le diagramme est au-dessus de la ligne en pointillés, car f est $(q-1)(p-2)$-stable, pour le système de poids $w = (1, (p-2)/2)$ (voir [**14**]). Nous gagnons ici la zone hachurée. En effet, pour $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 2 \\ 0 & 2(q-1) & 2 \end{pmatrix}$ nous voyons que $\|\mathrm{Grad}_A f(x,y)\|_A$ admet 0 comme point $\Gamma_+(\rho)$-isolé. En utilisant le lemme 1.4.4, nous démontrons que:

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x,y)\|_A \geq c\rho(x,y) \quad \text{quand } (x,y) \to 0,$$

Donc par le théorème 1.5.1, f est 1-stable.

Exemple 1.5.4. Soit $f(x,y,z) = x^p + xy^p + z^p + zy^p + xyz$, avec $p > 3$. Pour $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p^2/(p-1) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l & 1 \end{pmatrix}$ on a le diagramme suivant:



La fonction f n'est pas perturbée topologiquement par les fonctions dont le diagramme est au-dessus du diagramme $\Gamma(A)$. En effet, en utilisant le lemme des petits chemins, on démontre que:

$$\|\mathrm{Grad}_A f(x,y,z)\|_A \geq c\rho(x,y,z) \quad \text{quand } (x,y,z) \to 0,$$

pour

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p^2/(p-1) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc par le théorème 1.5.1, f est 1-stable.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.5.1. On pose:

$$F(x,t) = f(x) + tP(x), \tag{1.5.2}$$

où $P(x) \in \pounds_2$ vérifie les deux conditions suivantes:

(1) $|P| \leq a\rho^D$,

(2) $|\rho_i \partial x_i P| \leq a\rho^D$, $x \neq 0$, pour $i = 1, \dots, n$.

Nous cherchons à déterminer $\varepsilon > 0$, tel que pour tout réel a vérifiant $0 \leq a < \varepsilon$, la famille (F_t), $t \in [0,1]$ est topologiquement triviale.

Par un prolongement de la forme bilinéaire définie en (1.2.3), on a:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

et

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 1.$$

On en déduit une métrique Riemannienne sur $\{\boldsymbol{R}^n \backslash 0\} \times \boldsymbol{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Grad}_A F(x,t) &= \sum_{i=1}^{n} \rho_i \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + t \frac{\partial P(x)}{\partial x_i} \right) \rho_i \frac{\partial}{\partial x_i} + P(x) \frac{\partial}{\partial t} \\ &= \operatorname{Grad}_{A,x} F(x,t) + P(x) \frac{\partial}{\partial t}.\end{aligned}$$

On définit le champ de vecteurs de Kuo comme suit:

$$\phi(x,t) = \begin{cases} \left(\dfrac{-P(x) \operatorname{Grad}_{A,x} F}{\|\operatorname{Grad}_{A,x} F\|_A^2}, 1 \right) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.5.3}$$

Ce champ de vecteurs est de classe C^1 pour $x \neq 0$ et il est tangent aux niveaux de surface $F = C$ où C est une constante réelle.

LEMME 1.5.5. *On a*:

$$\|\operatorname{Grad}_{A,x} F(x,t)\|_A \geq b\rho^D$$

où b est une constante réelle strictement positive, et $t \in [0,1]$.

DÉMONSTRATION DU LEMME. On a:

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Grad}_{A,x} F\|_A &\geq \|\operatorname{Grad}_{\mathrm{A}} f(x)\|_A - t\|\operatorname{Grad}_A P(x)\|_A \\ &\geq c\rho^D - t\|\operatorname{Grad}_A P(x)\|_A, \quad t \in [0,1]\end{aligned}$$

mais par hypothèse sur $P(x)$, on a:

$$\|\operatorname{Grad}_A P(x)\|_A^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\rho_i \frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 \leq a^2 \rho^{2D}.$$

On choisit $\varepsilon = c/2$, alors on peut considérer aussi $b = c/2$. $\square$

Pour prouver que la famille (F_t), $t \in [0,1]$, est topologiquement triviale, il suffit de montrer qu'il existe deux fonctions de Liapunov $U(x,t)$ et $V(x,t)$ telles que

$$\operatorname{Grad} U(x,t) \cdot \phi(x,t) > 0$$

et

$$\operatorname{Grad} V(x,t) \cdot \phi(x,t) < 0$$

pour $x \neq 0$, (voir [**6**], [**14**]). En effet, on choisit $U(x,t)$ et $V(x,t)$ de la forme

$$U(x,t) = e^{2Lt}\rho^2 \quad \text{et} \quad V(x,t) = e^{-2Lt}\rho^2.$$

Par un calcul élémentaire, nous obtenons:

$$\begin{aligned}\operatorname{Grad} U(x,t) \cdot \phi(x,t) &= 2e^{2Lt}\rho\left(L\rho + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi_i\right)\\ &\geq 2e^{2Lt}\rho\left(L\rho - \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\phi_i\right|\right).\end{aligned}$$

Compte tenu de (1.5.3), on a:

$$\phi_i(x,t) = \frac{-P\rho_i \partial_{x_i} F(x,t)\rho_i}{\|\operatorname{Grad}_{A,x} F\|_A^2}.$$

Or par les propriétés (1.2.4) et (1.2.5), on a:

$$|\rho_i \partial_{x_i} F(x,t)| \leq \|\operatorname{Grad}_{A,x} F\|_A,$$

et l'on obtient donc par le lemme 1.5.5:

$$|\phi_i(x,t)| \leq 2\rho_i.$$

Le théorème 1.3.6 entraîne alors l'existence d'un réel M strictement supérieur à 0 satisfaisant

$$\left|\rho_i(x)\frac{\partial \rho(x)}{\partial x_i}\right| \leq M\rho(x).$$

Il suffit donc de choisir $L \gg M$. On démontre la deuxième inégalité d'une façon analogue. Ceci complète la démonstration du théorème. $\square$

1.6. Théorème de Bochnak-Łojasiewicz relatif à un polyèdre de Newton. Dans cette section, nous allons démontrer que l'hypothèse du théorème 1.5.1 n'est pas seulement suffisante mais est aussi nécessaire pour avoir la stabilité topologique relative au polyèdre de Newton. C'est l'analogue du théorème de Bochnak et Łojasiewicz, relatif à un polyèdre de Newton $\Gamma_+(A)$.

DÉFINITION 1.6.1. Deux germes de fonction f et $g : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ de $\mathcal{L}_2$ sont D-équivalents, s'ils vérifient les conditions suivantes:

$$(1) \quad f - g = o(\rho^D),$$

$$(2) \quad \rho_i(\partial_{x_i} f - \partial_{x_i} g) = o(\rho^D), \quad \text{où } 1 \le i \le n.$$

REMARQUE 1.6.2. i) Si f et g sont analytiques alors, d'après le théorème 1.3.6, la condition (1) implique la condition (2).

ii) Si f ou g vérifie la propriété $Q_A(D)$ alors d'après le théorème 1.5.1, si f et g sont D-équivalents, alors f et g ont le même type topologique dans un voisinage de l'origine.

Soit $A \in \boldsymbol{Q}_+^{n \times m}$ une matrice de sommets commode. On note par $l(A)$ la distance entre l'origine et le polyèdre de Newton $\Gamma_+(A)$, c'est-à-dire

$$l(A) = \min_{1 \le j \le m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^j \right\}.$$

On pose:

$$v^i = \left(\frac{1}{a_1^1}, \dots, A(i), \dots, \frac{1}{a_n^n} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$b_i = \inf_{1 \le j \le m} \{ \langle a^j, v^i \rangle \} = l_1(v^i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$w^A = \left(\frac{A(1)}{b_1}, \dots, \frac{A(n)}{b_n} \right).$$

Par constuction de ρ, ρ_i et w^A, il existe deux réels c_1 et c_2 strictement positifs tel que pour tout point x de $\boldsymbol{R}^n$, on ait, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$c_1 \rho^{w_i^A}(x) \le \rho_i(x) \le c_2 \rho^{1/a_i^i}(x). \tag{1.6.1}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème.

THÉORÈME 1.6.3. *Soit $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ une fonction polynômiale, telle que*

$$f(x) = H_L(x) + \cdots + H_D(x)$$

où les H_i sont des A-formes de degré i et avec

$$D \geq 3 \sup\{w_1^A, \ldots, w_n^A\}.$$

Si f ne vérifie pas la propriété $Q_A(D)$, alors il existe une famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ de $\pounds_2$ telles que les fonctions f_i soient D-équivalentes à f et les variétés $f_i^{-1}(0)$ ne soient pas homéomorphes deux à deux.

Démonstration. On définit l'ensemble semi-algébrique associé à f:

$$E_f = \left\{ u \in \boldsymbol{R}^n \mid \|\mathrm{Grad}_A f(u)\|_A = \min_{\rho(x)=\rho(u)} \|\mathrm{Grad}_A f(x)\|_A \right\}.$$

(Dans la sphère $\rho(x) =$ constant, $\|\mathrm{Grad}_A f\|_A$ prend son minimum aux points de E_f. Par le théorème Tarski-Seidenberg ([**10**], p. 17), l'ensemble E_f est semi-algébrique). Appliquant le lemme des petits chemins (voir [**11**], p. 103 et [**12**], §3), on peut affirmer qu'il existe une courbe analytique

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)), \quad t \in [0, \eta),$$

avec $\lambda(0) = 0$, $\lambda(t) \neq 0$ si $t \neq 0$, et pour tout t, $\lambda(t) \in E_f$.

Parce que nous avons

$$\|\mathrm{Grad}_A f(\lambda(t))\|_A \sim t^\mu \quad \text{et} \quad \rho(\lambda(t)) \sim t^r,$$

il s'ensuit qu'il existe un réel strictement positif c tel que

$$\|\mathrm{Grad}_A f\|_A \geq c\rho^{\mu/r} \quad \text{quand } x \to 0.$$

Par le fait que f ne vérifie pas la propriété $Q_A(D)$, nous avons $\mu/r > D$.

Pour $i = 1, \ldots, n$, on peut supposer que:

$$\lambda_i(t) \sim t^{q_i}, \quad \partial_{x_i} f(\lambda(t)) \sim t^{\varepsilon_i} \quad \text{et} \quad \rho_i(\lambda(t)) \sim t^{\alpha_i},$$

et nous en déduisons que:

$$\mu = \min_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon_i + \alpha_i\} \quad \text{et} \quad r = \min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^j q_i \right\}.$$

et d'après l'inégalité 1.6.1, nous avons:

$$\alpha_i \leq r w_i^A, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

A une permutation près, nous pouvons supposer que $q_1 = \min\{q_i\}$ et $\lambda_1(t) = t^{q_1}$.

De tout ce qui précéde on déduit les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &\geq \mu - \alpha_i \\ &> Dr - rw_i^A \\ &\geq \left(D - w_i^A\right) \min_{1 \leq j \leq m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i^j q_i \right\} \\ &\geq \left(D - w_i^A\right) q_1 l(A).\end{aligned}$$

Or par hypothèse nous savons que D est supérieur où égal à $3 \sup\{w_1^A, \dots, w_n^A\}$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, n$, on peut affirmer que $l(A) w_i^A$ est supérieur où égal à 1. Nous avons donc:

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_i}{q_1} &> (D - w_i^A) l(A) \\ &\geq (3w_i^A - w_i^A) l(A) \\ &\geq 2w_i^A l(A) \\ &\geq 2.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction suivante:

$$P(x) = f(\lambda(|x_1|^{1/q_1})) + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (\lambda(|x_1|^{1/q_1}))(x_i - \lambda_i(|x_1|^{1/q_1})).$$

Il s'ensuit que l'ordre de $\partial f / \partial x_i(\lambda(|x_1|^{1/q_1}))$ est ε_i / q_1 qui est strictement supérieur à 2, $i = 1, \dots, n$, et donc P est une fonction de classe C^2. Par conséquent, f et $f - P$ sont D-équivalentes.

Nous pouvons démontrer que notre nouveau représentant de la classe f vérifie, pour tous $t \in [0, \eta)$ et $i = 1, \dots, n$, les propriétés suivantes:

$$(f - P)(\lambda(t)) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial (f - P)}{\partial x_i} (\lambda(t)) = 0.$$

La démonstration s'achève de la même façon que dans [**1**], en choisissant ϕ_1 de telle sorte que l'ordre par rapport à x_1 soit plus grand que D, et en observant qu'une fonction C^∞ plate ne change pas la classe de D-équivalence. $\square$

Dans le cas où les entiers m et n sont égaux, nous nous retrouvons dans le cas relatif à un système de poids $w = (1/a_1^1, \dots, 1/a_n^n)$, et du fait que le vecteur w^A n'est autre que w, nous retrouvons la condition sur D du théorème B de Paunescu (voir [**14**]).

Dans l'article de Fukui-Yoshinaga [**4**], on montre que toute fonction f analytique commode non-dégénérée au sens de Kouchnirenko est topologiquement stable par rapport à son polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$. Ce qui revient à dire, d'après le théorème précédent que f vérifie la propriété $Q_A(1)$, où A est la matrice de sommets du polyèdre de Newton de f. Par ailleurs, ceci n'est rien d'autre que le théorème 1.4.3.

2. C^k suffisance de jet relative à un polyèdre de Newton.

Deux germes de fonction f et $g:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R},0)$ sont C^k-équivalents s'il existe un difféomorphisme $h:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R}^n,0)$ de classe C^k tel que $f=g\circ h$ dans un voisinage de l'origine.

Dans cette section nous définissons la C^k-suffisance de r-jet relative à un polyèdre de Newton $\Gamma_+(A)$, où A est une matrice de sommets commode, pour résoudre le problème suivant. Etant donné un germe de fonction $f:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R},0)$, ayant un développement de Taylor relatif à un polyèdre de Newton

$$H_L(x)+\cdots+H_D(x)+\cdots,\quad x\in\boldsymbol{R}^n,$$

où les H_i sont des A-formes de degré i, comment peut-on trouver l'entier R pour lequel on peut omettre toutes les formes de degré strictement supérieur à R, laissant

$$f\sim_k H_L(x)+\cdots+H_R(x)$$

(i.e.: f est C^k-équivalent à $H_L(x)+\cdots+H_R(x)$).

2.1. Un critère de C^k_A-suffisance de jet.

Dans cette section, nous allons étendre la notion usuelle de C^k-suffisance de jet (voir [**15**], [7]), pour pouvoir l'utiliser relativement à des polyèdres non nécessairement homogènes.

Définition 2.1.1. Un germe de fonction $f:(\boldsymbol{R}^n,0)\to(\boldsymbol{R},0)$ de $\pounds_k$ est C^k_A-suffisant, D-jet, si pour tout élément g de $\pounds_{k+1}$ vérifiant la propriété suivante:

$$\forall\alpha\in\boldsymbol{N}^n,|\alpha|\le k+1\Rightarrow\left(\prod_{i=1}^n\rho_i^{\alpha_i}\right)\partial^\alpha g=o(\rho^D),\tag{2.1.1}$$

on a $f+g\sim_k f$ (i.e.: $f+g$ est C^k-équivalent à f).

Remarque 2.1.2. 1. Si f est D-stable alors f est C^0_A-suffisant, D-jet.

2. Si les entiers m et n sont égaux, nous nous trouvons dans le cas relatif à un système de poids $w=(1/a^1_1,\dots,1/a^n_n)$. En particulier si A est la matrice identité, alors la C^k_A-suffisance de jet n'est autre que la C^k-suffisance de jet.

3. Si g est analytique et si son diagramme de Newton est strictement au-dessus du polyèdre de Newton de la fonction ρ^D, alors g vérifie la propriété 2.1.1 (voir le théorème 1.3.6 de la première section).

THÉORÈME 2.1.3. *Soit* $f : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$ *un germe de fonction de* $\pounds_{k+1}$ *tel que*

$$f = H_L + \cdots + H_D + \cdots,$$

où les H_i *sont des* A*-formes de degré* i. *Si* f *vérifie la propriété* $Q_A(D)$ *(voir section* 1), *alors* f *est* C_A^k*-suffisant,* $(D+R)$*-jet, avec*

$$R = \max\left\{\{0\} \cup \{k(D-L) + \alpha w^A - \frac{1}{a_i^i} \mid 1 \le i \le n, \alpha \in \boldsymbol{N}^n \text{ avec } |\alpha| = k\}\right\}.$$

On remarque que si A est la matrice identité, on retrouve le Théorème de Kuiper-Kuo-Takens (voir [**6**], [**9**], [**15**]).

La preuve est similaire à celle de Takens [**15**], où l'on dérive le champ de vecteurs de Kuo 1.5.3 pour trouver la condition pour qu'il soit de classe C^k à l'origine.

EXEMPLE 2.1.4. Soit $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^4)^2$. D'après le théorème de Kuiper-Kuo-Takens [**6**], [**9**], [**15**], f est C^k-suffisante, $(8 + 5k - 1)$-jet. Mais la fonction f vérifie la propriété $Q_A(32)$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Donc par le théorème 2.1.3, f est C_A^k-suffisante, $(32 + 8k - 4)$-jet. On en déduit alors que f est C^k-suffisante, $(8 + 2k - 1)$-jet. De plus, d'après les théorèmes 1.5.1 et 2.1.3, pour λ suffisamment petit, on a, pour tout entier naturel k:

$$f \sim_k (x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k},$$

car la fonction x_1^{4+k} est au-dessus du polyèdre

$$\Gamma_+(\rho^{(32+8k-4)}) = \Gamma_+(|x_1|^{4+k-1/2} + |x_2|^{8+2k-1}).$$

Par contre, pour tout entier naturel k et pour tout réel λ non nul, on a:

$$f \nsim_{k+1} (x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k}.$$

Supposons qu'il existe un difféomorphisme h de classe C^{k+1} tel que:

$$(x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k} = (y_1^2 + y_2^4)^2 = (h_1^2(x_1, x_2) + h_2^4(x_1, x_2))^2 = \phi^2(x_1, x_2).$$

Le plus bas et le plus haut degré convenables du développement de Taylor sont:

	le plus bas	le plus haut
h_i	1	$1+k$
h_i^2	2	$2+k$
ϕ^2	4	$4+k$
$\partial_{x_1}\phi^2$	3	$3+k$
$(\partial_{x_1}\phi^2)^2$	6	$6+k$

De plus, on a:

$$(\partial_{x_1}\phi^2)^2 = \phi^2 4(\partial_{x_1}\phi)^2. \tag{2.1.2}$$

Les termes à gauche et à droite respectivement de (2.1.2) sont respectivement

$$[4x_1(x_1^2 + x_2^4)^2]^2 \quad \text{et} \quad [(x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k}]4(\partial_{x_1}\phi)^2.$$

En identifiant les deux termes précédents, on obtient:

$$4(\partial_{x_1}\phi)^2 = 16x_1^2 + A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2),$$

où $A(x_1, x_2)$ est un polynôme de plus bas degré 3 et de plus haut degré $2+k$, et où:

$$B(x_1, x_2) = o(|x|^{2+k}).$$

Ainsi par l'égalité (2.1.2), on a:

$$[(x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k}][A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2)] + 16\lambda x_1^{6+k} = 0. \tag{2.1.3}$$

Donc

$$A(x_1, x_2) = -16\lambda x_1^{2+k}$$

et

$$B(x_1, x_2) = x_1^{2+k}C(x_1, x_2)$$

où $C(x_1, x_2)$ est une fonction continue à l'origine et $C(x_1, x_2) = o(1)$. En reportant les valeurs de $A(x_1, x_2)$ et $B(x_1, x_2)$ dans (2.1.3), on obtient

$$C(x_1, x_2) = 16\lambda - \frac{16\lambda x_1^4}{[(x_1^2 + x_2^4)^2 + \lambda x_1^{4+k}]}$$

et donc pour tout x_2, on a $C(0, x_2) = 16\lambda$, ce qui contredit le fait que $C(x_1, x_2)$ est continue à l'origine et $C(0, 0) = 0$.

Cette démonstration s'inspire fortement de la démonstration de Kuiper ([**9**], théorème 5B).

3. Modification analytique relative à un polyèdre de Newton.

On considère le problème de classification des singularités réelles définies par les germes de fonction analytique réelles. L'exemple (3.1.2) de Whitney nous montre que la classification en classes différentiables ne convient pas. Ainsi, Kuo a introduit une nouvelle classification définie par la notion de modification analytique triviale. Dans [**8**], [**4**], [**3**], Kuo, Fukui-Yoshinaga et Fukui-Paunescu ont montré que si une famille analytique réelle $f_t(x)$ vérifie l'une des conditions suivantes:

i) La forme initiale de f_t relative à un polyèdre quasi-homogène admet une singularité isolée quel que soit t,

ii) La famille f_t est non-dégénérée au sens de Kouchnirenko, le polyèdre $\Gamma_+(f_t)$ est indépendant de t, et il est commode, alors la famille $f_t(x)$ admet une modification analytique triviale.

Le but de cette section est d'arriver à une généralisation naturelle de ces résultats où il s'agit de mettre une condition sur la forme initiale de f_t relative à un polyèdre non nécessairement quasi-homogène pour que cette famille admette une modification analytique triviale.

3.1. Modification analytique.

Soit $F(x,t)$ une famille de fonctions analytiques réelles à n variables réelles $x = (x_1, \dots, x_n)$, paramétrée par $t \in I$, avec I un intervalle fermé de $\boldsymbol{R}$. Nous supposons que pour tout $t \in I$, on a: $F(0,t) = 0$. Posons $f_t(x) = F(x,t)$. Nous notons

$$f_t(x) = \sum_{\nu} c_\nu(t) x^\nu, \quad \text{où } \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n),$$

le développement de Taylor de f_t à l'origine. Rappelons la définition d'une modification analytique triviale.

DÉFINITION 3.1.1. Soit $\pi : X \to \boldsymbol{R}^n$ une modification analytique propre. On dit que f_t, $t \in I$, admet une modification analytique triviale (MAT, par abréviation) par π le long de I s'il existe un isomorphisme analytique réel H préservant les t-niveaux entre deux voisinages de $\pi^{-1}(0) \times I$ qui induit un homéomorphisme h préservant les t-niveaux entre deux voisinages de $\{0\} \times I$ de telle sorte que les fonctions $F \circ (\pi \times \mathrm{id}_I) \circ H$ et $F \circ h(x,t)$ soient indépendantes de t.

EXEMPLE 3.1.2 (H. Whitney [**8**]). Soit $W_t : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$, définie par $W_t = x_1 x_2 (x_1 - x_2)(x_1 - t x_2)$, pour $I = (1, \infty)$. Alors W_t, $t \in I$, est une famille topologiquement triviale non C^1-triviale. Mais par une observation de Kuo [**8**], la famille W_t admet une MAT par un éclatement de $\boldsymbol{R}^2$.

Soit $B = (b_i^j) \in \boldsymbol{Q}^{n \times m}$ une matrice de sommets commode, ρ la fonction de contrôle correspondant à B, ρ_i les fonctions compensatrices correspondantes à B et $\Gamma_+(\rho)$ le polyèdre de Newton de B (défini dans la première section).

Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$, une famille analytique réelle. On pose $F(x,t) = f_t(x)$. On a le développement de Taylor de f_t à l'origine: $\sum_\nu c_\nu(t) x^\nu$, avec $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$. Pour une matrice B de sommets commode fixée, nous définissons:

$$H_j(x,t) = \sum_{\nu \in \Gamma(\rho^j)} c_\nu(t) x^\nu.$$

Nous pouvons écrire F de la façon suivante:

$$F(x,t) = H_d(x,t) + H_{d+1}(x,t) + \cdots, \quad \text{où } H_d(x,t) \neq 0.$$

Les H_j sont des B-formes de degré j, nous appelons H_d la B-forme intiale de f_t. Dans le cas où les entiers m et n sont égaux, on l'appelle la forme initiale quasi-homogène de f_t, pour le système de poids $w^{\{1,\dots,n\}} = (1/b_1^1, \dots, 1/b_n^n)$. Et si B est la matrice de l'identité, H_d est la forme initiale usuelle (ou homogène) de f_t.

3.2. Résultats connus.

Théorème 3.2.1 (T. C.-Kuo [**8**]). *Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$, une famille analytique réelle. Si la forme initiale usuelle de f_t, pour tout $t \in I$, définit une singularité isolée à l'origine, alors la famille f_t admet une MAT par un éclatement de $\boldsymbol{R}^n$ à l'origine.*

Théorème 3.2.2 (Fukui-Paunescu [**3**]). *Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$, une famille analytique réelle. Si la forme initiale quasi-homogène (pour un système de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$) de f_t, pour tout $t \in I$, définit une singularité isolée à l'origine, alors la famille f_t admet une MAT par une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.*

Théorème 3.2.3 (Fukui-Yoshinaga [**4**]). *Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$ une famille analytique réelle non-dégénérée au sens de Kouchnirenko. Si le polyèdre $\Gamma_+(f_t)$ ne dépend pas de t et qu'il est commode, alors la famille f_t admet une MAT par une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.*

Observons que dans les théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 précédents, l'hypothèse de singularité isolée équivaut à l'existence d'un réel c strictement positif tel que pour tout $t \in I$ on ait:

$$\|\mathrm{Grad}_{B,x} H_d(x,t)\|_B \geq c\rho^d(x) \quad \text{quand } x \to 0.$$

En utilisant le théorème 1.4.3, l'hypothèse du théorème 3.2.3 implique l'existence d'un réel c strictement positif tel que pour tout $t \in I$ on ait:

$$\|\mathrm{Grad}_{B,x} H_1(x,t)\|_B \geq c\rho(x) \quad \text{quand } x \to 0,$$

où B est la matrice de sommets du polyèdre $\Gamma_+(f_t)$.

On peut voir que les hypothèses des théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 impliquent une condition naturelle sur la B-forme initiale de f_t. Dans les sections suivantes, on démontre que cette condition est suffisante pour que la famille f_t admette une MAT par une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

3.3. Modification analytique triviale.

Dans cette section, on aborde la version du théorème de Kuo-Fukui-Paunescu (voir [**8**], [**3**]) relatif à un polyèdre de Newton $\Gamma_+(B)$.

Théorème 3.3.1. *Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^n, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in I$, une famille analytique réelle. S'il existe un réel c strictement positif tel que pour tout $t \in I$ la B-forme initiale H_d vérifie la condition suivante*:

$$\|\mathrm{Grad}_{B,x} H_d(x,t)\|_B \geq c\rho^d(x) \quad \textit{quand} \;\; x \to 0,$$

alors la famille f_t admet une MAT par une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

Exemple 3.3.2. Soit $f_t : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}, 0)$, $t \in [-1, 1]$, une famille analytique réelle définie par

$$f_t(x, y) = x^2y^2 + x^p + xy^q + ty^{2q-1}, \quad \text{avec} \;\; p \geq 5, q \geq 3.$$

Une forme initiale quasi-homogène ou homogène de f_t ne peut admettre une singularité isolée à l'origine. De plus, le polyèdre de Newton $\Gamma(f_t)$ dépend de t. On ne peut donc pas appliquer les théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Mais pour

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2(q-1)} & 0 & \dfrac{1}{p(q-1)} \\ 0 & \dfrac{1}{p} & \dfrac{1}{p(q-1)} \end{pmatrix},$$

on a

$$f_t(x, y) = H_{2p(q-1)}(x, y) + H_{p(2q-1)}(x, y, t),$$

où

$$H_{2p(q-1)}(x, y) = x^2y^2 + x^p + xy^q \quad \text{et} \quad H_{p(2q-1)}(x, y, t) = ty^{2q-1}.$$

Dans l'exemple 1.5.3, on a démontré qu'il existe un réel c strictement positif tel que:

$$\|\mathrm{Grad}_B H_{2p(q-1)}(x, y)\|_B \geq c\rho^{2p(q-1)}(x, y) \quad \text{quand} \;\; x \to 0.$$

Donc par le théorème 3.3.1, f_t admet une *MAT* par une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

3.4. Preuve du théorème 3.3.1.

Dans cette section, nous nous proposons de démontrer le théorème 3.3.1 en plusieurs étapes.

3.5. Le champ de vecteurs relatif à un polyèdre de Newton.

Soit $F(x,t) = \sum_\nu c_\nu(t)x^\nu$, $t \in I$, une famille analytique réelle de n variables, sa B-forme initiale $H_d(x,t)$, $t \in I$, vérifie la propriété $Q_B(d)$ pour tout $t \in I$ (où $Q_B(d)$ est définie dans la premiére section). Nous considérons le champ du vecteur de Kuo défini comme suit:

$$V = -\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{P} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

avec

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^{2s} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F}{\partial t} \left(\rho_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^{2s-1} \rho_i.$$

Le champ du vecteur V est tangent aux niveaux de surface de F chaque fois que V est défini. La B-forme initiale de P est de degré $2sd$.

3.6. Modification torique.

Rappellons quelques définitions et notations basiques relatives à la modification torique et aux éventails, utilisées par Fukui et Paunescu (voir [**3**]).

Soit M le réseau $\boldsymbol{Z}^n$ et N son réseau dual $\mathrm{Hom}_Z(M, Z)$. Nous écrirons sous forme de vecteurs colonne les éléments de M et sous forme de vecteurs ligne les éléments de N. Soit e_j le j-ème vecteur colonne unité $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ et e^i le i-ème vecteur ligne unité ${}^t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Posons $M_{\boldsymbol{R}} = M \otimes_Z \boldsymbol{R}$ et $N_{\boldsymbol{R}} = N \otimes_Z \boldsymbol{R}$ et notons:

$$\langle \, , \rangle : M_{\boldsymbol{R}} \times N_{\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{R}$$

l'application bilinéaire canonique définie par $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Soit $v_1, \dots, v_s$ des vecteurs de N (resp. M). Notons

$$\sigma = \{ r_1 v_1 + \cdots + r_s v_s \in N_{\boldsymbol{R}} \ \text{(resp. } M_{\boldsymbol{R}}) \mid r_i \geq 0, i = 1, \dots, s \}$$

le cône engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_s$. Nous appellerons de tels cônes des *cônes de* N (resp. M). Si nous voulons indiquer les générateurs du cône, nous noterons $\sigma = \sigma(v_1, \dots, v_s)$. Pour un cône σ de N, nous appelons *dual du cône* σ, et nous notons $\sigma^\vee$ l'ensemble

$$\sigma^\vee = \{ u \in M_{\boldsymbol{R}} \mid \forall v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0 \}.$$

Il est facile de voir que $\sigma^\vee$ est un cône de M. On note $\boldsymbol{R}[M \cap \sigma^\vee]$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre engendrée par le semi-groupe additif $M \cap \sigma^\vee$, et U_σ l'ensemble des points réels de Spec $(\boldsymbol{R}[M \cap \sigma^\vee])$. Si un cône σ_1 de N est une face d'un autre cône σ_2 de N alors l'inclusion naturelle $\sigma_2^\vee \subset \sigma_1^\vee$ induit une inclusion des ouverts $U_{\sigma_1} \subset U_{\sigma_2}$, puisque $\boldsymbol{R}[M \cap \sigma_1^\vee]$ et $\boldsymbol{R}[M \cap \sigma_2^\vee]$ ont le même corps de fraction et ont le même point générique. Cependant si Σ est un éventail, c'est à dire une collection finie de cônes de N qui forme un complexe, nous pouvons recoller les U_σ, $\sigma \in \Sigma$, et nous obtenons une variété torique (réelle), notée X_Σ. On dit qu'un cône σ de N est régulier si σ est engendré par une partie d'une base de N. On dit qu'un éventail est régulier si chaque cône σ de l'éventail $\in \Sigma$ est régulier. Si Σ est un éventail régulier alors X_Σ est une variété non singulière.

Exemple 3.6.1. Soit σ un quadrant positif dans $N_{\boldsymbol{R}}$. Alors $\sigma^\vee$ est un quadrant positif dans $M_{\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{R}[M \cap \sigma^\vee]$ est l'anneau polynômial $\boldsymbol{R}[x_1, \dots, x_n]$. L'ensemble des faces de σ est un éventail régulier et la variété torique correspondante est $\boldsymbol{R}^n$.

Soit Σ un éventail qui forme une subdivision du quadrant positif, c'est à dire

$$|\Sigma| := \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma$$

est le quadrant positif dans $N_{\boldsymbol{R}}$. Alors l'inclusion naturelle du quadrant positif dans $\sigma^\vee$, $\sigma \in \Sigma$, induit l'inclusion

$$\boldsymbol{R}[x_1, \dots, x_n] \subset \boldsymbol{R}[M \cap \sigma^\vee].$$

Ceci définit une modification propre

$$\pi = \pi_\Sigma : X_\Sigma \to \boldsymbol{R}^n.$$

Nous appellons ce type de modification une modification torique de $\boldsymbol{R}^n$.

Supposons que Σ est un éventail régulier qui subdivise le quadrant positif. Alors pour chaque n-cône σ de Σ, U_σ est isomorphe à $\boldsymbol{R}^n$ avec un système de coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$, et l'application

$$\pi|_{U_\sigma} : U_\sigma \to \boldsymbol{R}^n$$

est déterminée par

$$x_i = \prod_{j=1}^{n} y_j^{a_i^j}$$

pour une matrice (a_i^j), $i, j = 1, \dots, n$, d'entiers dont le déterminant vaut ± 1. Par définition, $a^j = {}^t(a_1^j, \dots, a_n^j)$, $j = 1, \dots, n$, engendre le cône σ.

Soit Δ un polyèdre convexe dans $M_{\boldsymbol{R}}$ qui coincide avec l'extèrieur d'un ensemble compact dans un quadrant positif. Si F est une face du polyèdre Δ et m un point de l'intérieur (relatif) de F, nous posons:

$$\sigma_F = \bigcup_{r \geq 0} r(\Delta - m).$$

Le système

$$\Sigma_\Delta = \{\sigma_F \mid F \text{ une face de } \Delta\}$$

forme un éventail qui subdivise le premier quadrant. Alors on obtient une modification propre $X_{\Sigma_\Delta} \to \boldsymbol{R}^n$, notée par π_Δ, telle que:

$$\pi|_{X - \pi_\Delta^{-1}(0)} : X - \pi_\Delta^{-1}(0) \to \boldsymbol{R}^n - 0$$

est un isomorphisme.

3.7. Relèvement analytique.

Dans cette section nous nous proposons de démontrer l'analycité du relèvement de V (définie en 3.5) par une modification torique (définie en 3.6).

Comme dans la première section, on définit le système de poids $w^{\{j_1, \dots, j_n\}}$ correspondant aux sommets $b^{j_1}, \dots, b^{j_n}$ d'un simplexe d'une face compacte de dimension $n-1$ de $\Gamma(B)$. Le nombre des systèmes de poids est fini. On note ces systèmes

$$W^{\{1\}}, \dots, W^{\{r\}}.$$

En choisissant les coefficients de la matrice B suffisamment petits, on peut supposer que les systèmes de poids $W^{\{j\}}$ sont des vecteurs entiers. Notons Δ_o l'ensemble:

$$\{v = (v_1, \dots, v_n) \in M_R \mid \forall j = 1, \dots, r, \langle W^{\{j\}}, v\rangle \geq d, \text{ et } v_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Soit Σ une subdivision régulière de Σ_{Δ_o}. Pour $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in N$, on pose:

$$\ell(a) = \min\{\langle a, v\rangle \mid c_v \neq 0\},$$

$$\ell'(a) = \min\left\{\langle a, v\rangle \mid \frac{dc_v}{dt} \neq 0\right\},$$

$$\ell^{(i)}(a) = \min\{\langle a, v\rangle \mid c_v \neq 0, v_i \geq 1\},$$

$$m^{(i)}(a) = \min\{\{a_k b_k^k B(i) \mid k \neq i\} \cup \{a_i\}\},$$

$$l_d(a) = \min\{\langle a, v\rangle \mid v \in \Gamma_+(\rho^d)\},$$

$$\gamma_d(a) = \{v \in \Gamma_+(\rho^d) \mid \langle a, v\rangle = l_d(a)\},$$

où $B(i)$ désigne le poids de x_i relatif à la matrice de sommets commode B définie dans la premiére section. De toute évidence on a $\ell'(a) \geq \ell(a)$ et $\ell^{(i)}(a) \geq \ell(a)$. Soit $\sigma = \sigma(a^1, \dots, a^n)$ un cône régulier de Σ et soit $y = (y_1, \dots, y_n)$ un système de coordonnées de U_σ (copie de $\boldsymbol{R}^n$). Nous notons:

$$a_i = (a_i^1, \dots, a_i^n),$$

$$\ell = (\ell(a^1), \dots, \ell(a^n)),$$

$$\ell' = (\ell'(a^1), \dots, \ell'(a^n)),$$

$$\ell^{(i)} = (\ell^{(i)}(a^1), \dots, \ell^{(i)}(a^n)),$$

$$m^{(i)} = (m^{(i)}(a^1), \dots, m^{(i)}(a^n)) \quad \text{et}$$

$$l_d = (l_d(a^1), \dots, l_d(a^n)).$$

Alors on peut écrire:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y^{\ell'} \tilde{F}_t, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = y^{\ell^{(i)} - a_i} \tilde{F}_i, \quad \text{et} \quad \rho_i = y^{m^{(i)}} \tilde{\rho}_i.$$

Nous pouvons choisir s suffisamment grand pour que ρ_i^{2s} soit analytique et

$2sm^{(i)}$ soit un vecteur entier. Les fonctions $\tilde{F}_t$, $\tilde{F}_i$ et $\tilde{\rho}_i^{2s}$ sont analytiques pour (y,t) dans un voisinage de $\pi^{-1}(0) \times I$. Ainsi nous obtenons:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^{2s} = \sum_{i=1}^{n} y^{2s(\ell^{(i)} - a_i + m^{(i)})} \tilde{\rho}_i^{2s} \tilde{F}_i^{2s}.$$

Comme le polyèdre de Newton de P est au-dessus de $\Gamma_+(\rho^{2sd})$, on a:

$$P = y^{2sl_d} \tilde{P}$$

où $\tilde{P}$ est analytique pour (y,t) dans un voisinage de $\pi^{-1}(0) \times I$. Par l'hypothèse du théorème 3.3.1 sur la B-forme initiale $H_d(x,t)$ de f_t, $t \in I$, (i.e.: $H_d(x,t)$ vérifie la propriété $Q_B(d)$ quel que soit $t \in I$), on déduit que les coefficients de x^{2sdb^j} pour $j = 1, \dots, m$ dans l'expression de P sont non nuls (les b^j sont les sommets de $\Gamma_+(B)$). Finalement nous obtenons:

$$l_d(a^j) = \inf_{i=1,\dots,n} \{\ell^{(i)}(a^j) - a_i^j + m^{(i)}(a^j)\}. \tag{3.7.1}$$

LEMME 3.7.1. *Si l'ensemble*

$$\bigcap_{j=1}^{n} \gamma_d(a^j)$$

est non vide alors $\tilde{P}$ est strictement positif dans un voisinage de $\pi^{-1}(0) \times I$.

DÉMONSTRATION. La B-forme intiale de P est de degré $2sd$. Par l'hypothèse du théorème 3.3.1 sur la B-forme initiale $H_d(x,t)$ de f_t, $t \in I$, on déduit qu'il existe un réel c strictement positif tel que pour tout $t \in I$, on ait:

$$P(x,t) \geq c\rho^{2sd}(x). \tag{3.7.2}$$

Soit (y^o, t) un élément de $\pi^{-1}(0) \times I$, alors il existe un sous-ensemble Λ de $\{1, \dots, n\}$ tel que $y_j^o = 0$ pour tout $j \in \Lambda$, et $y_j^o \neq 0$ pour tout $j \notin \Lambda$. On pose

$$y_j = \begin{cases} \xi & \text{si } j \in \Lambda \\ y_j^o & \text{si } j \notin \Lambda. \end{cases}$$

Pour prouver le lemme il suffit de démonter que la limite de $\tilde{P}(y,t)$ quand ξ tend vers 0 est strictement positive. En effet, par l'inégalité 3.7.2, on a:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(y,t) &\gtrsim \frac{\sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k \in \Lambda} y_k^{\langle a^k, db^j \rangle} \right)^{2s}}{\prod_{k \in \Lambda} y_k^{2sl_d(a^k)}} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{k \in \Lambda} \xi^{\{\langle a^k, db^j \rangle - l_d(a^k)\}} \right)^{2s} \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\xi^{\sum_{k \in \Lambda} \{\langle a^k, db^j \rangle - l_d(a^k)\}})^{2s}. \end{aligned}$$

Du fait que la face

$$\gamma = \bigcap_{j=1}^{n} \gamma_d(a^j)$$

est non vide, il existe un entier $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ tel que $db^{j_0} \in \gamma$, donc on a:

$$\sum_{k \in \Lambda} \{\langle a^k, db^{j_0} \rangle - l_d(a^k)\} = 0.$$

Par conséquent, la fonction $\tilde{P}(y, t)$ est strictement positive dans un voisinage de $\pi^{-1}(0) \times I$. □

Nous allons maintenant écrire Q_i en fonction des variables y et t.

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial F}{\partial t} \left(\rho_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^{2s-1} \rho_i \\ &= y^{\ell' + (2s-1)(\ell^{(i)} - a_i + m^{(i)}) + m^{(i)}} \tilde{F}_t \tilde{F}_i^{2s-1} \tilde{\rho}_i^{2s}. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'exposant de y dans Q_i/P est

$$\ell' + (2s-1)(\ell^{(i)} - a_i + m^{(i)}) + m^{(i)} - 2sl_d,$$

qui est égal à

$$(\ell' - \ell) + (\ell - \ell^{(i)}) + 2s\{\ell^{(i)} - a_i + m^{(i)} - l_d\} + a_i. \tag{3.7.3}$$

Définition 3.7.2. Nous dirons que $a = {}^t(a_1, \dots a_n) \in N$ est i-bon si

$$\ell^{(i)}(a) > a_i - m^{(i)}(a) + l_d(a) \quad \text{ou si } \ell(a) = \ell^{(i)}(a).$$

Lemme 3.7.3. *Si $a = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ est i-bon et si s est suffisament grand, alors le réel*:

$$(\ell'(a) - \ell(a)) + (\ell(a) - \ell^{(i)}(a)) + 2s\{\ell^{(i)}(a) - a_i + m^{(i)}(a) - l_d(a)\}$$

est supérieur où égal à 0.

Démonstration. Si $\ell(a) = \ell^{(i)}(a)$, par l'égalité (3.7.1), nous avons l'inégalité suivante:

$$\ell^{(i)}(a) \geq a_i - m^{(i)}(a) + l_d(a).$$

Comme pour tout $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in N$, $\ell'(a)$ est supérieur ou égal à $\ell(a)$, nous avons l'inégalité du lemme. Si $\ell^{(i)}(a)$ est strictement supérieur à

$$a_i - m^{(i)}(a) + l_d(a),$$

on choisit s suffisamment grand pour avoir l'inégalité du lemme. □

LEMME 3.7.4. *Si la carte $\pi_\sigma : U_\sigma \to \boldsymbol{R}^n$ est décrite par:*

$$x_i = \begin{cases} y_i y_{k+1}^{a_i^{k+1}} \cdots y_n^{a_i^n} & si\ i = 1, \ldots, k \\ y_{k+1}^{a_i^{k+1}} \cdots y_n^{a_i^n} & si\ i = k+1, \ldots, n, \end{cases}$$

alors $y_{k+1}^{a_i^{k+1}} \cdots y_n^{a_i^n} (\partial/\partial x_i)$ possède un relèvement analytique sur U_σ.

DÉMONSTRATION. Par un calcul élémentaire, nous avons:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = y_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Nous en déduisons:

$$x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{cases} y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i} & \text{si } i = 1, \ldots, k \\ \sum_{j=1}^{n} b_i^j y_j \dfrac{\partial}{\partial y_j} & \text{si } i = k+1, \ldots, n, \end{cases}$$

où $(b_i^j)_{i,\, j=k+1,\ldots,n}$ est l'inverse de la matrice $(a_i^j)_{i,\, j=k+1,\ldots,n}$, ce qui termine la démonstration du lemme. □

On dit qu'un cône est *bon* si chaque face de dimension 1 est engendrée par un vecteur *i*-bon pour tout *i*, ou bien par un vecteur e^i. On dit qu'un éventail est bon si chacun de ses cônes est bon. Par conséquent, s'il existe une bonne subdivision régulière Σ de Σ_{Δ_o} et s suffisamment grand, le relèvement de V est analytique par une modification torique π correspondante à Σ. En effet, soit $\sigma = \sigma(e^1, \ldots, e^k, a^{k+1}, \ldots, a^n)$ un cône de Σ. Posons:

$$\pi'_\sigma = (\pi_\sigma \times id|_{(U_\sigma - \pi_\sigma^{-1}(0)) \times I})^{-1} \quad \text{et}$$

$$G_i(y,t) = \frac{\tilde{F}_t \tilde{F}_i^{2s-1} \tilde{\rho}_i^{2s}}{\tilde{P}(y,t)}, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Par le lemme 3.7.1, les fonctions $G_i(y,t)$ sont analytiques dans un voisinage de $\pi_\sigma^{-1}(0) \times I$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, nous notons $\xi^{(i)}$ le vecteur

$$(\ell' - \ell) + (\ell - \ell^{(i)}) + 2s\{\ell^{(i)} - a_i + m^{(i)} - l_d\}.$$

Nous avons le relèvement:

$$d\pi'_\sigma V = \sum_{i=1}^{n} -y^{\xi^{(i)}} G_i(y,t)\, d\pi_\sigma\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Par le lemme 3.7.3 et l'inégalité (10.1) on a

$$\xi_j^{(i)} \geq \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \text{ ou } j > k \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A l'aide du lemme 3.7.4, on peut voir que le prolongement de $d\pi'_\sigma V$ est analytique dans un voisinage de $\pi^{-1}(0) \times I$.

Le relèvement de V est analytique et tangent aux niveaux de surface $F \circ (\pi \times \mathrm{id}_I)$ et $d\pi'_\sigma V(0,t) = \partial/\partial t$. Comme la modification torique π est un isomorphisme en dehors de l'origine, les trajectoires du champ de vecteur définissent un homéomorphisme préservant les t-niveaux, entre deux voisinages de $\{0\} \times I$. Ceci complète la preuve. Il nous reste à montrer qu'il existe une bonne subdivision.

3.8. Bonne subdivision.

Nous allons d'abord démontrer deux lemmes, qui, associés aux lemmes de Oka nous permettront d'obtenir une bonne subdivision.

Lemme 3.8.1. *Soit a^1 et a^2 deux vecteurs i-bons. Supposons que l'intersection de deux faces $\gamma_d(a^1)$ et $\gamma_d(a^2)$ est non vide. Alors pour tous réels c_1 et c_2 strictement positifs, le vecteur*

$$a = c_1 a^1 + c_2 a^2$$

est i-bon.

Démonstration. Nous avons:

$$\ell^{(i)}(a) \geq c_1 \ell^{(i)}(a^1) + c_2 \ell^{(i)}(a^2),$$

$$\ell(a) \geq c_1 \ell(a^1) + c_2 \ell(a^2) \quad \text{et}$$

$$m^{(i)}(a) \geq c_1 m^{(i)}(a^1) + c_2 m^{(i)}(a^2).$$

Par le fait que $\gamma_d(a^1) \cap \gamma_d(a^2)$ est non vide, on a:

$$l_d(a) = c_1 l_d(a^1) + c_2 l_d(a^2).$$

Si on suppose que $\ell^{(i)}(a)$ est égal à $a_i - m^{(i)} + l_d(a)$, on obtient par ce qui précède et par l'égalité 3.7.1:

$$\begin{aligned}
\ell^{(i)}(a) &= a_i - m^{(i)} + l_d(a) \\
&\leq c_1 a_i^1 + c_2 a_i^2 - c_1 m^{(i)}(a^1) - c_2 m^{(i)}(a^2) + c_1 l_d(a^1) + c_2 l_d(a^2) \\
&\leq c_1 \ell^{(i)}(a^1) + c_2 \ell^{(i)}(a^2).
\end{aligned}$$

Mais comme a^1 et a^2 sont i-bons, nous obtenons:

$$\ell^{(i)}(a) = c_1 \ell^{(i)}(a^1) + c_2 \ell^{(i)}(a^2) = c_1 \ell(a^1) + c_2 \ell(a^2),$$

ce qui implique que:

$$\ell^{(i)}(a) = \ell(a). \qquad \square$$

LEMME 3.8.2. *Soit a un vecteur i-bon, si l'ensemble* $\gamma_d(e^j) \cap \gamma_d(a)$ *est non vide, alors pour tout réel* $0 \leq c < 1$ *le vecteur*

$$b = ce^j + a$$

est i-bon.

DÉMONSTRATION. De toute évidence, on a:

$$l_d(e^j) = m^{(i)}(e^j) = 0.$$

Donc e^j est i-bon si j est différent de i. Par le lemme 3.8.1, il ne nous reste que le cas où j est égal à i. En effet, supposons que e^i n'est pas i-bon. On a alors

$$\ell^{(i)}(e^i) = 1 \quad \text{et} \quad \ell(e^i) = 0.$$

Si on suppose que $\ell^{(i)}(b)$ est égal à $b_i - m^{(i)}(b) + l_d(b)$, nous obtenons, par un raisonnement similaire à celui de la démonstration du lemme précédent:

$$\begin{aligned} \ell^{(i)}(b) &= b_i - m^{(i)}(b) + l_d(b) \\ &\leq c - cm^{(i)}(e^i) + cl_d(e^i) + a_i - m^{(i)}(a) + l_d(a) \\ &\leq c + \ell^{(i)}(a). \end{aligned}$$

Or le vecteur a est i-bon, ce qui donne:

$$\ell^{(i)}(b) = c\ell^{(i)}(e^i) + \ell^{(i)}(a) = c + \ell^{(i)}(a) = c + \ell(a),$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} \ell(b) &\geq c\ell(e^i) + \ell(a) \\ &= \ell^{(i)}(b) - c. \end{aligned}$$

Le réel c est donc supérieur où égal à $\ell^{(i)}(b) - \ell(b)$, mais comme c est aussi strictement inférieur à 1, les entiers $\ell^{(i)}(b)$ et $\ell(b)$ sont égaux. $\square$

LEMME 3.8.3 (Oka [**13**]). *Soit* $\sigma = \sigma(P_1, \dots, P_{k+1})$ *un cône, où les* P_i *sont des vecteurs entiers primitifs. Supposons de plus que* $\det(P_1, \dots, P_{k+1}) = c > 1$ *et* $\det(P_1, \dots, P_k) = 1$. *Alors il existe des uniques entiers* $0 \leq c_1, \dots, c_k < c$ *tels que* $R = 1/c(P_{k+1} + \sum_1^k c_i P_i)$ *soit un vecteur entier. Le fait que les entiers* c_i *soient positifs implique que* R *appartient au cône* σ.

Soit $\sigma = \sigma(P_1, \dots, P_n)$ un cône et soit J un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. On note alors σ_J le cône engendré par $\{P_j \mid j \in J\}$. Si J_1 et J_2 sont des sous-ensembles disjoints de $\{1, \dots, n\}$, on note:

$$\sigma_{J_1} * \sigma_{J_2} = \sigma_{J_1 \cup J_2}.$$

LEMME 3.8.4 (Oka [**3**]). *Soit $\sigma = \sigma(P_1, \dots, P_n)$ un cône et soit J un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$. Supposons que σ_J est un cône non régulier et soit S_J une subdivision régulière de σ_J. Alors pour tout cône $\tau \in S_J$ de dimension $|J|$ nous avons*

$$\det(\tau * \sigma_{J^c}) < \det(\sigma).$$

Les vecteurs $W^{\{j\}}$, $j = 1, \dots, r$, définis en 3.7, sont i-bons quel que soit $i = 1, \dots, n$. En effet, par construction de $B(i)$ et $W^{\{j\}}$, nous avons:

$$W_k^{\{j\}} b_k^k B(i) \geq B(i) \geq W_i^{\{j\}}, \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

on obtient alors:

$$m^{(i)}(W^{\{j\}}) = W_i^{\{j\}}, \quad \forall j = 1, \dots, r$$

le fait que:

$$l_d(W^{\{j\}}) = \ell(W^{\{j\}}) = d, \quad \forall j = 1, \dots, r.$$

Donc si $\ell^{(i)}(W^{\{j\}})$ est égal à $W_i^{\{j\}} - m^{(i)}(W^{\{j\}}) + l_d(W^{\{j\}})$, nous obtenons l'égalité suivante:

$$\ell^{(i)}(W^{\{j\}}) = l_d(W^{\{j\}}) = \ell(W^{\{j\}}) = d.$$

On a une subdivision de Σ_{Δ_o} par les cônes suivant:

$$\sigma = \operatorname{cone}(e^1, \dots, e^k, W^{\{k+1\}}, \dots, W^{\{n\}}), \quad \text{pour } k < n.$$

Il vérifient la propriété:

$$\bigcap_{j=1}^{k} \gamma_d(e^j) \bigcap_{j=k+1}^{n} \gamma_d(W^{\{j\}}) \neq \emptyset.$$

Si le volume de σ (i.e.: le plus grand diviseur commun de l'ensemble des déterminants des matrices mineures) est strictement supérieur à 1, alors il existe un entier t strictement supérieur à k tel que le cône σ_J engendré par e^s, $s = 1, \dots, k$, et $W^{\{s\}}$, $s = k, \dots, t$, soit de volume strictement supérieur à 1 et le cône engendré par e^s, $s = 1, \dots, k$ et $W^{\{s\}}$, $s = k, \dots, t-1$, soit de volume exactement 1.

Par les lemmes 3.8.1, 3.8.2 et 3.8.3, il existe un vecteur R qui est i-bon pour tout $i = 1, \dots, n$. Le cône σ_J peut être subdivisé par les cônes σ_J^j, $j = 1, \dots, t$, où σ_J^j est engendré par R, e^s, $s = 1, \dots, k$, et $W^{\{s\}}$, $s = k, \dots, t$, excepté e^j ou $W^{\{j\}}$, qui est de volume inférieur strictement au volume de σ_J. Donc par une récurrence sur le volume de σ_J, il existe une bonne subdivision régulière S_J de σ_J .

Mais σ admet une subdivision par les cônes $\tau * \sigma_{J^c}$, où $\tau \in S_J$. Par le lemme 3.8.4, le volume de $\tau * \sigma_{J^c}$ est inférieur strictement au volume de σ. Donc par récurrence sur le volume de σ, le cône σ admet une bonne subdivision régulière. On obtient donc une bonne subdivision régulière Σ de Σ_{Δ_o}.

References

[1] J. Bochnak and T.-C. Kuo, Different realization of a non sufficient jet, Inadg. Math., **34** (1972), 24–31.
[2] J. Bochnak and S. Łojasiewicz, A converse of the Kuiper-Kuo theorem, Proc. Liverpool Singularities Sympos. I, Lecture Notes in Math., Vol. 192, Springer, Berlin-New York, 1971, 254–261.
[3] T. Fukui and L. Paunescu, Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs, J. Math. Soc. Japan., Vol. 52, No. 2, (2000), 433–446.
[4] T. Fukui and E. Yoshinaga, The modified analytic trivialization of family of real analytic functions, Invent. Math., **82** (1985), 467–477.
[5] A. G. Kouchnirenko, Polèydres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math., **32** (1976), 1–31.
[6] T.-C. Kuo, On C^0-sufficiency of jets of potential functions, Topology, **8** (1969), 167–171.
[7] T.-C. Kuo, Computation of Łojasiewicz Exponent of $f(x, y)$, Comment. Math. Helv., (1974), 201–213.
[8] T.-C. Kuo, The modified analytic trivialization of singularities, J. Math. Soc. Japan., **32** (1980), 605–614.
[9] N. Kuiper, C^1-equivalence of function near isolated critical points, Symposium on Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge 1967), Ann. of Math. Stud., No. 69, Princeton University Press, Princeton, NJ, **98** (1972), 199–218.
[10] H. Levine, Singularities of differentiable mappings. Proc. of Liverpool Singularities Symposium I, Lectures Notes in Math., **192** (1971), 1–90 Springer.
[11] S. Łojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, Lectures Notes IHES (Bures-sur-Yvette), 1965.
[12] J. Milnor, Singular points of Complex Hypersurfaces, Ann. of Math. Stud., 61, Princeton Univ. Press, 1968.
[13] M. Oka, Non-Degenerate Complete Intersection Singularity, HERMANN (1997), Actualités Math., 98–99.
[14] L. Paunescu, A weighted version of the Kuiper-Kuo-Bochnak-Łojasiewicz theorem, J. Algebraic Geom., **2** (1993), 69–79.
[15] F. Takens, A Note on Sufficiency of Jets, Invent. Math., **13** (1971), 225–231.

Ould M. ABDERRAHMANE
Département de Mathématiques
Université d'Angers
2, bd Lavoisier
49045 Angers cedex 01
France
E-mail: ould@tonton.univ-angers.fr