J. Math. Soc. Japan
Vol. 58, No. 2, 2006

Polynôme de Bernstein-Sato générique local

By Rouchdi BAHLOUL

(Received Dec. 20, 2004)
(Revised Jun. 8, 2005)

Résumé. Étant donnée une famille de fonctions analytiques en $0 \in \boldsymbol{C}^n$ paramétrée par un espace lisse, nous étudions le polynôme de Bernstein de la fibre sur une variété irréductible V de l'espace des paramètres et nous montrons qu'il est génériquement constant. Nous montrons que ce polynôme b satisfait une équation fonctionnelle générique sur V et l'on dérive une stratification constructible de l'espace des paramètres par le polynôme de Bernstein de la fibre. Lorsque l'hypersurface admet génériquement une singularité unique en $0 \in \boldsymbol{C}^n$ nous montrons que b est le polynôme de Bernstein générique au sens de Briançon-Geandier-Maisonobe. Les outils utilisés sont une généralisation formelle d'un algorithme de Oaku calculant le polynôme de Bernstein local et les bases standard génériques récemment étudiées par l'auteur.

Introduction et motivations.

Le polynôme de Bernstein (ou b-fonction) a été introduit de manière indépendante par I. N. Bernstein [**Ber72**] et M. Sato [**SS72**]. Son existence a été démontrée par Bernstein dans le cas polynomial et par J. E. Björk [**Bjö73**] dans le cas analytique et formel (voir aussi [**Bjö79**]) ainsi que par M. Kashiwara [**Kas76**] qui démontra en plus la rationalité des racines du polynôme de Bernstein analytique. Dans le cas de plusieurs fonctions analytiques, l'existence de polynômes de Bernstein revient à C. Sabbah ([**Sab87a**], [**Sab87b**], voir aussi [**Gyo93**] et [**Bah05**]). Ici, nous nous intéressons au polynôme de Bernstein d'une fonction analytique dépendant de paramètres.

On sait depuis les travaux de D. T. Lê et C. P. Ramanujam [**Lê73**], [**LR76**] qu'une déformation à nombre de Milnor μ constant d'une singularité isolée d'hypersurface conserve son type topologique ainsi que la classe de conjugaison de sa monodromie locale. Ceci combiné aux travaux de B. Malgrange [**Mal74**] liant la monodromie et les racines du polynôme de Bernstein local nous dit que les racines de ce dernier restent inchangées modulo $\boldsymbol{Z}$. Cependant ses racines ne sont pas constantes (voir par exemple T. Yano [**Yan78**]).

F. Geandier [**Gea89**], [**Gea91**] a étudié de manière étendue le polynôme de Bernstein associé à une déformation à un paramètre d'une hypersurface à singularité isolée avec une étude du polynôme de Bernstein générique et relatif (ou "en famille"). J. Briançon, F. Geandier et Ph. Maisonobe [**BGM92**] ont généralisé et complété l'étude précédente au cas de plusieurs paramètres, toujours dans le cas d'une déformation d'une singularité isolée.

Dans [**BGMM89**], J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi ont

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32S30; Secondary 16S32, 13P99.

Key Words and Phrases. polynôme de Bernstein-Sato, déformations de singularités, bases standard paramétriques.

donné un algorithme de calcul du polynôme de Bernstein pour une fonction semi-quasi-homogène ou non dégénérée au sens de Kouchnirenko. C'est aussi là que la notion de polynôme de Bernstein générique fut introduite avec le calcul exact dans le cas d'une déformation semi-universelle à deux variables. Dans le même esprit, citons également les travaux de P. Cassou-Noguès [**Cas86**], [**Cas87**], [**Cas88**].

T. Oaku [**Oak97b**] a donné un algorithme (sans conditions) de calcul du polynôme de Bernstein local et global associé à un polynôme. Ces algorithmes sont basés sur les bases de Gröbner dans des anneaux d'opérateurs différentiels polynomiaux. Dans [**Oak97a**], il a initié une étude paramétrique de ses algorithmes. Ceci a permis à A. Leykin [**Ley01**] d'obtenir un résultat de constructibilité concernant le polynôme de Bernstein global pour un polynôme dépendant de paramètres (voir aussi [**BM02**] et [**Bah03a**]).

Ce rappel historique (non exhaustif) étant fait, introduisons le présent travail.

On fixe deux entiers $n, m > 0$. Pour commencer, considérons une fonction polynomiale $f = f(x, y) \in \boldsymbol{k}[x, y]$ où $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le système de variables principales et $y = (y_1, \dots, y_m)$ est vu comme paramètre (et $\boldsymbol{k}$ est un corps de caractéristique zéro). Il est bien connu que le polynôme de Bernstein générique global est non nul (voir Biosca [**Bio96a**], [**Bio96b**] pour $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{C}$, [**Bah03b**] en général). De plus nous savons qu'il est égal au polynôme de Bernstein usuel de f vu dans $\mathrm{Frac}(\boldsymbol{k}[y])[x]$ et nous savons enfin qu'il est égal au polynôme de Bernstein de la fibre générique (voir [**Ley01**], voir aussi [**BM02**] et [**Bah03a**]).

Plus généralement on peut considérer le polynôme de Bernstein de la classe $(f)_{\mathscr{Q}}$ de f modulo un idéal premier $\mathscr{Q} \subset \boldsymbol{k}[y]$, vue dans $\mathrm{Frac}(\boldsymbol{k}[y]/\mathscr{Q})[x]$ (ce que, dans [**Bah03b**], nous avons appelé polynôme de Bernstein générique de f sur $V(\mathscr{Q}) \subset \mathrm{Spec}(\boldsymbol{k}[y])$) et l'on montre alors que d'une part il satisfait une équation fonctionnelle "générique" ([**Bah03b**]) et d'autre part c'est le polynôme de Bernstein de la fibre générique sur $V(\mathscr{Q})$ (voir les trois références ci-dessus).

Maintenant si f est un germe de fonction analytique dans $\boldsymbol{C}\{x, y\}$, nous pouvons faire une construction similaire: voir f dans $\mathscr{C}[[x]]$ avec $\mathscr{C} = \boldsymbol{C}\{y\}$ et considérer le polynôme de Bernstein formel de f vu dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{C})[[x]]$ (dont l'existence est assurée par [**Bjö73**]). Plus généralement, étant donné $\mathscr{Q} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, on voit f dans $\mathscr{C}[[x]]$, on considère sa classe modulo $\mathscr{Q}$ que l'on voit dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{C}/\mathscr{Q})[[x]]$ et enfin on prend son polynôme de Bernstein formel b. Avec ce polynôme b, a-t-on des résultats similaires à ceux du cas global rappelés ci-dessus ? Nous savons que les choses sont plus complexes dans le cas local puisque par exemple, le polynôme de Bernstein générique n'existe pas toujours (Biosca [**Bio96a**], [**Bio96b**]). Le but du présent travail est de mieux comprendre le rôle joué par b. Bien qu'il soit défini de manière algébrique, nous montrons qu'il a un rôle géométrique naturel et nous faisons le lien avec le travail de Briançon et al. [**BGM92**].

NOTE. Dans la suite, pour plus de généralité et aussi pour adhérer aux notations généralement utilisées, nous travaillerons sur un polydisque compact $Z = X \times Y \subset \boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^m$ (X pouvant être nul). Si $\mathscr{O}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur $\boldsymbol{C}^{n+m}$ alors on notera $\mathscr{O}_Z$ les sections globales du faisceau $\mathscr{O}_{|Z}$ restreint à Z. L'anneau $\mathscr{O}_Z$ est noethérien (Frisch, [**Fri67**]). Cette noethérianité nous sera nécessaire pour terminer la preuve du théorème principal. Dans la suite, nous n'aurons pas besoin de réduire le diamètre des polydisques sauf celui de Y dans la démonstration du corollaire 2 et de la remarque 1(c) (nous n'en ferons pas mention explicite).

Remerciements. Je remercie Michel Granger qui, en fevrier 2004, m'a aidé à trouver une erreur dans une version préliminaire ainsi que pour des discussions éclairantes. Ce travail est effectué dans le cadre d'une bourse post-doctorale FY2003 de la JSPS.

1. Énoncé des résultats principaux.

Soient $X \subset \boldsymbol{C}^n$ et $Y \subset \boldsymbol{C}^m$ des polydisques compactes centrés en 0, $Z = X \times Y$ et f une fonction analytique sur Z telle que l'hypersurface $W = f^{-1}(0) \subset Z$ contienne 0. Pour $y \in Y$, W_y est l'hypersurface de X définie par $f_y : x \mapsto f(x, y)$.

$\mathscr{D}_{Z/Y}$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels relatifs. C'est le sous anneau de $\mathscr{D}_Z$ constitué d'opérateurs sans dérivation par rapport aux y_i. Suivant [**BM02**], introduisons $\boldsymbol{C}\langle s, \partial_t\rangle$ l'algèbre $\boldsymbol{C}[s, \partial_t]$ modulo la relation $\partial_t s = s\partial_t - \partial_t$ et $\mathscr{D}_Z\langle s, \partial_t\rangle = \mathscr{D}_Z \otimes \boldsymbol{C}\langle s, \partial_t\rangle$. Si t désigne une nouvelle variable alors l'identification $s = -\partial_t t$ fournit les inclusions d'anneaux: $\mathscr{D}_Z[s] \subset \mathscr{D}_Z\langle s, \partial_t\rangle \subset \mathscr{D}_{Z\times\boldsymbol{C}}$. Cette identification provient du fait que le module libre $\mathscr{O}_Z[1/f, s] \cdot f^s$ est un $\mathscr{D}_{Z\times\boldsymbol{C}}$-module et que l'action de s coïncide avec celle de $-\partial_t t$ (voir Malgrange [**Mal74**]).

Soit $\mathscr{C} = \mathscr{O}_Y$ (l'anneau des paramètres) et $\mathscr{Q} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{C})$. On voit f dans $\mathscr{C}[[x]]$ et on note $[f]_{\mathscr{Q}} \in (\mathscr{C}/\mathscr{Q})[[x]]$ la série obtenue en prenant la classe modulo $\mathscr{Q}$ des coefficients de f. Enfin, on note $(f)_{\mathscr{Q}}$ la série précédente vue dans $\operatorname{Frac}(\mathscr{C}/\mathscr{Q})[[x]]$.

Théorème 1. *Soit $b(s) \in \operatorname{Frac}(\mathscr{C}/\mathscr{Q})[s]$ le polynôme de Bernstein (formel) de $(f)_{\mathscr{Q}}$ alors*:

- (i): *$b(s)$ est à racines rationnelles.*
- (ii): *$b(s)$ est le polynôme unitaire de plus bas degré dans $\boldsymbol{C}[s]$ tel qu'il existe $h(x, y) \in \mathscr{O}_Z$ tel que*

$$\begin{cases} h(x,y) \cdot b(s) f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s] \cdot f^{s+1} + \mathscr{Q} \cdot \mathscr{D}_{Z/Y}\langle s, \partial_t\rangle \cdot f^s \\ \textit{avec } h(0,y) \in \mathscr{O}_Y \smallsetminus \mathscr{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

- (iii): *Il existe $h' \in \mathscr{O}_Y \smallsetminus \mathscr{Q}$ tel que pour tout $y \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h')$, $b(s)$ est le polynôme de Bernstein local (en $x = 0$) de f_y.*

Remarque 1.

- (a) Le polynôme de Bernstein b_g d'un $g \in \boldsymbol{k}[[x]]$ ($\boldsymbol{k}$ étant un corps de caractéristique nulle) est non nul (Björk [**Bjö73**]) ainsi notre polynôme $b(s)$ est non nul. Par contre le fait que b_g soit à racines rationnelles est à notre connaissance une question ouverte donc le point (i) du théorème nécessite une démonstration.
- (b) Dans (ii), la spécialisation en $y_0 \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h(0, y))$ fait de $b(s)$ un polynôme de Bernstein de f_{y_0}. D'après (iii), c'est en fait le polynôme de Bernstein de f_{y_0} si de plus $h'(y_0) \neq 0$.
- (c) La relation (1) est en général fausse si l'on remplace $\mathscr{D}_{Z/Y}\langle s, \partial_t\rangle$ par $\mathscr{D}_{Z/Y}[s]$ (voir la démonstration en section 2).

(d) Supposons $\mathscr{Q} = (0)$. Le point (ii) établit le fait que le polynôme $b(s)$ (polynôme de Bernstein formel de f vue dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{O}_Y)[[x]]$) est solution de l'équation (1) (et c'est en fait dans $\boldsymbol{C}[s]$ le générateur de l'idéal des solutions). Dans [**Bio96b**, Section 2.7], H. Biosca se pose le problème inverse. Elle se donne l'équation (1) et en cherche une solution (en fait elle travaille avec plusieurs fonctions f_j) et elle montre qu'un itéré d'un polynôme de Bernstein absolu local en $(x, y) = 0$ est une solution. En conséquence de (ii), nous obtenons: il existe $N \in \boldsymbol{N}$ tel que le polynôme $b(s)$ divise $b_f(s) \cdots b_f(s+N)$ ce qui au passage implique le point (i) de notre théorème (grâce à [**Kas76**]). Ici b_f est le polynôme de Bernstein (absolu) de f.

(e) D'un point de vue géométrique, $b(s)$ n'est intéressant que si f n'est pas génériquement lisse sur $V(\mathscr{Q})$ sinon d'après (iii): $b(s) = s + 1$ si $f_y(0) = 0$ pour y générique dans $V(\mathscr{Q})$ et $b(s) = 1$ sinon.

Si f est polynomiale, nous pouvons préciser le point (ii) du théorème précédent. De façon plus générale, soit $\mathscr{C}$ un anneau commutatif, intègre, unitaire et contenant les nombres rationnels et soit $f \in \mathscr{C}[x]$ (c'est le cadre de [**Bah03b**]). Notons $\boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})$ l'algèbre de Weyl au dessus de $\mathscr{C}$ et posons $\boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t\rangle = \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C}) \otimes_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{Q}\langle s, \partial_t\rangle$. Pour $\mathscr{Q} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, considérons $(f)_{\mathscr{Q}}$ qui est donc dans $\mathrm{Frac}(\mathscr{C}/\mathscr{Q})[x]$. Puisque $\mathrm{Frac}(\mathscr{C}/\mathscr{Q})$ est de caractéristique nulle (car $\boldsymbol{Q}$ est inclus dans $\mathscr{C}$), $b(s)$ le polynôme de Bernstein formel de $(f)_{\mathscr{Q}}$ est à racines rationnelles (voir [**Bri**], voir aussi [**Bah03b**]).

PROPOSITION 1. *Le polynôme $b(s)$ est le polynôme unitaire de plus bas degré dans $\boldsymbol{C}[s]$ tel que*

$$\begin{cases} h(x) \cdot b(s) f^s \in \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})[s] \cdot f^{s+1} + \mathscr{Q} \cdot \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t\rangle \cdot f^s \\ \textit{avec } h(x) \in \mathscr{C}[x] \textit{ et } h(0) \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}. \end{cases} \tag{2}$$

REMARQUE 2. Notons $b_{glob}(s)$ le polynôme de Bernstein global de $(f)_{\mathscr{Q}}$ alors c'est le polynôme unitaire de plus bas degré dans $\boldsymbol{C}[s]$ réalisant

$$\begin{cases} h \cdot b_{glob}(s) f^s \in \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})[s] \cdot f^{s+1} + \mathscr{Q} \cdot \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t\rangle \cdot f^s \\ \text{avec } h \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}. \end{cases} \tag{3}$$

Autrement dit, c'est le polynôme de Bernstein générique global de f sur $V(\mathscr{Q})$ ce qui complète [**Bah03b**].

Revenons à la situation de départ : $f \in \mathscr{O}_{X\times Y}$. Comme conséquence du théorème 1, nous obtenons le résultat de constructibilité suivant:

COROLLAIRE 1. *La partition de Y définie par le polynôme de Bernstein de f_y est constructible.*

Voici le dernier des principaux résultats que nous démontrerons.

COROLLAIRE 2. *Supposons que génériquement sur $V(\mathscr{Q})$, le lieu singulier relatif de f se projette sur 0 par la projection canonique $Z \to X$. Alors le polynôme $b(s)$ du* *théorème* 1 *est le polynôme unitaire de plus bas degré dans* $\boldsymbol{C}[s]$ *pour lequel il existe* $H \in \mathscr{O}_Y \smallsetminus \mathscr{Q}$ *tel que*:

$$H(y) \cdot b(s) f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s] \cdot f^{s+1} + \mathscr{Q} \cdot \mathscr{D}_{Z/Y}\langle s, \partial_t \rangle \cdot f^s. \tag{4}$$

Si $\mathscr{Q} = (0)$, cela nous dit que $b(s)$ est le polynôme de Bernstein générique de f au sens de Briançon et al. [**BGM92**]. Remarquons cependant que dans ce corollaire, on ne suppose rien sur f_0. On est donc en dehors du cadre étudié dans loc. cit.

Pour finir, décrivons la structure de l'article. Dans un premier temps (section 2), nous démontrons la proposition 1 et la remarque 2. Nous démontrons aussi les corollaires 1 et 2 et l'assertion (c) de la remarque 1 supposant aquis le théorème 1. Le reste du papier est consacré à le démontrer. Nous rappelons (section 3) ce qui nous sera nécessaire concernant les bases standard génériques [**Bah04**], puis nous donnons (section 4) un algorithme (infini) de calcul du polynôme de Bernstein formel pour $f \in \boldsymbol{k}[[x]]$ (il s'agit d'une généralisation d'un algorithme de T. Oaku [**Oak97b**]). En section 5, nous débutons la preuve du Théorème 1 qui consiste à suivre l'algorithme pas à pas. Une première étape consiste en l'élimination de variables globales que sont ∂_t et les ∂_{x_i}, la seconde, plus technique, est une "élimination" des variables locales x_i. À la fin de la première étape nous serons en mesure de démontrer (i) puis (iii). La dernière section est consacrée à la preuve de (ii); cela passe par l'établissement d'une relation fonctionnelle générique formelle puis un "passage du formel à l'analytique" inspiré de [**BM90**].

2. Premières démonstrations.

Ici nous démontrons des résultats dont la preuve est indépendante du reste du papier: la proposition 1, la remarque 2; et supposant acquis le théorème 1, les deux corollaires ainsi que le (c) de la remarque 1.

Démonstration de la proposition 1. Si $c(s) \in \boldsymbol{C}[s]$ satisfait (2) alors il est un polynôme de Bernstein local de $(f)_{\mathscr{Q}}$ et est donc multiple de $b(s)$ donc il suffit de montrer que $b(s)$ satisfait (2). Il est bien connu que le polynôme de Bernstein formel d'un polynôme $g \in \boldsymbol{k}[x]$ est le plus petit polynôme unitaire tel que $q(x)b(s)g^s \in \boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{k})[s]g^{s+1}$ avec $q(x) \in \boldsymbol{k}[x]$ et $q(0) \neq 0$ (voir par exemple [**BM90**]). Appliquons ceci à $(f)_{\mathscr{Q}} \in \mathscr{F}(\mathscr{Q})[x]$. En conséquence, il existe $c \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$, $q' \in \mathscr{C}[x]$ avec $q(0) \notin \mathscr{Q}$ et $P \in \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})[s]$ tels que: $(c \cdot q'(x) \cdot b(s) - Pf)_{\mathscr{Q}} \cdot ((f)_{\mathscr{Q}})^s = 0$.

Posons $U = c \cdot q'(x) \cdot b(s) - Pf \in \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})[s]$ et notons I' l'idéal de $\boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t \rangle$ engendré par $s + f(x)\partial_t$ et $\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t$ pour $i = 1, \ldots, n$. Son spécialisé $(I')_{\mathscr{Q}} \subset \boldsymbol{A}_n(\mathscr{F}(\mathscr{Q}))\langle s, \partial_t \rangle$ est l'annulateur de $(f)^s_{\mathscr{Q}}$ (voir [**BM02**]). Ainsi $(U)_{\mathscr{Q}} \in (I')_{\mathscr{Q}}$. Écrivons $(U)_{\mathscr{Q}} = \sum_j u_j \cdot (m_j)_{\mathscr{Q}}$ avec $m_j \in I'$. Dans cette écriture, on relève les u_j, on chasse les dénominateurs et on obtient l'existence de $c' \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$ tel que

$$cc' \cdot q'(x) \cdot b(s) \in \boldsymbol{A}_n(\mathscr{C})[s]f + I' + \boldsymbol{A}_n(\mathscr{Q})\langle s, \partial_t \rangle.$$

En appliquant cet opérateur à f^s, nous obtenons la relation voulue ce qui démontre la proposition. $\square$

Pour la remarque 2, les arguments sont tout à fait similaires. Nous laissons les détails au lecteur. Maintenant supposons acquis le théorème 1 et commençons par une.

Esquisse de preuve du Corollaire 1. On montre que pour tout fermé de Zariski V de Y, on a une stratification $V = \cup W$ en espaces localement fermés telle que sur chaque strate le polynôme de Bernstein de f_y est constant. Cela se fait par récurrence sur la dimension de V (le résultat étant trivial si $\dim V = 0$). On écrit $V = V(\mathscr{Q}_1) \cup \cdots \cup V(\mathscr{Q}_p)$ comme réunion de ses composantes irréductibles et on applique le (iii) du Théorème 1 à chacun des idéaux premiers $\mathscr{Q}_i$, on note h_i le h' obtenu. On a alors $V = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = \cup(V(\mathscr{Q}_i) \smallsetminus V(h_i))$ et sur chaque strate de V_1 le polynôme de Bernstein est constant. On applique l'hypothèse de récurrence à $V_2 = \cup(V(\mathscr{Q}_i) \cap V(h_i))$ qui est de dimension strictement inférieure à $\dim V$. □

Maintenant, démontrons le corollaire 2.

Démonstration. Cette preuve s'inspire de celle de [**BGM92**, Proposition 1.4]. Pour démontrer le corollaire, il suffit de montrer que $b(s)$ satisfait (4). Notons J l'idéal de $\mathscr{O}_Z$ engendré par f et les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Par hypothèse, il existe $h_0 \in \mathscr{O}_Y \smallsetminus \mathscr{Q}$ tel que pour tout $y_0 \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0)$, $V(J_{|y_0}) = \{0\} \subset X$. Par conséquent, $V(J + \mathscr{O}_Z \cdot \mathscr{Q}) \smallsetminus V(\mathscr{O}_Z \cdot h_0) \subset \{0\} \times V(\mathscr{Q})$. Autrement dit

$$V\big(\sqrt{J + \mathscr{O}_Z \cdot \mathscr{Q}} : h_0\big) \subset \{0\} \times V(\mathscr{Q}).$$

Ainsi le lieu des zéros de $(\sqrt{J + \mathscr{O}_Z \cdot \mathscr{Q}} : h_0)$ et de h (celui de (ii) dans le Théorème 1) est inclus dans le lieu des zéros de $h(0, y)$. Ainsi, pour $l \in \boldsymbol{N}$ assez grand, $h_1 := h(0, y)^l$ est dans l'idéal $(\sqrt{J + \mathscr{O}_Z \cdot \mathscr{Q}} : h_0) + \mathscr{O}_Z \cdot h$. On constate alors que pour un certain $k \in \boldsymbol{N}$, $H := (h_0 h_1)^k$ appartient à l'idéal $J + \mathscr{O}_Z \cdot \mathscr{Q} + \mathscr{O}_Z \cdot h$. Notons que $H \in \mathscr{O}_Z \smallsetminus \mathscr{Q}$. Maintenant, puisque $f_y(0) = 0$ pour y générique dans $V(\mathscr{Q})$ alors $b(s)$ est multiple de $(s + 1)$. Ainsi, si l'on note $b(s) = (s + 1)\tilde{b}(s)$, on a pour tout i,

$$b(s)\frac{\partial f}{\partial x_i} f^s = \tilde{b}(s)\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f^{s+1}.$$

De cette équation et de la relation (1), on obtient la relation désirée (4). □

Pour finir, démontrons l'assertion (c) de la remarque 1.

Démonstration. Soit f une fonction analytique de $n + 1$ variables complexes $x_1, \ldots, x_n, y$. Supposons que l'hypothèse du corollaire 2 soit vérifiée pour $\mathscr{Q} = (0)$. De plus supposons que le nombre de Milnor de f_0 soit différent de celui de f_{y_0} pour $y_0 \neq 0$ proche de 0. Par exemple, on peut prendre $f = x_1^2 + y x_2^2 + x_2^3$. Sur cet exemple, on a $V\big(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\big) = \{(0, 0)\} \times \boldsymbol{C}$. Appliquons le corollaire 2 à $\mathscr{Q} = (0)$:

$$H(y) \cdot b(s) f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s] \cdot f^{s+1}. \qquad (\star)$$

Quitte à multiplier cette relation par une unité de $\mathscr{O}_{Y,0}$ on peut supposer que $H(y) = y^N$ pour un certain entier N. Maintenant appliquons l'assertion (ii) du théorème 1 à $\mathscr{Q} = (y)$.

Notons $b_0(s)$ le polynôme de Bernstein en question et (par l'absurde) supposons fausse l'assertion (c) de la remarque 1, on obtient donc:

$$h(x,y)\cdot b_0(s)f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s]\cdot f^{s+1} + y\cdot \mathscr{D}_{Z/Y}[s]\cdot f^s \qquad (\star\star)$$

avec $h(0,y)$ ne s'annulant pas en 0. Cette dernière condition nous dit que h est inversible, on peut donc le supposer égal à 1. En itérant $(\star\star)$ on obtient $b_0(s)^N f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s]\cdot f^{s+1} + y^N\cdot \mathscr{D}_{Z/Y}[s]\cdot f^s$. En multipliant cette dernière relation par $b(s)$ et en utilisant $(\star)$, on obtient $b(s)b_0(s)^N f^s \in \mathscr{D}_{Z/Y}[s]\cdot f^{s+1}$ i.e. il existe un polynôme de Bernstein relatif non nul. Or f est une déformation à un paramètre de $f(x,0)$ à nombre de Milnor non constant ce qui contredit [**BLM91**, Théorème 4]. □

3. Bases standard paramétriques.

3.1. Bases standard génériques.

Pour que le papier soit le plus autonome possible, nous avons décidé de donner les rappels nécessaires concernant les bases standard. Cependant, afin de garder une taille raisonable à ce papier, nous n'entrerons pas dans tous les détails. Le lecteur sera renvoyé à (Castro-Jiménez, Granger [**CG04**]). Nous donnons ensuite les résultats nécessaires sur les bases standard génériques (voir [**Bah04**] pour un traitement plus complet). Enfin dans le paragraphe suivant, nous appliquons ces dernières à l'élimination générique de variables globales.

Dans la suite, nous aurons besoin de travailler dans plusieurs types de $\boldsymbol{k}[[x]]$-algèbres non commutatives ($\boldsymbol{k}$ étant un corps de caractéristique 0). Dans cette section, nous donnons une construction qui couvre tous les cas rencontrés plus loin. Ce qui suit peut être vu comme une version locale proche de [**BM02**].

Soit $x=(x_1,\ldots,x_n)$ et $z=(z_1,\ldots,z_q)$ deux systèmes de variables. Soit $\mathscr{R}=\mathscr{R}(\boldsymbol{k}):=\boldsymbol{k}[[x]]\langle z\rangle$ la $\boldsymbol{k}[[x]]$-algèbre engendrée par les z_i avec les relations de commutation suivantes:

(i) $[z_i,a(x)]\in \boldsymbol{k}[[x]]$ pour $a(x)\in\boldsymbol{k}[[x]]$,

(ii) $[z_i,z_j]\in \boldsymbol{k}[[x]]+\sum_{k=1}^{q}\boldsymbol{k}[[x]]z_k$.

La notation $\boldsymbol{k}[[x]]\langle z\rangle$ rappelle que les variables z_i ne sont pas commutatives en général. Les cas que nous rencontrerons dans la suite sont: $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s,\partial_t\rangle = \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\otimes_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k}\langle s,\partial_t\rangle$ où $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})$ est l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\boldsymbol{k}[[x]]$, $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$, $\boldsymbol{k}[[x]][s]$, $\boldsymbol{k}[s]$. Tous ces cas sont couverts par la construction ci-dessus.

Remarque 3.1. Avec cette définition de $\mathscr{R}$, on n'a pas nécessairement unicité de l'écriture à gauche. Par exemple, si $\mathscr{R}=\boldsymbol{k}\langle z_1,z_2,z_3\rangle$ ($n=0, q=3$), $[z_1,z_2]=z_1$, $[z_1,z_3]=z_2$ et $[z_2,z_3]=z_1$ alors $z_3z_1z_2$ aura (au moins) deux écritures possibles: $z_1z_2z_3-z_1^2-z_2^2$ et $z_1z_2z_3-z_1^2-z_2^2-z_2$. On obtient la première en faisant commuter (dans le terme de degré 3) deux z_i suivant les transpositions d'indices: $(3,1)$ et $(3,2)$. Pour la seconde, on utilise $(1,2)$ suivie de $(3,2)$, $(3,1)$ et $(2,1)$.

Dans la suite, nous imposons donc l'hypothèse supplémentaire d'unicité de l'écriture à gauche (cette unicité, bien entendu, a lieu dans tous les anneaux énumérés ci-dessus).

Pour commencer, nous devons énoncer un théorème de division dans $\mathscr{R}$.

Pour $P \in \mathscr{R}$ s'écrivant (de manière unique) $P = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha z^\beta$, $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}^{n+q}$, $c_{\alpha\beta} \in \boldsymbol{k}$, on définit son diagramme de Newton $\mathscr{N}(P) \subset \boldsymbol{N}^{n+q}$ comme l'ensemble des (α, β) tels que $c_{\alpha\beta}$ est non nul.

Soit $\prec$ un ordre (total et compatible avec l'addition) sur les $(\alpha, \beta) \in \boldsymbol{N}^{n+q}$ défini comme suit: on se donne une forme linéaire $L(\beta) = \sum_i l_i \beta_i$, tels que les l_i soient positifs ou nuls et on définit $\prec = \prec_L$:

$$(\alpha, \beta) \prec (\alpha', \beta') \iff \begin{cases} L(\beta) < L(\beta') \\ \text{ou égalité et } |\beta| < |\beta'| \\ \text{ou égalités et } |\alpha| > |\alpha'| \\ \text{ou égalités et } (\alpha, \beta) >_0 (\alpha', \beta'). \end{cases}$$

Ici $<_0$ est un ordre total, bon et compatible avec l'addition dans $\boldsymbol{N}^{n+q}$.

Pour $P \in \mathscr{R}$ non nul, on note $\exp_\prec(P)$ le maximum de $\mathscr{N}(P)$ pour $\prec$. C'est son exposant privilégié. On note aussi son terme et coefficient privilégié: $\operatorname{tp}_\prec(P) = (x, z)^{\exp_\prec(P)}$, $\operatorname{cp}_\prec(P) = c_{\exp_\prec(P)}$.

Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathscr{R}$. On définit une partition $\boldsymbol{N}^{n+q} = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_r \cup \bar{\Delta}$ associée aux $\exp_\prec(P_j)$ comme suit: $\Delta_1 = \exp_\prec(P_1) + \boldsymbol{N}^{n+q}$, puis pour $j \geq 2$, $\Delta_j = (\exp_\prec(P_j) + \boldsymbol{N}^{n+q}) \smallsetminus \cup_{k=1}^{j-1} \Delta_k$.

Théorème 3.2 (Théorème de division). *Pour $P \in \mathscr{R}$, il existe un unique $(Q_1, \ldots, Q_r, R) \in \mathscr{R}^{r+1}$ tel que*

- *$P = \sum_j Q_j P_j + R$,*
- *pour tout j, $Q_j = 0$ ou bien $\mathscr{N}(Q_j) + \exp_\prec(P_j) \subset \Delta_j$,*
- *$R = 0$ ou bien $\mathscr{N}(R) \subset \bar{\Delta}$.*

Idée de la preuve. L'unicité est facile, occupons nous de l'existence. Pour cela, nous allons nous ramener aux résultats de [**CG04**].

Lemme 3.3. *Il existe une forme linéaire L' à coefficients strictement positifs agissant sur les β tel que pour $j = 1, \ldots, r$, $\exp_{\prec_L}(P_j) = \exp_{\prec_{L'}}(P_j)$.*

La preuve de ce lemme se fait exactement comme celle de [**ACG01**, Proposition 8]. Remarquons que la division ne dépend que des $\exp_\prec(P_j)$, ainsi grâce à ce lemme nous pouvons supposer que L est à coefficients strictement positifs. La forme L donne lieu à une filtration sur $\mathscr{R}$ dont le gradué est isomorphe à $\boldsymbol{k}[[x]][\xi_1, \ldots, \xi_q]$. Ici les ξ_i sont des variables commutatives correspondant aux z_i. En considérant les symboles principaux de P et des P_j par rapport à L, on se ramène à une division dans cet anneau. Ainsi, la preuve se fait exactement comme celle de [**CG04**, Théorème 2.4.1]. □

Voici quelques définitions et résultats utiles pour la suite (voir [**CG04**] pour les démonstrations).

1. Dans le théorème précédent, on a:

$$\exp_{\prec_L}(P) = \max\big\{ \exp_{\prec_L}(Q_j P_j), j = 1, \dots, r; \exp_{\prec_L}(R)\big\}.$$

On définit $\mathrm{ord}^L(P)$ comme étant le maximum des $L(\beta)$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathscr{N}(P)$. En conséquence,

$$\mathrm{ord}^L(P) = \max\big\{\mathrm{ord}^L(Q_j P_j), j = 1, \dots, r; \mathrm{ord}^L(R)\big\}.$$

2. Pour un idéal $J \subset \mathscr{R}$, on définit $\mathrm{Exp}_{\prec}(J)$ comme l'ensemble des $\exp_{\prec}(P)$ pour $P \in J$ non nul. Cet ensemble est stable par addition dans $\boldsymbol{N}^{n+q}$, ainsi il existe $P_1, \dots, P_r$ dans J tels que $\mathrm{Exp}_{\prec}(J) = \bigcup_j (\exp_{\prec}(P_j) + \boldsymbol{N}^{n+q})$. Un tel ensemble est appelé *base standard de* J (pour $\prec$).
3. Soient $P_1, \dots, P_r \in J$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
   – $P_1, \dots, P_r$ forment une $\prec$-base standard de J.
   – Pour $P \in \mathscr{R}$: $P \in J \iff$ le reste R de la division de P par les P_j est nul.
4. S-opérateurs et critère de Buchberger ([**Buc70**] dans le cas polynomial).
   – Soient $P, P' \in \mathscr{R}$. Notons $e = \exp_{\prec}(P)$ et $e' = \exp_{\prec}(P')$. Soit $\mu = \max(e, e')$ que l'on définit en posant $\mu_i = \max(e_i, e'_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, n+q$. On définit alors le S-opérateur de P et P' : $S(P, P') = \mathrm{cp}_{\prec}(P') m P - \mathrm{cp}_{\prec}(P) m' P'$ où $m = (x, z)^{\mu - e}$ et $m' = (x, z)^{\mu - e'}$.
   – Soit $\mathscr{G}$ un système de générateurs de $J \subset \mathscr{R}$, alors $\mathscr{G}$ est une base standard de J si pour tout $P, P' \in \mathscr{G}$, le reste de la division de $S(P, P')$ par $\mathscr{G}$ est nul [**CG04**, Proposition 2.5.1].

Maintenant introduisons les bases standard génériques. Soit $\mathscr{C}$ un anneau intègre commutatif unitaire et contenant comme sous-anneau le corps des nombres rationnels. En ce qui nous concerne, il faut penser à $\mathscr{C} = \mathscr{O}_Y$, cependant $\mathscr{C}$ peut être égal à d'autres anneaux, tel que $\boldsymbol{k}[y]$. Soit $\mathscr{F} = \mathrm{Frac}(\mathscr{C})$ son corps des fractions. On note $\mathrm{Spec}(\mathscr{C})$ et $\mathrm{Specm}(\mathscr{C})$ son spectre et son spectre maximal, respectivement. Dans la suite, lorsque $\mathscr{C} = \mathscr{O}_Y$, nous identifierons $\mathrm{Specm}(\mathscr{C})$ et Y. Pour tout $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ désigne le corps des fractions de $\mathscr{C}/\mathscr{P}$; c'est un corps de caractéristique 0 (ceci grâce à l'hypothèse $\boldsymbol{Q} \subset \mathscr{C}$). Pour tout idéal $\mathscr{I}$, $V(\mathscr{I}) = \{\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C}) | \mathscr{I} \subset \mathscr{P}\}$ désigne le fermé de Zariski défini par $\mathscr{I}$. On notera $V_m(\mathscr{I})$ sa restriction à $\mathrm{Specm}(\mathscr{C})$.

Soit $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$ et $c \in \mathscr{C}$. On note $[c]_{\mathscr{P}}$ sa classe dans $\mathscr{C}/\mathscr{P}$ et $(c)_{\mathscr{P}} = \frac{[c]_{\mathscr{P}}}{1}$ cette classe vue dans le corps $\mathscr{F}(\mathscr{P})$. On appelle $(\cdot)_{\mathscr{P}}$ la spécialisation en $\mathscr{P}$.

Dans ce qui suit, afin de rendre l'exposition plus rigoureuse, nous invoquons le language des catégories mais vue la simplicité de notre situation, nous aurions pu l'éviter. Considérons la catégorie dont un objet est $A[[x]]$ où A est un anneau et les flèches sont des applications (ensemblistes).

On se donne une flèche ϕ de l'objet $\mathscr{C}[[x]]$ vers lui-même et pour tout $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, $\phi_{\mathscr{P}}$ une flèche de $\mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]$ vers lui même. Nous dirons que ϕ est adaptée aux $\phi_{\mathscr{P}}$ si pour tout $a(x) \in \mathscr{C}[[x]]$, $(\phi(a(x)))_{\mathscr{P}} = \phi_{\mathscr{P}}((a(x))_{\mathscr{P}})$.

Maintenant, pour tout $\mathscr{P}$, on se donne $\mathscr{R}(\mathscr{F}(\mathscr{P})) = \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]\langle z\rangle$. Pour chaque $i = 1, \dots, q$, on définit la flèche $\phi_{i,\mathscr{P}}$ de $\mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]$ vers lui-même en posant $\phi_{i,\mathscr{P}}(c(x)) := [z_i, c(x)]$. On définit alors $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ comme la $\mathscr{C}$-algèbre engendrée par $\mathscr{C}[[x]]$ et $z_1, \dots, z_q$ avec les relations de commutation suivantes:

(i) $[z_i, a(x)] = \phi_i(a(x))$ pour $a(x) \in \mathscr{C}[[x]]$,

(ii) $[z_i, z_j] = u_{ij} + \sum_{k=1}^{q} v_{ijk} z_k$.

Ici on a fixé les u_{ij} et v_{ijk} comme étant des entiers dans $\boldsymbol{Z}$ (pour simplifier) et ϕ_i est une flèche adaptée aux $\phi_{i,\mathscr{P}}$. De plus on suppose que les commutateurs $[z_i, z_j]$ soient les mêmes dans $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ et dans les $\mathscr{R}(\mathscr{F}(\mathscr{P}))$. Dans la suite, les choses seront simples et l'on aura $\phi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ lorsque z_i sera une dérivation partielle et $\phi_i = 0$ dans les autres situations.

Une fois cette définition faite, on étend de façon naturelle les opérations de spécialisation aux éléments de $\mathscr{R}(\mathscr{C})$, ainsi qu'à ceux de $\mathscr{R}(\mathscr{F})$, dont le dénominateur des coefficients n'est pas dans $\mathscr{P}$.

Maintenant si J est un idéal de $\mathscr{R}(\mathscr{C})$, on note $(J)_{\mathscr{P}}$ l'idéal de $\mathscr{R}(\mathscr{F}(\mathscr{P}))$ engendré par les $(P)_{\mathscr{P}}$ avec $P \in J$.

Fixons un ordre $\prec = \prec_L$ comme plus haut et fixons $\mathscr{Q} \in \operatorname{Spec}(\mathscr{C})$. On note $\mathscr{R}(\mathscr{Q})$ l'idéal de $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ dont les éléments ont leurs coefficients dans $\mathscr{Q}$.

Soit $P \in \mathscr{R}(\mathscr{C}) \smallsetminus \mathscr{R}(\mathscr{Q})$, qu'on écrit comme plus haut sauf qu'ici les $c_{\alpha\beta}$ sont dans $\mathscr{C}$. On définit $\mathscr{N}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)$ son diagramme de Newton modulo $\mathscr{Q}$ comme l'ensemble des (α, β) tels que $c_{\alpha\beta} \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$. En fait $\mathscr{N}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P) = \mathscr{N}((P)_{\mathscr{Q}})$. On définit $\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)$ son exposant privilégié modulo $\mathscr{Q}$ comme le maximum (pour $\prec$) de $\mathscr{N}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)$. On définit aussi son terme et son coefficient privilégié modulo $\mathscr{Q}$: $\operatorname{tp}_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P) = (x,z)^{\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)}$, $\operatorname{cp}_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P) = c_{\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)}$.

Soit J un idéal de $\mathscr{R}(\mathscr{C})$. Soit $\operatorname{Exp}_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(J)$ l'ensemble des $\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P)$ pour $P \in J \smallsetminus \mathscr{R}(\mathscr{Q})$. Il est facile de voir que cet ensemble est stable par addition. Ainsi, par le lemme de Dickson, la définition suivante n'est pas vide.

Définition 3.4. On définit une base standard générique de J sur $V(\mathscr{Q})$ (pour $\prec$) comme un sous ensemble fini $\mathscr{G} = \{P_1, \dots, P_r\}$ de J tel que $\operatorname{Exp}_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(J) = \bigcup_j (\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P_j) + \boldsymbol{N}^{n+q})$.

Dans [**Bah04**], nous avons donné une définition plus générale. Cependant pour l'usage qu'on en fera ici, la définition ci-dessus est suffisante.

Notons $\langle \mathscr{Q} \rangle$ l'idéal de $\mathscr{R}(\mathscr{F})$ constitué d'éléments dont le numérateur des coefficients est dans $\mathscr{Q}$.

Proposition 3.5 (Division modulo $\mathscr{Q}$, [**Bah04**, Proposition 2.1.2]). *Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathscr{R}(\mathscr{C})$ et soit $\Delta_1 \cup \dots \cup \Delta_r \cup \bar{\Delta}$ la partition de $\boldsymbol{N}^{n+q}$ associée aux $\exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P_j)$. Pour $P \in \mathscr{R}(\mathscr{C})$, il existe $Q_1, \dots, Q_r, R \in \mathscr{R}(\mathscr{F})$ et $T \in \langle \mathscr{Q} \rangle$ tels que $P = \sum_j Q_j P_j + R + T$ et*

- *$\mathscr{N}(Q_j) + \exp_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P_j) \subset \Delta_j$ si $Q_j \neq 0$,*
- *$\mathscr{N}(R) \subset \bar{\Delta}$ si $R \neq 0$,*
- *le dénominateur des coefficients de R, T et des Q_j sont des puissances de $h = \prod_j \operatorname{cp}_{\prec}^{\operatorname{mod}\mathscr{Q}}(P_j)$. Autrement dit, la division a lieu dans $\mathscr{R}(\mathscr{C}[h^{-1}])$ (i.e. les coefficients sont dans le localisé de $\mathscr{C}$ par rapport à h).*

De plus $(Q_1, \dots, Q_r, R)$ est unique modulo $\langle \mathscr{Q} \rangle$. On appelle R le reste modulo $\mathscr{Q}$.

Démonstration. La preuve consiste à poser $P_j = P_j^1 - P_j^2$ avec $P_j^2 \in \langle \mathscr{Q} \rangle$ et $\exp_\prec(P_j^1) = \exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P_j)$ et à effectuer la division de P par les P_j^1 dans $\mathscr{R}(\mathscr{F})$. Voir les détails dans [**Bah04**, Proposition 2.1.2]. □

Corollaire 3.6. *Soit $P \in \mathscr{R}(\mathscr{C})$ tel que $(P)_\mathscr{Q} \in (J)_\mathscr{Q}$ et soit $\mathscr{G}$ une $\prec$-base standard générique de J sur $V(\mathscr{Q})$ alors le reste modulo $\mathscr{Q}$ de la division modulo $\mathscr{Q}$ de P par $\mathscr{G}$ est nul.*

Démonstration. Écrivons $P = \sum_j Q_j P_j + R + T$ comme dans la proposition. Remarquons que $\exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P_j) = \exp_\prec((P_j)_\mathscr{Q})$ donc la partition de $\boldsymbol{N}^{n+q}$ dans la proposition est égale à celle associée aux $\exp_\prec((P_j)_\mathscr{Q})$. Spécialisons l'égalité précédente en $\mathscr{Q}$ (c'est possible puisque $h \notin \mathscr{Q}$). On obtient $(P)_\mathscr{Q} = \sum_j (Q_j)_\mathscr{Q}(P_j)_\mathscr{Q} + (R)_\mathscr{Q}$ avec $\mathscr{N}((Q_j)_\mathscr{Q}) + \exp_\prec((P_j)_\mathscr{Q}) \subset \Delta_j$ et $\mathscr{N}((R)_\mathscr{Q}) \subset \bar{\Delta}$. Ainsi l'égalité précédente est le résultat de la division de $(P)_\mathscr{Q}$ par $(\mathscr{G})_\mathscr{Q}$, or $(P)_\mathscr{Q} \in (J)_\mathscr{Q}$ donc par le rappel (3.) page 603, $(R)_\mathscr{Q} = 0$ i.e. $R \in \langle \mathscr{Q} \rangle$. □

Théorème 3.7 ([**Bah04**, Théorème 2.1.6]). *Soit $\mathscr{G} = \{P_1, \ldots, P_r\}$ une base standard générique de J sur $V(\mathscr{Q})$ et soit $h = \prod_j \mathrm{cp}_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P_j)$. Pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h)$, $(\mathscr{G})_\mathscr{P}$ est une base standard de $(J)_\mathscr{P}$.*

Remarquons que $\exp_\prec((P_j)_\mathscr{P}) = \exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P_j)$ par définition de h, par conséquent $\mathrm{Exp}_\prec((J)_\mathscr{P})$ est génériquement constant et égal à $\mathrm{Exp}_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(J)$. Remarquons aussi que $V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h)$ n'est pas vide puisque $h \notin \mathscr{Q}$.

Démonstration. Nous allons utiliser le critère de Buchberger (rappel (4.) page 603). Pour $P \in J$, effectuons sa division modulo $\mathscr{Q}$ par $\mathscr{G}$: $P = \sum_j Q_j P_j + R + T$; le reste modulo $\mathscr{Q}$ est nul par le corollaire 3.6. Comme dans la preuve de ce corollaire, nous spécialisons cette division en $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h)$ (ce qui est possible car $h \notin \mathscr{P}$). Ce que nous obtenons est la division de $(P)_\mathscr{P}$ par $(\mathscr{G})_\mathscr{P}$, division dont le reste est nul puisque $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$. En conséquence $(\mathscr{G})_\mathscr{P}$ engendre $(J)_\mathscr{P}$.

Maintenant soient P, P' dans $\mathscr{G}$ et $S = \mathrm{cp}_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P')mP - \mathrm{cp}_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P)m'P'$ où l'on a posé $m = (x,z)^{\mu - \exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P)}$, $m' = (x,z)^{\mu - \exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P')}$ et $\mu = \max(\exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P), \exp_\prec^{\mathrm{mod}\,\mathscr{Q}}(P'))$. On constate que pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h)$, $(S)_\mathscr{P} = S((P)_\mathscr{P}, (P')_\mathscr{P})$. Par les mêmes arguments que ci-dessus, on montre que la division de $(S)_\mathscr{P}$ par $(\mathscr{G})_\mathscr{P}$ a un reste nul. On conclut à l'aide du critère de Buchberger. □

3.2. Élimination générique de variables globales.

Ce que nous appelons variables globales sont les z_i. Par opposition les x_i sont dites variables locales. Dans ce paragraphe, nous montrons comment éliminer génériquement les variables $z_{p+1}, \ldots, z_q$ avec $p < q$.

Énonçons d'abord le résultat dans le cas non paramétrique. Soit J un idéal dans $\mathscr{R}(\boldsymbol{k})$. Soit L la forme définie par $L(\beta) = \sum_{p+1}^q \beta_i$. Grossièrement on met un poids strictement positif (ici 1) sur les variables à éliminer et un poids nul sur les autres. Notons $\prec = \prec_L$ l'ordre défini par L et soit $\prec'$ sa restriction aux $(\alpha, \beta') \in \boldsymbol{N}^{n+p}$. Notons que cet ordre est un ordre sur $\boldsymbol{N}^{n+p}$ associé à la forme linéaire $L'(\beta_1, \ldots, \beta_p) = \sum_1^p \beta_i$ donc le théorème de division dans $\boldsymbol{k}[[x]]\langle z' \rangle$, $z' = (z_1, \ldots, z_p)$, s'applique.

Proposition 3.8. *Soit $\mathscr{G}$ une $\prec$-base standard de J alors $\mathscr{G}' = \mathscr{G} \cap \boldsymbol{k}[[x]]\langle z' \rangle$ est une $\prec'$-base standard de $J \cap \boldsymbol{k}[[x]]\langle z' \rangle$.*

On dit d'un tel ordre $\prec$ que c'est un *ordre qui élimine* les variables $z_{p+1}, \dots, z_q$.

Démonstration. Les arguments sont standard et similaires à ceux de [**CG04**, 1.7]. Soit $P \in J \cap \boldsymbol{k}[[x]]\langle z' \rangle$. Divisons P par $\mathscr{G}$ par rapport à l'ordre $\prec$: $P = \sum_j Q_j P_j$. Par hypothèse sur P, $\mathrm{ord}^L(P) = 0$ donc (voir rappel (1.) page 602–603) pour tout j tel que $Q_j \neq 0$, $\mathrm{ord}^L(Q_j) = 0$ et pour un tel j, $\mathrm{ord}^L(P_j) = 0$ i.e. Q_j et P_j sont dans $\boldsymbol{k}[[x]]\langle z' \rangle$. On constate alors que la division précédente est la division de P par $\mathscr{G}'$ par rapport à $\prec'$, division pour laquelle le reste est nul. On achève la preuve en utilisant le rappel (3.) page 603. □

Maintenant soit J dans $\mathscr{R}(\mathscr{C})$ et $\mathscr{G}$ une $\prec$-base standard générique de J sur $V(\mathscr{Q})$.

Proposition 3.9. *Soit $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ l'ensemble des P_j tels que $\mathrm{tp}_{\prec}^{\mathrm{mod}\mathscr{Q}}(P_j)$ est dans $\mathscr{C}[[x]]\langle z' \rangle$. Alors $\mathscr{G}'$ est une $\prec'$-base standard générique de $J' = (J + \mathscr{R}(\mathscr{Q})) \bigcap \mathscr{C}[[x]]\langle z' \rangle$ sur $V(\mathscr{Q})$.*

Démonstration. Par définition d'une base standard générique, il suffit de montrer que pour tout $P \in J'$, $\exp_{\prec'}((P)_{\mathscr{Q}})$ appartient à $\exp_{\prec'}((P_j)_{\mathscr{Q}}) + \boldsymbol{N}^{n+p}$ pour un certain $P_j \in \mathscr{G}'$. Pour un tel P, on a $(P)_{\mathscr{Q}} \in (J)_{\mathscr{Q}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{Q})[[x]]\langle z' \rangle$. Maintenant il est facile de voir que $(\mathscr{G}')_{\mathscr{Q}}$ est égal à $(\mathscr{G})_{\mathscr{Q}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{Q})[[x]]\langle z' \rangle$. Or par définition de $\mathscr{G}$ est par la proposition précédente, ce dernier ensemble est une $\prec'$-base standard de $(J)_{\mathscr{Q}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{Q})[[x]]\langle z' \rangle$ ce qui achève notre démonstration. □

Corollaire 3.10. *Soit h le produit des $\mathrm{cp}_{\prec}^{\mathrm{mod}\mathscr{Q}}(P_j)$ avec $P_j \in \mathscr{G}$ alors pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h)$,*

$$(J)_{\mathscr{P}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]\langle z' \rangle = \Big(\big(J + \mathscr{R}(\mathscr{Q})\big) \bigcap \mathscr{C}[[x]]\langle z' \rangle \Big)_{\mathscr{P}}$$

et ces idéaux sont engendrés par $(\mathscr{G}')_{\mathscr{P}} = (\mathscr{G})_{\mathscr{P}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]\langle z' \rangle$.

Démonstration. C'est une application directe du théorème 3.7 et des deux propositions précédentes. □

4. Construction algorithmique du polynôme de Bernstein formel.

Étant donnée une série formelle $f = f(x) \in \boldsymbol{k}[[x]]$ à n variables et à coefficients dans un corps $\boldsymbol{k}$ de caractéristique 0, J. E. Björk ([**Bjö73**], voir aussi [**Bjö79**]) a démontré que le polynôme de Bernstein b_f associé est non nul. De plus si au départ $f \in \boldsymbol{C}\{x\}$ alors d'après J. Briançon et Ph. Maisonobe [**BM90**], son polynôme de Bernstein analytique est égal à son polynôme de Bernstein formel. Enfin toujours dans ce même cas, M. Kashiwara [**Kas76**] a démontré que les racines de b_f sont rationnelles négatives. La rationalité de b_f pour $f \in \boldsymbol{k}[[x]]$ est, à notre connaissance, une question ouverte.

T. Oaku [**Oak97b**] a donné un algorithme de calcul du polynôme de Bernstein formel pour $f \in \boldsymbol{k}[x]$. Cet algorithme se compose d'une première partie où l'on élimine des variables globales et d'une seconde où l'on "élimine" les variables locales x_i. Ici nous proposons une variante de la première partie (variante inspirée de [**BM02**]) et montrons que la seconde partie fonctionne pour $f \in \boldsymbol{k}[[x]]$.

Soit $f \in \boldsymbol{k}[[x]]$. Le module libre $\mathscr{L} = \boldsymbol{k}[[x]][1/f, s] \cdot f^s$ a une structure naturelle de $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$-module. Suivant B. Malgrange [**Mal74**], on en fait un $\hat{\mathscr{D}}_{n+1}(\boldsymbol{k})$-module (où l'on batise t la nouvelle variable): si $g(s) \in \boldsymbol{k}[[x]][1/f, s]$, on pose $t \cdot g(s)f^s = g(s+1)ff^s$ et $\partial_t \cdot g(s)f^s = -sg(s-1)f^{-1}f^s$. On constate alors que s agit sur $\mathscr{L}$ comme $-\partial_t t$. Cette identification permet de faire de $\mathcal{L}$ un $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s, \partial_t\rangle$-module (cette approche est dûe à Briançon et Maisonobe [**BM02**] dans le cas algébrique). Considérons les idéaux suivants.

0: $I(f) = \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s, \partial_t\rangle \cdot (s + f(x)\partial_t) + \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s, \partial_t\rangle \cdot \left(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t\right).$

Affirmation. Cet idéal est l'annulateur de f^s dans $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s, \partial_t\rangle$.

1: $I_1(f) = I(f) \cap \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$.
Ainsi, $I_1(f)$ s'obtient à partir de $I(f)$ en éliminant la variable (globale) ∂_t.
Affirmation. L'idéal $I_1(f)$ est l'annulateur de f^s dans $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$.

2: $I_2(f) = I_1(f) + \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s] \cdot f$.

3: $J(f) = I_2(f) \cap \boldsymbol{k}[[x]][s]$.
Ainsi, $J(f)$ s'obtient en éliminant les variables (globales) ∂_{x_i}.

4:
$$\begin{aligned} \mathscr{B}(f) &= J(f) \cap \boldsymbol{k}[s] \\ &= I_2(f) \cap \boldsymbol{k}[s]. \end{aligned}$$

Ce dernier idéal s'obtient en "éliminant" les variables (locales) x_i dans l'idéal $J(f)$.
Affirmation. L'idéal $\mathscr{B}(f)$ est l'idéal de Bernstein de f. Son générateur unitaire qu'on note b_f est le polynôme de Bernstein de f.

Démonstration des affirmations. Démontrons la première. Il est facile de voir que $I(f)$ est inclus dans l'annulateur de f^s. Montrons l'inclusion inverse. Soit $P \in \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})\langle s, \partial_t\rangle$ s'annulant sur f^s. Modulo $I(f)$, on peut supposer que P appartient à $\boldsymbol{k}[[x]][\partial_t]$. Écrivons $P = \sum_\nu u_\nu(x)\partial_t^\nu$. On a alors $P \cdot f^s = \sum_\nu u_\nu(x)(-1)^\nu s(s-1)\cdots(s-\nu+1)f^{-\nu}f^s = 0$. Cette égalité ayant lieu dans $\mathscr{L}$, on en déduit que les $u_\nu(x)$ sont nuls ce qui démontre la première affirmation. La seconde étant triviale, voyons la troisième. Soit $c(s) \in \boldsymbol{k}[s]$. C'est un polynôme de Bernstein de f si et seulement si il existe $P \in \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$ tel que $c(s)f^s = P \cdot f^{s+1}$, ou encore $c(s) - Pf$ annule f^s, ce qui d'après la seconde affirmation est équivalent à $c(s) - Pf \in I_1(f)$ ou encore $c(s) \in I_1(f) + \hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]f$. $\square$

D'après les résultats de la section précédente, nous savons calculer des générateurs des idéaux $I_1(f)$, $I_2(f)$ et $J(f)$, ceci en faisant un calcul de bases standard pour un ordre bien choisi. Le problème est maintenant le suivant: étant donné $J \subset \boldsymbol{k}[[x]][s]$, comment calculer le générateur unitaire b de $J \cap \boldsymbol{k}[s]$? Nous supposerons ce b non nul (ce qui est le cas dans notre situation).

Dans ([**Oak97b**], Algorithme 4.5), T. Oaku a traité la question suivante: soit $J \subset \boldsymbol{k}[x][s]$, comment calculer $\big(\boldsymbol{k}[[x]][s] \cdot J\big) \cap \boldsymbol{k}[s]$?

Nous allons utiliser le même algorithme en apportant une légère modification à la démonstration. Pour les besoins du problème, nous aurons besoin de travailler avec la clôture algébrique $\bar{\boldsymbol{k}}$ de $\boldsymbol{k}$. Cependant, nous verrons que si l'on sait à l'avance que $b(s)$ est à racines dans $\boldsymbol{k}$ alors $\bar{\boldsymbol{k}}$ est inutile.

4.1. Élimination des variables x_i: version formelle d'un algorithme de Oaku.

(α): Soit $b_0(s)$ le générateur unitaire de $J(0,s) = \{g(0,s) | g(x,s) \in J\}$ (qui forme un idéal de $\boldsymbol{k}[s]$).
Remarquons que $J(0,s)$ est engendré par $\{g(0,s) | g \in G\}$ si G engendre J. Ainsi $b_0(s)$ s'obtient via un calcul de pgcd ou bien un calcul de bases de Gröbner (ce que nous utiliserons).
Remarque: $b(s)$ est un multiple de $b_0(s)$ qui est donc non nul.

(β): Soit $b_0(s) = (s-s_1)^{\mu_1} \cdots (s-s_m)^{\mu_m}$ la factorisation de $b_0(s)$ dans $\bar{\boldsymbol{k}}[s]$.
Par la remarque précédente, $b(s)$ s'écrit $b(s) = p(s)(s-s_1)^{\nu_1} \cdots (s-s_m)^{\nu_m}$ avec $p(s_i) \neq 0$ et $\nu_i \geq \mu_i$ pour $i = 1, \dots, m$.

(γ): Soit $\bar{J} = \bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s] \cdot J$.

(δ): Pour $i = 1, \dots, m$, soit $l_i \in \boldsymbol{N}$ le plus petit entier l tel qu'il existe $h(x,s) \in \bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]$ avec $h(x,s)(s-s_i)^l \in \bar{J}$ et $h(0,s_i) \neq 0$.
En considérant $b(s)$, on constate que de tels l et $h(x,s)$ existent et que $l_i \leq \nu_i$. De plus, en faisant $(x,s) = (0,s_i)$, on voit que $l_i \geq \mu_i$.
Enfin remarquons que pour un l donné, un tel $h(x,s)$ se trouve dans le quotient $\bar{J} : (s-s_i)^l$. Ainsi, on voit aisément que $l \geq l_i$ si et seulement si n'importe quel système de générateurs de $\bar{J} : (s-s_i)^l$ contient un élément qui ne s'annule pas en $(x,s) = (0,s_i)$.

(ε): On pose $c(s) = (s-s_1)^{l_1} \cdots (s-s_m)^{l_m}$.

Proposition 4.2. *$b(s)$ est égal à $c(s)$.*

Démonstration. Posons $E = \bar{J} : c(s)$; cet idéal contient $\bar{J}$. Considérons le lieu des zéros de $E(0,s) \subset \bar{\boldsymbol{k}}[s]$ dans $\bar{\boldsymbol{k}}$. On a alors:

$$V(E(0,s)) \subset V(J(0,s)) = V(b_0(s)) = \{s_1, \dots, s_m\}.$$

D'autre part, pour chaque $i = 1, \dots, m$, il existe $h_i(x,s) \in \bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]$ tel que $h_i(x,s)(s-s_i)^{l_i} \in \bar{J}$ et $h_i(0,s_i) \neq 0$. Ainsi, $h_i(x,s)$ appartient à E et ne s'annule pas en $(x,s) = (0,s_i)$. En conséquence, $V(E(0,s)) = \varnothing$.

Par le théorème des zéros de Hilbert, $1 \in E(0,s)$. Cela signifie qu'il existe $e = e(x,s) \in E$ tel que $e(0,s) = 1$. Quitte à multiplier $e(x,s)$ par une unité de $\bar{\boldsymbol{k}}[[x]]$, on peut supposer que $e \in 1 + \sum_{i=1}^n \bar{k}[[x]][s] \cdot (x_i s)$.

Maintenant, notons d le degré de $b(s) \in J \subset \bar{J} \subset E$. Considérons le $\bar{\boldsymbol{k}}[[x]]$-module $M = \bar{\boldsymbol{k}}[[x]] \oplus \cdots \oplus \bar{\boldsymbol{k}}[[x]]s^d$ et posons $N = M \cap E$.

Montrons que pour tout entier q, 1 appartient à $m^q M + N$, m étant l'idéal maximal de $\bar{\boldsymbol{k}}[[x]]$.

D'après ce qui précède, il existe $v \in m\bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]s$ et $e \in E$ tel que $1 = v + e$. En élevant à la puissance q, on obtient:

$$1 \in m^q \bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]s + E.$$

Ecrivons: $1 = v_1 s + v_2 s^2 + \cdots + v_N s^N + e'$ avec $v_i \in m^q$ et $e' \in E$. Pour chaque $k = N, N-1, \ldots, d+1$ (si $N \geq d+1$), on divise $v_k s^k$ par $b(s)$ et on obtient $v_k s^k \in m^q s + \cdots + m^q s^{k-1} + E$. À la fin de ces divisions, on a $1 \in m^q s + \cdots + m^q s^d + E$. Ainsi $1 \in m^q M + N$. Par le théorème d'intersection de Krull, $1 \in N \subset E$, i.e. $c(s) \in \bar{J} \cap \bar{\boldsymbol{k}}[s]$.

Remarque: le polynôme $b(s)$ joue ici le rôle du polynôme $g(x,s)$ de [**Oak97b**, Algo. 4.5]. Afin d'arriver à $1 \in E$, T. Oaku *loc. cit.* a utilisé le théorème dit d'extension [**CLO92**, Chapitre 3, §6].

Montrons que $c(s)$ engendre $\bar{J} \cap \bar{\boldsymbol{k}}[s]$. Soit $t(s) \in \bar{J} \cap \bar{\boldsymbol{k}}[s]$. Ecrivons $t(s) = q(s)(s - s_1)^{u_1} \cdots (s - s_m)^{u_m}$ avec $q(s_i) \neq 0$. Par définition de l_i, on a $u_i \geq l_i$ ainsi $t(s)$ est multiple de $c(s)$.

Pour finir, montrons que $c(s)$ est dans $J \cap \boldsymbol{k}[s]$. Notons $\pi : \bar{\boldsymbol{k}} \to \boldsymbol{k}$ la projection $\boldsymbol{k} \oplus S \to \boldsymbol{k}$ où S est un supplémentaire de $\boldsymbol{k}$. On l'étend à $\bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]$. Comme $c(s)$ appartient à $\bar{J}$ et que ce dernier est engendré par J, on peut écrire: $c(s) = \sum_i q_i(x,s) g_i(x,s)$ où les q_i sont dans $\bar{\boldsymbol{k}}[[x]][s]$ et les g_i dans J (donc dans $\boldsymbol{k}[[x]][s]$). Appliquons π et remarquons que puisque $g_i \in \boldsymbol{k}[[x]][s]$, on a $\pi(q_i g_i) = \pi(q_i) g_i$. Nous obtenons que $\pi(c(s))$ appartient à $J \cap \boldsymbol{k}[s]$ donc à $\bar{J} \cap \bar{\boldsymbol{k}}[s]$ et par conséquent est multiple de $c(s)$. Or, puisque $c(s)$ est unitaire, il a même degré que $\pi(c(s))$. Ainsi $c(s)$ égale $\pi(c(s))$ et appartient bien à $J \cap \boldsymbol{k}[s]$.

Nous savions que $c(s)$ divise $b(s)$. Maintenant, nous savons que $c(s)$ est multiple de $b(s)$ ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Dans la suite, lorsque nous utiliserons l'algorithme précédent, nous serons dans une situation où l'on sait à l'avance que le polynôme de Bernstein est à racines rationnelles. Cela nous permet de simplifier l'algorithme de la façon suivante.

Remarque 4.3. Supposons que dans l'algorithme précédent, les racines de $b(s)$ soient dans $\boldsymbol{k}$ alors $\bar{\boldsymbol{k}}$ est inutile, plus précisément:

- Dans l'étape (β), la factorisation se fait dans $\boldsymbol{k}[s]$.
- L'étape (γ) peut être sautée.
- Enfin, dans l'étape (δ), il suffit de considérer $J : (s-s_i)^l$, i.e. l_i est le plus petit l tel que $J : (s-s_i)^l$ contienne un $h(x,s) \in \boldsymbol{k}[[x]][s]$ ne s'annulant pas en $(x,s) = (0, s_i)$.

5. Démonstration de (i) et (iii) du théorème 1.

À partir d'ici, $\mathscr{C} = \mathscr{O}_Y$. Considérons les idéaux suivants:

0: $I = \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t\rangle \cdot (s + f(x)\partial_t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{C})\langle s, \partial_t\rangle \cdot \left(\partial_{x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\partial_t\right)$.

1: $I_1 = \big(I + \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{Q})\langle s, \partial_t\rangle\big) \cap \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{C})[s]$.

2: $I_2 = I_1 + \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{C})[s] \cdot f$.

3: $J = \big(I_2 + \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{Q})[s]\big) \cap \mathscr{C}[[x]][s]$.

Soit $\mathscr{G}_0$ une base standard générique de I sur $V(\mathscr{Q})$ pour un ordre $\prec_0$ qui élimine la variable ∂_t. Soit $h_0 \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$ le produit des $\mathrm{cp}_{\prec_0}^{\mathrm{mod}\mathscr{Q}}(P)$ pour $P \in \mathscr{G}_0$ et soit $\mathscr{G}_0'$ le sous-ensemble de $\mathscr{G}_0$ constitué d'éléments dont le terme privilégié modulo $\mathscr{Q}$ est indépendant de ∂_t. De même, $\mathscr{G}_2$ est une base standard générique de I_2 sur $V(\mathscr{Q})$ pour un ordre $\prec_2$

qui élimine les variables ∂_{x_i}. On note $h_2 \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$ le produit des coefficients privilégiés modulo $\mathscr{Q}$ et on définit $\mathscr{G}_2' \subset \mathscr{G}_2$ comme le sous-ensemble dont les éléments ont leur $\mathrm{tp}_{\prec_2}^{\mathrm{mod}\mathscr{Q}}$ indépendant des ∂_{x_i}.

LEMME 5.1.

(0) *Pour tout* $\mathscr{P} \in \mathrm{Spec}(\mathscr{C})$, $(I)_{\mathscr{P}} = I((f)_{\mathscr{P}})$.
(1) *Pour tout* $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0)$, $(I_1)_{\mathscr{P}} = I_1((f)_{\mathscr{P}})$.
(2) *Pour tout* $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0)$, $(I_2)_{\mathscr{P}} = I_2((f)_{\mathscr{P}})$.
(3) *Pour tout* $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0h_2)$, $(J)_{\mathscr{P}} = J((f)_{\mathscr{P}})$.

Rappelons que les notations $I((f)_{\mathscr{P}})$, $I_1((f)_{\mathscr{P}})$, etc, sont celles introduites dans la construction algorithmique formelle donnée page 607 (ici on applique la construction à $(f)_{\mathscr{P}} \in \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]]$).

DÉMONSTRATION. L'assertion (0) est triviale. L'assertion (1) découle directement du corollaire 3.10 et de (0). L'assertion (2) est une conséquence directe de (1). La (3) découle du corollaire 3.10 et de (2). □

Nous en sommes à la fin de l'étape 3. Pour poursuivre, nous avons besoin de quelques résultats supplémentaires.

5.1. Résultats préparatoires et début de la fin.

Dans la suite, nous aurons besoins de calculer "génériquement" les quotients du type $J : u$ où $J \subset \boldsymbol{k}[[x]][s]$ et $u \in \boldsymbol{k}[s]$. Rappelons comment les calculer dans le cas absolu (i.e. non paramétrique).

LEMME 5.2 ([**CLO92**, chapitre 4, §3 et §4]). *Soit ζ une nouvelle variable, alors*

$$J \cap (\boldsymbol{k}[[x]][s] \cdot u) = \big(\boldsymbol{k}[[x]][s][\zeta] \cdot \zeta \cdot J + \boldsymbol{k}[[x]][s][\zeta] \cdot (1-\zeta) \cdot u\big) \cap \boldsymbol{k}[[x]][s]$$

et si $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ est un système de générateurs de $J \cap \boldsymbol{k}[[x]][s] \cdot u$ alors $G/u = \{g_1/u, \ldots, g_r/u\}$ engendre $J : u$.

Ainsi, le calcul se résume en la simple élimination d'une variable globale.

Pour finir cette sous-section, voici un résultat indispensable pour continuer. C'est lui qui nous permettra, via la remarque 4.3, de démontrer le point (i) du théorème 1.

LEMME 5.3 (de rationalité). *Soit $p \in \mathscr{O}_Y[s]$ dont on note $\mathrm{cp}(p) \in \mathscr{O}_Y$ le coefficient du monôme de plus haut de degré. Supposons qu'il existe un ouvert W de Zariski de $V_m(\mathscr{Q}) \subset Y$ tel que pour tout $y \in W$, $(p/\mathrm{cp}(p))_{|y_0}$ (soit bien défini) et appartienne à $\boldsymbol{Q}[s]$ alors il existe $q \in \boldsymbol{Q}[s]$ unitaire tel que $p - \mathrm{cp}(p)q \in \mathscr{Q}[s]$.*

DÉMONSTRATION. Écrivons $p = \sum_{i=1}^N c_i(y)s^i$ et $c_N = \mathrm{cp}(p)$. Pour chaque i, considérons l'application $D_i : y \in W \mapsto \frac{c_i(y)}{c_N(y)} \in \boldsymbol{C}$. Son image $D_i(W)$ est un constructible de $\boldsymbol{C}$ (voir [**Har92**, Théorème 3.16]), or par hypothèse $D_i(W) \subset \boldsymbol{Q}$ donc $D_i(W)$ est une réunion finie de points rationnels. Par l'irréductibilité de $V_m(\mathscr{Q})$, $D_i(W)$ est un singleton. Par conséquent, il existe $q_i \in \boldsymbol{Q}$ tel que $c_i(y) - q_ic_N(y) \in \mathscr{Q}$. Le polynôme $q = \sum_i q_is^i$ est le polynôme que l'on cherchait. □

5.2. Les étapes (α) et (β).

Reprenons la démonstration du théorème 1. Nous en étions à la fin de l'étape **3** où nous avions construit l'idéal $J \subset \mathscr{C}[[x]][s]$.

LEMME 5.4. *Pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \setminus V(h_0h_2)$,*

$$(J(0,s))_{\mathscr{P}} = (J)_{\mathscr{P}}(0,s) = J((f)_{\mathscr{P}})(0,s).$$

La première égalité est triviale en utilisant les définitions et la deuxème découle directement de l'étape **3**.

Soit maintenant $\mathscr{G}_3$ une base standard générique de $J(0,s)$ sur $V(\mathscr{Q})$ relativement à l'ordre usuel de $\boldsymbol{N}$. Soit h_3 le produit des coefficients privilégié modulo $\mathscr{Q}$ et soit $\tilde{b_0}$ l'élément de $\mathscr{G}_3$ dont l'exposant privilégié modulo $\mathscr{Q}$ est le plus petit (ou dit plus simplement, dont le degré en s modulo $\mathscr{Q}$ est le plus petit).

LEMME 5.5. *Pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \setminus V(h_0h_2h_3)$, $(\tilde{b_0})_{\mathscr{P}}$ engendre $\big(J(0,s)\big)_{\mathscr{P}}$.*

Ce lemme découle du corollaire 3.10. Afin de poursuivre dans de bonnes conditions, nous avons besoin du

LEMME 5.6. *Il existe $b_0(s)$ unitaire et à racines rationnelles tel que*

$$\tilde{b_0}(s) - \mathrm{cp}\big(\tilde{b_0}(s)\big) \cdot b_0(s) \in \mathscr{Q}[s].$$

DÉMONSTRATION. Par l'algorithme 4.1, nous savons que pour tout $y_0 \in Y$, le polynôme de Bernstein de $f(x,y_0)$ (qui est à racines dans $\boldsymbol{Q}$) a les mêmes racines que le générateur de $J(f(x,y_0))(0,s)$. Ainsi d'après ce qui précède, pour tout y_0 dans un ouvert de Zariski de $V_m(\mathscr{Q})$, $(\tilde{b_0})_{|y_0}$ est à racines dans $\boldsymbol{Q}$. On peut donc appliquer le lemme de rationalité 5.3 ce qui nous fournit $b_0 \in \boldsymbol{Q}[s]$ unitaire vérifiant la relation $\tilde{b_0}(s) - \mathrm{cp}(\tilde{b_0}(s)) \cdot b_0(s) \in \mathscr{Q}[s]$. En spécialisant encore dans un ouvert de $V_m(\mathscr{Q})$ on montre que ce b_0 est à son tour à racines rationnelles. □

Notons qu'à ce stade de la démonstration, nous savons que pour un $\mathscr{P}$ générique dans $V(\mathscr{Q})$, les racines du polynôme de Bernstein de $(f)_{\mathscr{P}}$ (qui sont celles de $b_0(s)$) sont rationnelles et constantes. En particulier, **le point (i) du théorème 1 est acquis**.

5.3. Fin du parcours: l'étape (δ).

Pour le moment, nous savons que pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \setminus V(h_0h_2h_3)$, les polynômes suivant sont égaux:

- le polynôme b_0 (à racines rationnelles) obtenu dans le lemme précédent,
- le polynôme qu'on note $b_0((f)_{\mathscr{P}})$ et qui est celui qu'on obtient à l'étape (α) de l'algorithme 4.1 appliqué à $(f)_{\mathscr{P}}$.

Au passage, introduisons quelques autres notations. Soient $s_1, \ldots, s_m \in \boldsymbol{Q}$ les racines de b_0. Pour chaque i, et chaque $\mathscr{P}$ comme au dessus, on note $\mu_i(\mathscr{P})$ et $l_i(\mathscr{P})$ les entiers obtenus dans l'algorithme 4.1 appliqué à $(f)_{\mathscr{P}}$.

On sait déjà que les $\mu_i(\mathscr{P})$ sont génériquement constants et tout ce qui nous reste à faire, c'est de montrer qu'en excluant une nouvelle hypersurface de $V(\mathscr{Q})$, les $l_i(\mathscr{P})$ sont aussi constants.

Fixons $i \in \{1, \ldots, m\}$ et posons $\mu_i = \mu_i(\mathscr{Q})$ et $l_i = l_i(\mathscr{Q})$. Maintenant, pour tout entier l avec $\mu_i \leq l \leq l_i$, considérons l'idéal $J(i,l)$ dans $\mathscr{C}[[x]][s][\zeta]$:

$$J(i,l) = \mathscr{C}[[x]][s][\zeta] \cdot \zeta \cdot J + \mathscr{C}[[x]][s][\zeta] \cdot (1-\zeta) \cdot (s-s_i)^l.$$

Pour tout $\mu_i \leq l \leq l_i$, soit $\mathscr{G}(i,l)$ une base standard générique de $J(i,l)$ sur $V(\mathscr{Q})$ relativement à un ordre qui élimine la variable ζ. Notons h'_i le produit des coefficients privilégiés modulo $\mathscr{Q}$ des éléments des $\mathscr{G}(i,l)$ pour $l = \mu_i, \ldots, l_i$. Finalement soit $\mathscr{G}'(i,l)$ les éléments dont le terme privilégié modulo $\mathscr{Q}$ est indépendant de ζ.

En utilisant le lemme 5.2, on a: pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0h_2h_3h'_i)$, $(\mathscr{G}'(i,l))_{\mathscr{P}}$ engendre

$$\begin{aligned}(J(i,l))_{\mathscr{P}} \cap \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]][s] &= \big(\zeta \cdot (J)_{\mathscr{P}} + (1-\zeta)(s-s_i)^l\big) \cap \mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]][s] \\ &= (J)_{\mathscr{P}} \cap \big(\mathscr{F}(\mathscr{P})[[x]][s] \cdot (s-s_i)^l\big).\end{aligned}$$

Ainsi, pour les mêmes $\mathscr{P}$, $\frac{(\mathscr{G}'(i,l))_{\mathscr{P}}}{(s-s_i)^l}$ engendre $(J)_{\mathscr{P}} : (s-s_i)^l$.

Remarque 5.7. Soit $P \in \mathscr{G}'(i,l)$ alors le diagramme de Newton de $(P)_{\mathscr{Q}}$ est égal à $\mathscr{N}^{\mathrm{mod}\mathscr{Q}}(P)$. Or $\frac{1}{(s-s_i)^l}(P)_{\mathscr{Q}}$ est dans $\mathscr{F}(\mathscr{Q})[[x]][s]$ (i.e. n'a pas de pôle en $s = s_i$) donc il existe un unique couple (P^1, P^2) avec $P^1 \in (\mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q})[[x]][s] \cdot (s-s_i)^l$ et $P^2 \in \mathscr{Q}[[x]][s][\zeta]$ tel que $P = P^1 + P^2$. Ici, $(\mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q})[[x]][s]$ est le sous-ensemble de $\mathscr{C}[[x]][s]$ dont les éléments ont leur coefficients dans $\mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}$.

- Montrons que, pour $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0h_2h_3h'_i)$, $l_i(\mathscr{P}) \geq l_i = l_i(\mathscr{Q})$.
  Par l'absurde, soit $l < l_i$ pour lequel il existe un élément dans $(J)_{\mathscr{P}} : (s-s_i)^l$ qui ne s'annule pas en $(x,s) = (0,s_i)$. Cela signifie qu'il existe P dans $\mathscr{G}'(i,l)$ tel que $\big(\frac{P}{(s-s_i)^l}\big)_{\mathscr{P}}(0,s_i) \neq 0$ (voir les remarques à l'étape (δ) de l'algorithme 4.1). Or $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}$ donc $\big(\frac{P}{(s-s_i)^l}\big)_{\mathscr{Q}}(0,s_i) \neq 0$. Cela contredit la propriété de minimalité de $l_i(\mathscr{Q})$.
- Il nous reste à montrer l'inégalité réciproque. Pour cela, nous allons exclure une dernière hypersurface.
  Par définition de $l_i = l_i(\mathscr{Q})$, il existe P dans $\mathscr{G}'(i,l_i)$ tel que $\big(\frac{P}{(s-s_i)^l}\big)_{\mathscr{Q}}(0,s_i) \neq 0$. Pour un tel P, notons

  $$h''_i = \frac{P^1}{(s-s_i)^{l_i}}(0,s_i) \in \mathscr{C} \smallsetminus \mathscr{Q}.$$

  Voir la remarque ci-dessus pour la définition de P^1. Pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h_0h_2h_3h'_ih''_i)$, $\big(\frac{P}{(s-s_i)^l}\big)_{\mathscr{P}}(0,s_i) \neq 0$, ce qui implique $l_i(\mathscr{P}) \leq l_i$.

Bilan:
Si on note h' le produit de $h_0h_2h_3$, des h'_i et des h''_i, alors pour tout $\mathscr{P} \in V(\mathscr{Q}) \smallsetminus V(h')$, le polynôme de Bernstein (formel) de $(f)_{\mathscr{P}}$ est constant. Le point (iii) du théorème 1 en découle puisque le polynôme de Bernstein analytique de f_y est égal à son homologue formel [**BM90**].

6. L'assertion (ii) du théorème 1.

Si $c(s) \in \boldsymbol{C}[s]$ satisfait (1) alors une spécialisation en un y générique de $V_m(\mathscr{Q})$ nous dit que $c(s)$ est un multiple de $b(s)$ (ceci grâce à (iii)). Ainsi pour démontrer (ii), il suffit de montrer que $b(s)$ satisfait (1).

Soit $\mathscr{G}$ une base standard générique de I_2 (cf. page 609) sur $V(\mathscr{Q})$ pour un ordre $\prec$ quelconque (on demande juste que le théorème de division dans $\hat{\mathscr{D}}_n(\boldsymbol{k})[s]$ par rapport à cet ordre existe). Notons c le produit des coefficients privilégiés modulo $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{G}$. Par construction, on sait que $b = (b)_{\mathscr{Q}}$ appartient à $(I_2)_{\mathscr{Q}}$. On peut donc effectuer la division modulo $\mathscr{Q}$ de b par $\mathscr{G}$ dans $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{O}_Y)[s]$, division dont le reste est nul modulo $\mathscr{Q}$ par le corollaire 3.6. Ainsi: $b(s) \in \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{O}_Y[c^{-1}])[s] \cdot I_2 + \hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{Q}[c^{-1}])[s]$. En appliquant $b(s)$ à f^s, on obtient une équation fonctionnelle

$$b(s)f^s = P_0(s)f^{s+1} + P_1(s, \partial_t)f^s$$

où $P_0(s)$ appartient à $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{O}_Y[c^{-1}])[s]$ et $P_1(s, \partial_t)$ à $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{Q}[c^{-1}])\langle s, \partial_t\rangle$.

À partir de cette équation, nous allons faire un passage du formel à l'analytique en nous inspirant de [**BM90**].

On considère $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{O}_Y[c^{-1}])[s]f^{s+1}$ et $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{Q}[c^{-1}])\langle s, \partial_t\rangle f^s$ dans la somme directe suivante

$$\bigoplus_{l \geq 0} \mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]]\xi_l \subset \mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]][1/f, s]f^s$$

où $\xi_0 = f^s$ et $\xi_l = (s - l + 1) \cdots s f^{s-l}$ pour $l \geq 1$.

L'action de $\hat{\mathscr{D}}_n(\mathscr{O}_Y[c^{-1}])\langle s, \partial_t\rangle$ se résume à : pour $u \in \mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]]$,

- $\partial_{x_i} \cdot u\xi_l = \frac{\partial u}{\partial x_i}\xi_l + u\frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_{l+1}$,
- $\partial_t \cdot u\xi_l = -u\xi_{l+1}$,
- $s \cdot u\xi_l = lu\xi_l + uf\xi_{l+1}$.

Maintenant, soit d le maximum des entiers $\deg_s(b(s))$, $\deg_{\partial_x, s}(P_0(s))$ et $\deg_{\partial_x, s, \partial_t}(P_1(s, \partial_t))$. Au vu des trois identités ci-dessus, l'équation du début a lieu dans $\bigoplus_{0 \leq l \leq d} \mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]]\xi_l$. Remarquons dès à présent que:

$$b(s)f^s \in \bigoplus_{0 \leq l \leq d} \mathscr{O}_Z\xi_l.$$

Ecrivons $P_0(s) = \sum V_0(\beta, k)\partial_x^\beta s^k$ avec $V_0(\beta, k) \in \mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]]$. Pour chaque (β, k), écrivons $\partial_x^\beta s^k f^{s+1} = \sum_{0 \leq l \leq d} \phi_0(\beta, k, l)\xi_l$. Remarquons que les $\phi_0(\beta, k, l)$ sont dans $\mathscr{O}_Z$.

De même, on écrit $P_1(s, \partial_t) = \sum V_1(\beta, k, \nu)\partial_x^\beta s^k \partial_t^\nu$ avec $V_1(\beta, k, \nu)$ dans $\mathscr{Q}[c^{-1}][[x]]$ et pour chaque (β, k, ν), $\partial_x^\beta s^k \partial_t^\nu f^s = \sum_{0 \leq l \leq d} \phi_1(\beta, k, \nu, l)\xi_l$. Les $\phi_1(\beta, k, \nu, l)$ sont aussi dans $\mathscr{O}_Z$.

Maintenant, si on note K_0 le nombre de $V_{\beta,k}$, $V_0 \in (\mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]])^{K_0}$ le vecteur formé de ces derniers et Φ_0 la matrice $K_0 \times d$ formée des $\phi_0(\beta, k, l)$ alors on peut représenter

$P_0(s)f^{s+1}$ sous la forme $\Phi_0(V_0)$.

On définit de la même manière K_1, $V_1 \in (\mathscr{Q}[c^{-1}][[x]])^{K_1}$ et Φ_1 (matrice de taille $K_1 \times d$) et on a: $P_1(s, \partial_t)f^s$ s'identifie à $\Phi_1(V_1)$.

Notons que les matrices Φ_0 et Φ_1 sont à coefficients dans $\mathscr{O}_Z \subset \mathscr{O}_Z[c^{-1}]$ ce qui nous permet de définir les applications $\mathscr{O}_Z[c^{-1}]$-linéaires:

– $\Phi_0' : \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}]\right)^{K_0} \to \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}]\right)^d$
– $\Phi_1' : \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}] \cdot \mathscr{Q}\right)^{K_0} \to \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}]\right)^d$

données respectivement par les matrices en question.

Enfin, notons $W \in \left(\mathscr{O}_Z\right)^d$ le vecteur représentant $b(s)f^s$ dans la base $\xi_0, \dots, \xi_l$. Remarquons qu'on peut voir W dans $(\mathscr{O}_Z[c^{-1}])^d$.

Maintenant, soit $q \geq 0$ un entier quelconque. Considérons la troncature de V_0 à l'ordre q, i.e. écrivons $V_0 = V_0' + V_0''$ où $V_0' \in (\mathscr{O}_Y[c^{-1}][x])^{K_0}$ est de degré (en x) plus petit que q, et V_0'' est dans $m^q \cdot (\mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]])^{K_0}$ où m désigne l'idéal de $\mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]]$ engendré par les x_i. Le point clé est que V_0' est dans $\mathscr{O}_Z[c^{-1}]$.

Faisons de même pour $V_1 = V_1' + V_1''$ avec $V_1' \in (\mathscr{Q}[c^{-1}][x])^{K_0}$ et $V_1'' \in m^q \cdot (\mathscr{O}_Y[c^{-1}][[x]])^{K_0}$. On a que V_1' appartient à $\mathscr{O}_Z[c^{-1}] \cdot \mathscr{Q}$.

L'équation fonctionnelle de départ se traduit alors par les égalités

$$\begin{aligned} W &= \Phi_0 \cdot V_0 + \Phi_1 \cdot V_1 \\ &= \Phi_0' \cdot V_0' + \Phi_1' \cdot V_1' + \Phi_0 \cdot V_0'' + \Phi_1 \cdot V_1''. \end{aligned}$$

Or W et $\Phi_0' \cdot V_0' + \Phi_1' \cdot V_1'$ sont dans $(\mathscr{O}_Z[c^{-1}])^d$ donc $\Phi_0 \cdot V_0'' + \Phi_1 \cdot V_1''$ appartient à $(\mathscr{O}_Z[c^{-1}])^d$ et sa valuation en x est au moins q.

Si on note m' l'idéal de $\mathscr{O}_Z[c^{-1}]$ engendré par les x_i, on obtient

$$W \in \operatorname{Im}(\Phi_0') + \operatorname{Im}(\Phi_1') + (m')^q \cdot \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}]\right)^d.$$

Rappelons que Z est un polydisque compact et donc que $\mathscr{O}_Z[c^{-1}]$ est noethérien. Appliquons le théorème d'intersection de Krull (voir [**Eis95**, page 150]). Il existe $p \in m'$ tel que

$$(1+p)W \in \operatorname{Im}(\Phi_0') + \operatorname{Im}(\Phi_1').$$

En remontant la construction, cette égalité se traduit par:

$$(1+p)b(s)f^s \in \mathscr{O}_Z[c^{-1}]\langle\partial_x\rangle[s] \cdot f^{s+1} + \left(\mathscr{O}_Z[c^{-1}] \cdot \mathscr{Q}\right)\langle\partial_x\rangle\langle s, \partial_t\rangle \cdot f^s.$$

On multiplie alors par une puissance k assez grande de c pour chasser les dénominateurs et l'on pose $h = c^k(1+p)$, ce qui fournit la relation cherchée.

Références

[ACG01] A. Assi, F. J. Castro-Jiménez and M. Granger, The analytic standard fan of a $\mathscr{D}$-module, J. Pure Appl. Algebra, **164** (2001), 3–21.

[Bah03a] R. Bahloul, Contributions à l'étude des idéaux de Bernstein-Sato d'un point de vue constructif, thèse de doctorat, Université d'Angers, 2003. http://math.univ-anger.fr/∼bahloul/

[Bah03b] R. Bahloul, Global generic Bernstein-Sato polynomial on an irreducible affine scheme, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **79** (2003), no. 9, 146–149.

[Bah04] R. Bahloul, Generic and comprehensive standard bases, preprint math.AC/0410220 (2004).

[Bah05] R. Bahloul, Démonstration constructive de l'existence de polynômes de Bernstein-Sato pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., **141** (2005), no. 1, 175–191.

[Ber72] I. N. Bernstein, Analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funkcional. Anal. i Priložen., **6** (1972), no. 4, 26–40.

[Bio96a] H. Biosca, Sur l'existence de polynômes de Bernstein génériques associés à une application analytique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **322** (1996), no. 7, 659–662.

[Bio96b] H. Biosca, Polynômes de Bernstein génériques et relatifs associés à une application analytique, thèse de doctorat, Nice Sophia-Antipolis, 1996.

[Bjö73] J. E. Björk, Dimensions of modules over algebras of differential operators, Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe (Colloq. Internat. CNRS, No. 208, Paris, 1972), pp. 6–11. "Agora Mathematica", No. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[Bjö79] J. E. Björk, Rings of differential operators, North-Holland Math. Library, 1979.

[Bri] J. Briançon, Passage du local au global, notes manuscrites.

[BGM92] J. Briançon, F. Geandier et Ph. Maisonobe, Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein, Bull. Soc. Math. France, **120** (1992), no. 1, 15–49.

[BGMM89] J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi, Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein: cas non dégénéré, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **39** (1989), no. 3, 553–610.

[BLM91] J. Briançon, Y. Laurent et Ph. Maisonobe, Sur les modules différentiels holonomes réguliers, cohérents relativement à une projection, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **313** (1991), no. 5, 285–288.

[BM90] J. Briançon et Ph. Maisonobe, Examen de passage du local au global pour les polynômes de Bernstein-Sato, notes non publiées, 1990.

[BM02] J. Briançon et Ph. Maisonobe, Remarques sur l'idéal de Bernstein associé à des polynômes, preprint no. 650, Nice Sophia-Antipolis, 2002.

[Buc70] B. Buchberger, Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems, Aequationes Math., **4** (1970), 374–383.

[Cas86] P. Cassou-Noguès, Racines de polynômes de Bernstein, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **36** (1986), no. 4, 1–30.

[Cas87] P. Cassou-Noguès, Étude du comportement du polynôme de Bernstein lors d'une déformation à μ-constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$, Compositio Math., **63** (1987), no. 3, 291–313.

[Cas88] P. Cassou-Noguès, Polynôme de Bernstein générique, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **58** (1988), 103–123.

[CG04] F. J. Castro-Jiménez and M. Granger, Explicit calculations in rings of differential operators, Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques, Sémin. Congr., 8, Soc. Math. France, Paris, 2004, 89–128.

[CLO92] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, Ideals, varieties, and algorithms, Undergrad. Texts Math., Springer, New York, 1992, Seconde édition 1997.

[Eis95] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, Grad. Texts in Math., **150**, Springer, New York, 1995.

[Fri67] J. Frisch, Points de platitude d'un espace analytique, Invent. Math., **4** (1967), 118–138.

[Gea89] F. Geandier, Polynômes de Bernstein et déformations à nombre de Milnor constant, C. R.

Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **309** (1989), no. 13, 831–834.

[Gea91] F. Geandier, Déformations à nombre de Milnor constant: quelques résultats sur les polynômes de Bernstein, Compositio Math., **77** (1991), no. 2, 131–163.

[Gyo93] A. Gyoja, Bernstein-Sato's polynomial for several analytic functions, J. Math. Kyoto Univ., **33** (1993), no. 2, 399–411.

[Har92] J. Harris, Algebraic Geometry. A first course, Grad. Texts Math., **133**, Springer, New York, 1992.

[Kas76] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems. Rationality of roots of B-functions, Invent. Math., **38** (1976/77), no. 1, 33–53.

[Lê73] D. T. Lê, Topologie des singularités des hypersurfaces complexes, Singularités à Cargèse Astérisque, Nos. 7 et 8, Soc. Math. France, Paris, 1973, pp. 171–182.

[LR76] D. T. Lê and C. P. Ramanujam, The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type, Amer. J. Math., **98** (1976), no. 1, 67–78.

[Ley01] A. Leykin, Constructibility of the set of polynomials with a fixed Bernstein-Sato Polynomial: an algorithmic approach, J. Symbolic Comput., **32** (2001), no. 6, 663–675.

[Mal74] B. Malgrange, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, Lecture Notes in Math., **459**, Springer, Berlin, 1975, 98–119.

[Oak97a] T. Oaku, Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial, J. Pure Appl. Algebra, **117/118** (1997), 495–518.

[Oak97b] T. Oaku, An algorithm of computing b-functions, Duke Math. J., **87** (1997), no. 1, 115–132.

[Sab87a] C. Sabbah, Proximité évanescente I. La structure polaire d'un $\mathscr{D}$-Module, Appendice en collaboration avec F. J. Castro-Jiménez, Compositio Math., **62** (1987), no. 3, 283–328.

[Sab87b] C. Sabbah, Proximité évanescente II. Équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., **64** (1987), no. 2, 213–241.

[SS72] M. Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **69** (1972), 1081–1082; Ann. of Math. (2), **100** (1974), 131–170.

[Yan78] T. Yano, On the theory of b-functions, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **14** (1978), no. 1, 111–202.

Rouchdi Bahloul
Laboratoire de Mathématiques
Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
45 avenue des États-Unis
78035 Versailles
France
E-mail: bahloul@math.uvsq.fr