J. Math. Soc. Japan
Vol. 59, No. 4 (2007) pp. 1105–1134
doi: 10.2969/jmsj/05941105

Équations cohomologiques de flots riemanniens et de difféomorphismes d'Anosov

By Akbar Dehghan-Nezhad and Aziz El Kacimi Alaoui

(Received Oct. 18, 2006)
(Revised Jan. 22, 2007)

Abstract. In this paper: i) We compute the leafwise cohomology of a complete Riemannian Diophantine flow. ii) We solve explicitly the discrete cohomological equation for the Anosov diffeomorphism on the torus $\boldsymbol{T}^n$ defined by a hyperbolic and diagonalizable matrix $A \in SL(n, \boldsymbol{Z})$ whose eigenvalues are all real positive numbers. We use this to solve the continuous cohomological equation of the Anosov flow $\mathscr{F}$ on the hyperbolic torus $\boldsymbol{T}_A^{n+1}$ obtained from A by suspension. This enables us to compute some other geometrical objects associated to the diffeomorphism A and the foliation $\mathscr{F}$ like the invariant distributions and the leafwise cohomology.

Introduction.

Un système dynamique discret (SDD en abrégé) est la donnée d'un couple (M, γ) où M est une variété et γ un difféomorphisme de M. On dira que deux SDD (M, γ) et (N, σ) sont conjugués s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $\sigma = h \circ \gamma \circ h^{-1}$. Un système dynamique continu (SDC en abrégé) est la donnée d'un couple (M, X) où M est une variété et X un champ de vecteurs sur M. Deux SDC (M, X) et (N, Y) sont dits conjugués s'il existe un difféomorphisme $h : M \longrightarrow N$ tel que $h_*(X) = Y$.

On se donne un SDD (M, γ) et un SDC (M, X). On note $C^\infty(M)$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur M. On s'intéresse aux problèmes suivants. Soit $g \in C^\infty(M)$. (1) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $f - f \circ \gamma = g$? (2) Existe-t-il $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$? L'équation (1) est appelée équation cohomologique discrète du SDD (M, γ) et l'équation (2) équation cohomologique continue du SDC (M, X).

La résolution de ces deux équations est un problème important en théorie des systèmes dynamiques. Mais il est très difficile d'attaque dans la plupart des cas. On peut déjà remarquer (et ceci nous sera utile dans la suite) que si (M, γ) et (N, σ) sont deux SDD conjugués par $h : M \longrightarrow N$, alors $v \in C^\infty(N)$ est solution de l'équation $v - v \circ \sigma = g$ si, et seulement si, $u = v \circ h$ est solution de $u - u \circ \gamma = g \circ h$. De même si (M, X) et (N, Y) sont deux SDC conjugués par $h : M \longrightarrow N$, alors $v \in C^\infty(N)$ est solution de l'équation $Y \cdot v = g$ si, et seulement si, $u = v \circ h$ est solution de $X \cdot u = g \circ h$. Pour résoudre ce problème, on peut donc se donner la liberté de remplacer un système dynamique par tout autre qui lui est conjugué.

Les équations cohomologiques (discrètes ou continues) apparaissent de façon plus ou moins explicite dans pas mal de domaines mathématiques. Dans [**Li1**] A. Livsic s'est

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 53C12; Secondary 37A05, 37C10, 58A30.
Key Words and Phrases. équation cohomologique, distribution invariante, flot d'Anosov.

intéressé à la résolution des ECD avec des conditions holdériennes sur les fonctions. En classe C^∞, des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions ont été données pour un flot d'Anosov dans [**LMM**, Theorem 2.1, p.566] en termes de distributions invariantes. Il y a aussi les travaux de S. Greenfield et N. Wallach [**GW**], ceux de L. Flaminio et G. Forni [**FF1**] et [**FF2**] ou encore l'article [**Fo**] de G. Forni où il étudie l'équation cohomologique continue associée à un champ de vecteurs préservant un volume sur une surface compacte de genre supérieur ou égal à 2. Des résultats mettant un lien entre les équations cohomologiques continues et la théorie des représentations se trouvent dans [**Mi**].

Le but de notre travail est de résoudre explicitement ces équations cohomologiques (cas continu et cas discret) dans des situations particulières. Nous rappellerons le cas d'un champ linéaire sur le tore $\boldsymbol{T}^n$, qui est déjà connu mais qui nous sera utile. On regardera ensuite le cas d'une fibration en tores avec un champ linéaire diophantien tangent. Cette situation contient en particulier le cas d'un champ invariant (à gauche ou à droite) sur un groupe de Lie. De façon plus générale, on étudiera la situation d'un flot riemannien complet. Nous traiterons ensuite le cas d'un difféomorphisme et le champ qu'il définit par suspension ; nous verrons que, dans cette situation géométrique, la résolution de l'équation cohomologique continue du champ est équivalente à celle de l'équation cohomologique discrète du difféomorphisme. Enfin, nous passerons à l'équation cohomologique discrète associée à un difféomorphisme d'Anosov sur $\boldsymbol{T}^n$ induit par une matrice hyperbolique $A \in SL(n, \boldsymbol{Z})$ diagonalisable et à valeurs propres réelles positives ainsi que l'équation cohomologique continue du flot d'Anosov qu'elle définit par suspension sur le tore hyperbolique $\boldsymbol{T}_A^{n+1}$. Nous en déduisons d'autres invariants géométriques associés à de tels flots et difféomorphismes comme par exemple les distributions invariantes et la cohomologie feuilletée.

Comme nous l'avons déjà signalé, le problème de l'existence des solutions pour un flot d'Anosov sur une variété compacte est résolu dans [**LMM**] mais notre travail donne une démonstration directe, explicite et élémentaire. En plus, les solutions sont fabriquées par des opérateurs compacts qui sont presque des "inverses à gauche" de l'opérateur cobord (dans le cas discret) et l'opérateur de dérivation le long du champ (dans le cas continu).

Dans toute la suite le mot "variété" signifiera variété différentiable de classe C^∞ connexe et orientable. Sauf mention expresse du contraire, les objets géométriques que l'on considérera (applications, difféomorphismes, champs de vecteurs, formes différentielles *etc.*) seront aussi de classe C^∞. On adoptera les notations suivantes :

– Si $\xi \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel au-dessus de M, $C^\infty(\xi)$ désignera l'espace de Fréchet de ses sections C^∞.

– Si $f : M \longrightarrow N$ est une application différentiable, $d_x f : T_x M \longrightarrow T_{f(x)} N$ sera la différentielle de f au point $x \in M$.

– Si $\gamma : M \longrightarrow M$ est une bijection de M, pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$, γ^k sera la composée $|k|$ fois de γ ou de son inverse γ^{-1} suivant que k est positif ou négatif.

1. Questions préliminaires.

Nous exposons dans cette section diverses questions fortement liées aux équations cohomologiques susmentionnées. Soit M une variété compacte. L'espace vectoriel $C^\infty(M)$ des fonctions complexes de classe C^∞ sur M sera muni de sa topologie C^∞ usuelle ; elle en fait un espace de Fréchet.

1.1. Distributions invariantes.

Une distribution sur M est une forme linéaire continue $\varphi \in C^\infty(M) \xrightarrow{T} \langle T, \varphi\rangle \in \boldsymbol{C}$ *i.e.* un élément du dual topologique $\mathscr{D}'(M)$ de $C^\infty(M)$. L'espace vectoriel $\mathscr{D}'(M)$ sera muni de la topologie faible i.e. la topologie la moins fine qui rend continues toutes les évaluations linéaires $e_\varphi : T \in \mathscr{D}'(M) \longmapsto \langle T, \varphi\rangle \in \boldsymbol{C}$. Toute forme volume μ sur M permet de définir une injection $f \in C^\infty(M) \longmapsto T_f \in \mathscr{D}'(M)$ donnée par :

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_M (f\varphi)\mu.$$

Toute distribution de ce type est dite régulière.

Soit $M \xrightarrow{\gamma} M$ un difféomorphisme. Une distribution $T \in \mathscr{D}'(M)$ est dite invariante par γ (ou simplement γ-invariante) si elle vérifie $\langle T, \varphi \circ \gamma\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$. On dira que T est invariante par un groupe Γ de difféomorphismes de M (ou Γ-invariante) si elle est invariante par chacun de ses éléments. (Il suffit en fait de vérifier la propriété sur les éléments d'un système générateur de Γ.) Les distributions Γ-invariantes forment un sous-espace vectoriel $\mathscr{D}'_\Gamma(M)$ fermé (pour la topologie faible) de $\mathscr{D}'(M)$. Le calcul de l'espace $\mathscr{D}'_\Gamma(M)$ est loin d'être trivial même pour des données (M, Γ) simples et explicites. Quelques travaux cependant ont été entrepris dans cette direction (*cf.* par exemple [**AE**], [**EMM**]).

Notons $\mathscr{C}$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(M)$ engendré algébriquement par les éléments de la forme $\varphi - \varphi \circ \gamma$ où $\varphi \in C^\infty(M)$ et $\gamma \in \Gamma$. Par définition même, une distribution est Γ-invariante si, et seulement si, elle est nulle sur $\mathscr{C}$; elle induit donc une forme linéaire continue sur l'espace quotient $C^\infty(M)/\mathscr{C}$ (ou sur le séparé associé $C^\infty(M)/\overline{\mathscr{C}}$ où $\overline{\mathscr{C}}$ désigne l'adhérence de $\mathscr{C}$). Dans le cas où Γ est engendré par un seul élément γ, $C^\infty(M)/\mathscr{C}$ n'est rien d'autre que le premier espace de cohomologie $H^1(\boldsymbol{Z}, C^\infty(M))$ du groupe $\boldsymbol{Z}$ à valeurs dans le $\boldsymbol{Z}$-module $C^\infty(M)$ (l'action étant $(k, f) \in \boldsymbol{Z} \times C^\infty(M) \longrightarrow f \circ \gamma^k \in C^\infty(M)$). Son calcul se ramène à celui de $\mathscr{C}$ et donc à la résolution de l'équation cohomologique discrète (le terme “cohomologique” s'introduit de façon naturelle) :

$$f - f \circ \gamma = g. \tag{1}$$

1.2. Équation cohomologique continue.

Soit X un champ de vecteurs sur M. Alors X définit un opérateur différentiel du premier ordre $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ par $(X \cdot f)(x) = d_x f(X_x)$. Il est naturel de s'intéresser aux solutions de l'équation cohomologique continue :

$$X \cdot f = g. \tag{2}$$

L'opérateur $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ admet une extension naturelle aux distributions $X : T \in \mathscr{D}'(M) \longrightarrow X \cdot T \in \mathscr{D}'(M)$ avec $\langle X \cdot T, \varphi\rangle = -\langle T, X \cdot \varphi\rangle$. On pourrait donc s'intéresser à la résolution de l'équation cohomologique continue au niveau des distributions:

$$X \cdot T = S. \tag{3}$$

Une distribution T est dite invariante par X ou X-invariante si elle vérifie $X \cdot T = 0$ i.e. elle est nulle sur l'image de $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ qui est l'espace des divergences de X. Une condition nécessaire (et non suffisante en général) pour que l'équation (2) admette une solution f est donc $\langle T, g\rangle = 0$ pour toute distribution T invariante par X.

Le problème de la régularité des solutions a une grande importance. On dira que X est globalement hypoelliptique si, pour toute distribution $T \in \mathscr{D}'(M)$:

$$X \cdot T \in C^\infty(M) \Longrightarrow T \in C^\infty(M).$$

Le seul exemple connu d'un tel champ est celui d'un champ linéaire diophantien (cf. 2.3) sur le tore $\boldsymbol{T}^n$. Ce qui a amené S. Greenfield et N. Wallach à émettre dans [**GW**] la :

Conjecture. *Soient M une variété compacte orientable de dimension n et X un champ de vecteurs partout non nul préservant un volume C^∞ sur M. On suppose que X est globalement hypoelliptique. Alors M est difféomorphe au tore $\boldsymbol{T}^n$ et X est conjugué à un champ linéaire diophantien.*

1.3. Cohomologie feuilletée.

On rappelle qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ de dimension m sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré τ de rang m du fibré tangent TM complètement intégrable, c'est-à-dire que pour toutes sections $X, Y \in C^\infty(\tau)$ de τ (*i.e.* des champs de vecteurs sur M tangents à τ), le crochet $[X, Y]$ est encore une section de τ. Les sous-variétés connexes tangentes à τ sont appelées feuilles de $\mathscr{F}$.

Soit $\mathscr{F}$ un feuilletage de dimension m sur M. Pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, on note $\Lambda^r(T^*\mathscr{F})$ le fibré coalgèbre extérieure de degré r sur $T\mathscr{F}$ (le fibré tangent à $\mathscr{F}$). Ses sections sont les formes différentielles feuilletées de degré r ; elles forment un espace vectoriel qu'on notera $\Omega^r_{\mathscr{F}}(M)$. On a un opérateur de différentiation extérieure le long des feuilles de $\mathscr{F}$ $d_{\mathscr{F}} : \Omega^r_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathscr{F}}(M)$ défini (comme dans le cas classique) par la formule :

$$\begin{aligned} d_{\mathscr{F}}\alpha(X_1, \cdots, X_{r+1}) = &\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^i X_i \cdot \alpha(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{r+1}) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{r+1}) \end{aligned}$$

où $\widehat{X}_i$ signifie qu'on a omis l'argument X_i. On vérifie facilement que l'opérateur $d_{\mathscr{F}}$ est de carré nul. On obtient ainsi un complexe différentiel (dit complexe feuilleté) :

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathscr{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathscr{F}}} \Omega^1_{\mathscr{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathscr{F}}} \cdots \xrightarrow{d_{\mathscr{F}}} \Omega^{m-1}_{\mathscr{F}}(M) \xrightarrow{d_{\mathscr{F}}} \Omega^m_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow 0. \qquad \text{(CF)}$$

On note $Z^r_{\mathscr{F}}(M)$ le noyau de $d_{\mathscr{F}} : \Omega^r_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}_{\mathscr{F}}(M)$ et $B^r_{\mathscr{F}}(M)$ l'image de $d_{\mathscr{F}} : \Omega^{r-1}_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow \Omega^r_{\mathscr{F}}(M)$. Le quotient $H^r_{\mathscr{F}}(M) = Z^r_{\mathscr{F}}(M)/B^r_{\mathscr{F}}(M)$ est le $r^{\text{ème}}$ espace vectoriel de cohomologie feuilletée de $(M, \mathscr{F})$. C'est un invariant important du feuilletage. Par exemple le dual topologique de $H^m_{\mathscr{F}}(M)$ contient les cycles feuilletés au sens de [**Su**] et donc, en particulier, les mesures transverses invariantes (*cf.* [**Ek**]). Le calcul de $H^*_{\mathscr{F}}(M)$ est souvent très ardu ! Pour une utilisation intéressante de la cohomologie feuilletée dans l'étude de la rigidité de certaines actions de groupes de Lie voir [**MM**].

Il arrive que l'espace vectoriel topologique $H^r_{\mathscr{F}}(M)$ (les espaces de formes feuilletées sont munis de la topologie C^∞) ne soit pas séparé ! On appelle alors cohomologie feuilletée réduite le quotient $\bar{H}^r_{\mathscr{F}}(M) = Z^r_{\mathscr{F}}(M)/\overline{B^r_{\mathscr{F}}(M)}$ où $\overline{B^r_{\mathscr{F}}(M)}$ est l'adhérence de $B^r_{\mathscr{F}}(M)$.

Si X est un champ non singulier sur M, il induit un feuilletage (ou flot) $\mathscr{F}$. On peut définir sa cohomologie feuilletée de façon plus simple. Notons τ le fibré tangent à $\mathscr{F}$ et ν un sous-fibré supplémentaire à τ dans TM. Soit χ la 1-forme différentielle telle que $\chi(X) = 1$ et $\chi_{|\nu} = 0$. Il est facile de voir que, pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, on a :

$$\Omega^r_{\mathscr{F}}(M) = \begin{cases} C^\infty(M) & \text{si } r = 0 \\ C^\infty(M) \otimes \chi & \text{si } r = 1 \\ 0 & \text{si } r \geq 2 \end{cases}$$

et que le complexe feuilleté se réduit à :

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathscr{F}}(M) \xrightarrow{d_X} \Omega^1_{\mathscr{F}}(M) \longrightarrow 0$$

où d_X est l'opérateur défini par $d_X f = (X \cdot f) \otimes \chi$. Son conoyau $\Omega^1_{\mathscr{F}}(M)/\operatorname{Im} d_X$ est exactement le premier espace de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathscr{F}}(M)$ de $\mathscr{F}$. Il ne dépend pas du champ qui le définit : on vérifie aisément, en exhibant explicitement un isomorphisme de complexes feuilletés, qu'on obtiendrait la même cohomologie si on remplaçait le champ X par un champ $Z = hX$ avec h fonction partout non nulle. On montre qu'il ne dépend pas non plus du choix du fibré supplémentaire ν.

Le calcul de l'espace $H^1_{\mathscr{F}}(M)$ revient exactement à la résolution de l'équation cohomologique continue pour le champ X.

Revenons maintenant aux équations (1) et (2). Leur résolution sera l'une des questions que nous aborderons dans ce travail pour des données particulières (M, γ) et (M, X).

2. Fibrations en tores.

Soit $n \geq 2$ un entier. L'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^n$ sera équipé de son produit scalaire habituel $\langle \ , \ \rangle$; la norme associée sera notée $|\cdot|$. Le tore $\boldsymbol{T}^n$ est obtenu comme le quotient de $\boldsymbol{R}^n$ par son réseau standard $\boldsymbol{Z}^n$. Pour $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$, on note $\Theta_{\boldsymbol{m}}$ la fonction $\Theta_{\boldsymbol{m}}(x) =$

$e^{2i\pi\langle \boldsymbol{m},x\rangle}$. Une fonction sur $\boldsymbol{T}^n$ n'est rien d'autre qu'une fonction $f : \boldsymbol{R}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}$ qui vérifie $f(x+\boldsymbol{m}) = f(x)$ pour tous $x \in \boldsymbol{R}^n$ et $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$.

Si $f : \boldsymbol{T}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}$ est une fonction intégrable, elle peut être développée en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} f_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}}(x)$$

où les $f_{\boldsymbol{m}}$ sont les coefficients de Fourier donnés par les formules intégrales :

$$f_{\boldsymbol{m}} = \int_{\boldsymbol{T}^n} f(x)e^{-2i\pi\langle \boldsymbol{m},x\rangle}dx.$$

Si en plus f est de carré intégrable, les coefficients $f_{\boldsymbol{m}}$ vérifient la condition de convergence $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |f_{\boldsymbol{m}}|^2 < +\infty$.

De la même façon, toute distribution T sur le tore $\boldsymbol{T}^n$ (vue comme une distribution $\boldsymbol{Z}^n$-périodique sur $\boldsymbol{R}^n$) peut s'écrire sous la forme :

$$T = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} T_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}}$$

où la famille de nombres complexes $T_{\boldsymbol{m}}$ (indexée par $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$) est à croissance polynomiale, c'est-à-dire, il existe un entier $r \in \boldsymbol{N}$ et une constante $C > 0$ tels que $|T_{\boldsymbol{m}}| \leq C|\boldsymbol{m}|^r$ pour tout $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$.

Pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, on note $W^{1,r}$ l'espace des fonctions f sur le tore $\boldsymbol{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^r|f_{\boldsymbol{m}}| < +\infty$. De même, $W^{2,r}$ sera l'espace des fonctions f sur le tore $\boldsymbol{T}^n$ données par leurs coefficients de Fourier $(f_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}$ vérifiant la condition $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^{2r}|f_{\boldsymbol{m}}|^2 < +\infty$. Ce sont des espaces complets pour les normes :

$$\|f\|_{1,r} = |f_{\boldsymbol{0}}| + \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} |\boldsymbol{m}|^r|f_{\boldsymbol{m}}| \quad \text{pour } f \in W^{1,r}$$

et

$$\|f\|_{2,r} = \sqrt{|f_{\boldsymbol{0}}|^2 + \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} |\boldsymbol{m}|^{2r}|f_{\boldsymbol{m}}|^2} \quad \text{pour } f \in W^{2,r}$$

L'espace $W^{2,r}$ est le $r^{\text{ème}}$ espace de Sobolev du tore $\boldsymbol{T}^n$; il a une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit hermitien :

$$\langle f,g\rangle_r = f_{\boldsymbol{0}}\overline{g}_{\boldsymbol{0}} + \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} |\boldsymbol{m}|^{2r} f_{\boldsymbol{m}}\overline{g}_{\boldsymbol{m}}.$$

On a des inclusions naturelles :

$$C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \subset \cdots \subset W^{1,r+1} \subset W^{1,r} \subset \cdots \subset W^{1,0}$$

et

$$C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \subset \cdots \subset W^{2,r+1} \subset W^{2,r} \subset \cdots \subset W^{2,0} = L^2(\boldsymbol{T}^n).$$

La proposition suivante est facile à démontrer.

PROPOSITION 2.1. *Soit* $T = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} T_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}}$ *une série* (*les* $T_{\boldsymbol{m}}$ *sont des nombres complexes*). *Alors les assertions* i), ii) *et* iii) *qui suivent sont équivalentes* :

i) T *est une distribution régulière* (*i.e.* T *est une fonction de classe* C^∞) ;

ii) *pour tout* $r \in \boldsymbol{N}$, *la série* $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^{2r}|T_{\boldsymbol{m}}|^2$ *est convergente* ;

iii) *pour tout* $r \in \boldsymbol{N}$, *la série* $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^{r}|T_{\boldsymbol{m}}|$ *est convergente.*

Pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, *les injections* $j_{1,r} : W^{1,r+1} \hookrightarrow W^{1,r}$ *et* $j_{2,r} : W^{2,r+1} \hookrightarrow W^{2,r}$ *sont des opérateurs compacts.*

Les trois premiers points de cette proposition disent : $\bigcap_{r\in\boldsymbol{N}} W^{1,r} = \bigcap_{r\in\boldsymbol{N}} W^{2,r} = C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$. L'assertion ii) nous servira dans cette section 2 et l'assertion iii) dans la section 5. Elle seront utilisées de façon substantielle.

On considère le champ de vecteurs linéaire (*i.e.* dont les coefficients sont constants) $X = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ sur le tore $\boldsymbol{T}^n$ où $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ est un vecteur de $\boldsymbol{R}^n$. On suppose que les nombres $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ sont $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants ; cela implique en particulier que les orbites de X sont denses et que la somme $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ est non nulle. La 1-forme différentielle $\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}\sum_{i=1}^n dx_i$ sera notée χ ; elle vaut 1 sur X et son noyau ν est l'hyperplan d'équation $\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n = 0$. Le champ X définit un opérateur différentiel d'ordre 1 et l'équation cohomologique associée s'écrit :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = g. \tag{4}$$

Pour la résoudre, nous allons utiliser le développement en série de Fourier des fonctions sur le tore $\boldsymbol{T}^n$. On aura besoin d'une définition sur les approximations diophantiennes.

Tout vecteur $\alpha \in \boldsymbol{R}^n$ définit une forme linéaire sur $\boldsymbol{R}^n$: $x \in \boldsymbol{R}^n \longmapsto \langle \alpha, x\rangle \in \boldsymbol{R}$ et donc a fortiori sur le réseau $\boldsymbol{Z}^n$.

DEFINITION 2.2 ([**Sc**]).

i) On dira que le vecteur α est diophantien s'il existe des nombres réels $A > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|\langle \alpha, \boldsymbol{m}\rangle| \geq (A/(|\boldsymbol{m}|^\delta))$ pour tout $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ non nul. Dans ce cas, on dira que le champ X est diophantien.

ii) On dira que α est un vecteur de Liouville s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $\boldsymbol{m}_\delta \in \boldsymbol{Z}^n$ vérifiant $|\langle \alpha, \boldsymbol{m}_\delta\rangle| \leq (A/(|\boldsymbol{m}_\delta|^\delta))$. Dans ce cas, on dira que le champ X est de Liouville.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le théorème qui suit. (Comme nous l'avons déjà signalé, ce résultat est connu et fait partie du folklore.)

THÉORÈME 2.3.

i) *Supposons X diophantien. Alors l'équation* (4) *a une solution* $f \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ *si, et seulement si* $\int_{\boldsymbol{T}^n} g(x)dx = 0$. *Dans ce cas, l'espace vectoriel* $H^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ *est de dimension* 1 *engendré par la* 1*-forme feuilletée* χ.

ii) *Si X est de Liouville, il existe une famille infinie libre* $(g_\delta)_{\delta\in\boldsymbol{N}}$ *telle que l'équation* $X\cdot f = g_\delta$ *n'ait aucune solution. Dans ce cas,* $H^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ *est un espace vectoriel topologique de dimension infinie non séparé. Mais* $\overline{H}^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ *est de dimension* 1 *engendré par* χ.

iii) *Dans tous les cas, l'espace* $\mathscr{D}'_X(\boldsymbol{T}^n)$ *des distributions X-invariantes est de dimension* 1 *engendré par la mesure de Haar* $dx_1\otimes\cdots\otimes dx_n$ *sur le groupe de Lie* $\boldsymbol{T}^n$.

DÉMONSTRATION. Si on intègre les deux membres de l'équation (4), celui de gauche donne 0. Donc une condition nécessaire d'existence d'une solution est $\int_{\boldsymbol{T}^n} g(x)dx = 0$. Supposons-la remplie. Les développements de Fourier de f et g :

$$f(x) = \sum_{\boldsymbol{m}\in Z^n} f_{\boldsymbol{m}} e^{2i\pi\langle x,\boldsymbol{m}\rangle} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{\boldsymbol{m}\in Z^n} g_{\boldsymbol{m}} e^{2i\pi\langle x,\boldsymbol{m}\rangle}$$

permettent de ramener l'équation (4) au système suivant :

$$2i\pi\langle\boldsymbol{m},\alpha\rangle f_{\boldsymbol{m}} = g_{\boldsymbol{m}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n. \tag{S}$$

La condition nécessaire $\int_{\boldsymbol{T}^n} g(x)dx = 0$ signifie en fait que $g_{\boldsymbol{0}} = 0$. On pose :

$$f_{\boldsymbol{m}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \\ \dfrac{g_{\boldsymbol{m}}}{2i\pi\langle\alpha,\boldsymbol{m}\rangle} & \text{si } \boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

La fonction f est donc donnée formellement par ses coefficients de Fourier $(f_{\boldsymbol{m}})_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}$. Etudions sa régularité. Soit $r\in\boldsymbol{N}$.

i) α diophantien

On a :

$$|\boldsymbol{m}|^{2r}|f_{\boldsymbol{m}}|^2 = |\boldsymbol{m}|^{2r}\left|\frac{g_{\boldsymbol{m}}}{2i\pi\langle\alpha,\boldsymbol{m}\rangle}\right|^2 \leq \frac{1}{A^2 4\pi^2}|g_{\boldsymbol{m}}|^2|\boldsymbol{m}|^{2(r+\delta)}.$$

Comme g est de classe C^∞, la série $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}|g_{\boldsymbol{m}}|^2|\boldsymbol{m}|^{2(r+\delta)}$ converge (proposition 2.1), par suite $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}|\boldsymbol{m}|^{2r}|f_{\boldsymbol{m}}|^2 < +\infty$ qui montre bien que f est de classe C^∞. On voit donc que le champ X est globalement hypoelliptique.

Le fait que l'espace vectoriel $H^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ soit de dimension 1 engendré par la 1-forme χ est immédiat.

ii) α de Liouville

On sait qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $\delta\in\boldsymbol{N}^*$, il existe $\boldsymbol{m}_\delta\in\boldsymbol{Z}^n$ vérifiant

$|\langle\alpha, \boldsymbol{m}_\delta\rangle| \leq (A/(|\boldsymbol{m}|^\delta))$. Soit $(\delta_k)_k$ une suite strictement croissante dans $\boldsymbol{N}^*$; les $\boldsymbol{m}_{\delta_k}$ correspondants seront simplement notés $\boldsymbol{m}_k$. On définit alors une fonction g à l'aide de ses coefficients de Fourier :

$$g_{\boldsymbol{m}} = \begin{cases} |\boldsymbol{m}_k|^{-\frac{\delta_k}{2}} & \text{si } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier, à l'aide de l'assertion iii) de la proposition 2.1, que g est de classe C^∞. Mais :

$$\begin{aligned} |f_{\boldsymbol{m}_k}|^2 &= \left|\frac{g_{\boldsymbol{m}_k}}{2i\pi\langle\alpha, \boldsymbol{m}_k\rangle}\right|^2 \\ &= \frac{|\boldsymbol{m}_k|^{-\delta_k}}{4\pi^2|\langle\alpha, \boldsymbol{m}_k\rangle|^2} \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2 A^2}|\boldsymbol{m}_k|^{\delta_k}. \end{aligned}$$

Les coefficients $f_{\boldsymbol{m}}$ sont donc à croissance surpolynomiale et ne définissent même pas une distribution f solution de l'équation $X \cdot f = g$! De cette façon on peut fabriquer une famille infinie libre de fonctions $(g^\delta)_{\delta\in\boldsymbol{N}^*}$ de classe C^∞ pour lesquelles l'équation n'a pas de solution. Le conoyau de l'opérateur $X : C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ est donc de dimension infinie.

On peut aussi montrer que lorsque le vecteur α est de Liouville, le champ X n'est pas globalement hypoelliptique. En effet, soit $(\boldsymbol{m}_k)$ la famille de multi-indices qu'on vient de considérer associée à la suite $(\delta_k)_k$. Soient q n'importe quel entier naturel et T la distribution sur $\boldsymbol{T}^n$ (qui n'est même pas une fonction de carré intégrable) donnée par ses coefficients de Fourier :

$$T_{\boldsymbol{m}} = \begin{cases} |\boldsymbol{m}_k|^q & \text{si } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $X \cdot T$ est la distribution donnée par les coefficients :

$$(X \cdot T)_{\boldsymbol{m}} = \begin{cases} \langle\alpha, \boldsymbol{m}_k\rangle|\boldsymbol{m}_k|^q & \text{si } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un calcul simple, utilisant la décroissance rapide de la quantité $|\langle\alpha, \boldsymbol{m}_k\rangle|$ (quand k tend vers l'infini) montre que $X \cdot T$ est une fonction de classe C^∞.

Si g est un polynôme trigonométrique sans terme constant, l'équation a toujours une solution : le problème de la convergence ne se pose pas. Comme l'adhérence du sous-espace engendré algébriquement par ces polynômes est de codimension 1 (c'est l'orthogonal de la fonction constante 1), l'image de l'opérateur $X : C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longrightarrow C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ n'est pas fermée, donc $H^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ n'est pas séparé mais l'espace $\overline{H}^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$ de cohomologie feuilletée réduite est de dimension 1 engendré par χ.

iii) Comme l'espace vectoriel topologique $\mathscr{D}'_X(\boldsymbol{T}^n)$ des distributions X-invariantes est toujours le dual topologique de $\overline{H}^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^n)$, il est de dimension 1. Et on voit de façon immédiate, qu'à une constante multiplicative près, il ne contient que la mesure de Lebesgue $dx_1 \otimes \cdots \otimes dx_n$. $\square$

Soient M une variété et X un champ de vecteurs non singulier sur M. On suppose que les adhérences des orbites de X sont des tores $\boldsymbol{T}^n$ et qu'elles sont les fibres d'une fibration localement triviale au-dessus d'une variété W de dimension d :

$$\boldsymbol{T}^n \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} W.$$

Ceci est le cas si, par exemple, le champ X définit un flot transversalement parallélisable complet (*cf.* la section qui suit). Pour tout ouvert $U \subset W$ relativement compact et trivialisant la fibration, on notera $(u, x_1, \cdots, x_n)$ les coordonnées d'un point de $\pi^{-1}(U)$ via le difféomorphisme (de trivialisation) $\phi : U \times \boldsymbol{T}^n \longrightarrow V = \pi^{-1}(U)$.

Nous allons mettre une topologie sur l'espace des fonctions $f : M \longrightarrow \boldsymbol{C}$ adaptée à cette structure et qui permet le contrôle de la régularité de ces fonctions. Soit $f : M \longrightarrow \boldsymbol{C}$ une fonction mesurable. Via le difféomorphisme ϕ, la restriction de f à V peut être vue comme une fonction notée $f_U : U \times \boldsymbol{T}^n \longrightarrow \boldsymbol{C}$; on utilisera donc les coordonnées $(u, x) = (u, x_1, \cdots, x_n)$. On dira que f est localement de carré intégrable si tout point admet un voisinage du type U tel que $|f_U|^2$ soit intégrable. On regardera alors f_U comme une distribution qu'on notera simplement f.

Fixons quelques notations. Supposons qu'on se situe sur l'espace $\boldsymbol{R}^p$ avec des coordonnées $(z_1, \cdots, z_p)$. Pour un multi-indice $\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_p) \in \boldsymbol{N}^p$, on pose :

i) $\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{s}} = k_1^{s_1} \cdots k_p^{s_p}$ pour tout $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_p) \in \boldsymbol{N}^p$,

ii) $|\boldsymbol{k}| = k_1 + \cdots + k_p$ (c'est la longueur de $\boldsymbol{k}$),

iii) $\frac{\partial^{|\boldsymbol{k}|}}{\partial z^{\boldsymbol{k}}} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{k}|}}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_p^{k_p}}$.

Si on fixe $u \in W$, pour tous multi-indices $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{N}^d$ et $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{N}^n$, la distribution $\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|+|\boldsymbol{s}|} f}{\partial u^{\boldsymbol{r}} \partial x^{\boldsymbol{s}}}$ se développe en série de Fourier :

$$\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|+|\boldsymbol{s}|} f}{\partial u^{\boldsymbol{r}} \partial x^{\boldsymbol{s}}}(u, x) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} \frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|} f_{\boldsymbol{m}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}(u) (2i\pi)^{|\boldsymbol{s}|} \boldsymbol{m}^{\boldsymbol{s}} e^{2i\pi\langle x, \boldsymbol{m}\rangle}.$$

Soient $r, s \in \boldsymbol{N}$. On pose :

$$\|f\|_{r,s}^U = \left(\sum_{|\boldsymbol{r}| \le r} \int_U \left| \frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|} f_{\boldsymbol{0}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}(u) \right|^2 du + \sum_{|\boldsymbol{r}| \le r} \sum_{|\boldsymbol{s}| \le s} \int_U \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}} |\boldsymbol{m}|^{2|\boldsymbol{s}|} \left| \frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|} f_{\boldsymbol{m}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}(u) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ l'espace des fonctions $f : M \longrightarrow \boldsymbol{C}$ localement de carré intégrable. L'ensemble des $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ qui vérifient $\|f\|_{r,s}^U < +\infty$ pour tout ouvert relativement compact (homéomorphe à une boule de $\boldsymbol{R}^d$) trivialisant la fibration π est un espace vectoriel $W^{r,s}(M)$ sur lequel $\| \ \|_{r,s}^U$ est une semi-norme. Cette semi-norme est en fait associée au produit hermitien (sur $L^2(U)$) :

$$\langle f, g\rangle_{r,s}^U = \sum_{|\boldsymbol{r}|\le r}\int_U \frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}f_{\boldsymbol{0}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}\overline{\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}g_{\boldsymbol{0}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}}du + \sum_{|\boldsymbol{r}|\le r}\sum_{|\boldsymbol{s}|\le s}\int_U \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n\setminus\{\boldsymbol{0}\}} |\boldsymbol{m}|^{2|\boldsymbol{s}|}\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}f_{\boldsymbol{m}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}\overline{\frac{\partial^{|\boldsymbol{r}|}g_{\boldsymbol{m}}}{\partial u^{\boldsymbol{r}}}}du.$$

Soit $\{U_j\}_{j\in\boldsymbol{N}}$ un recouvrement localement fini de W par des ouverts U_j où chacun d'eux est relativement compact (homéomorphe à une boule de $\boldsymbol{R}^d$) et trivialisant la fibration π; notons la norme $\|\ \|_{r,s}^{U_j}$ par $\|\ \|_{r,s}^{j}$. Alors $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$ est de classe C^∞ si, et seulement si, $\|f\|_{r,s}^j < +\infty$ pour tous $j, r, s\in\boldsymbol{N}$.

On suppose maintenant que ϕ conjugue le système dynamique (V, X) au système dynamique $(U\times\boldsymbol{T}^n, Z)$ où Z est le champ "linéaire" $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ et $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ ne dépend pas de $u\in U$. (Pour simplifier, le champ Z sera noté X.)

Pour toute fonction $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(M)$, on note $I(f)$ la fonction sur W définie par :

$$I(f)(u) = \int_{\boldsymbol{T}^n} f(u, x_1, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n.$$

Il est facile de voir (via le théorème de Fubini) que $I(f)\in L^2_{\mathrm{loc}}(W)$ et que l'application $I : L^2_{\mathrm{loc}}(M)\longrightarrow L^2_{\mathrm{loc}}(W)$ est linéaire continue et surjective. En plus, elle envoie l'espace $C^\infty(M)$ surjectivement sur l'espace $C^\infty(W)$. On a le :

THÉORÈME 2.4. *Supposons le champ X diophantien. Soit $g\in C^\infty(M)$. Alors l'équation cohomologique continue $X\cdot f = g$ a une solution $f\in C^\infty(M)$ si, et seulement si, $I(g) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Elle se fera en deux étapes. D'abord sur un ouvert $V_j = \pi^{-1}(U_j)$ difféomorphe à $U_j\times\boldsymbol{T}^n$ ensuite dans le cas général.

i) On se met sur V_j qu'on confondra avec $U_j\times\boldsymbol{T}^n$. Écrite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation $X\cdot f = g$ donne le système :

$$2i\pi\langle\alpha, \boldsymbol{m}\rangle f_{\boldsymbol{m}}(u) = g_{\boldsymbol{m}}(u) \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n.$$

On voit donc que la condition nécessaire pour que g soit du type $X\cdot f$ est que $g_{\boldsymbol{0}}(u) = 0$, qui n'est rien d'autre que la condition $I(g) = 0$. Supposons-la satisfaite. On a alors une solution formelle :

$$f_{\boldsymbol{m}}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } \boldsymbol{m} = \boldsymbol{0} \\ \frac{g_{\boldsymbol{m}}(u)}{2i\pi\langle\alpha,\boldsymbol{m}\rangle} & \text{si } \boldsymbol{m}\ne\boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Il est très facile de montrer que ces coefficients définissent bien une fonction f de classe C^∞ : il suffit de vérifier que pour tous $j, r, s\in\boldsymbol{N}$, on a $\|f\|_{r,s}^j < +\infty$; ceci se fait sans aucune difficulté.

ii) Soit $\{\overline{\rho}_j\}$ une partition de l'unité sur W subordonnée au recouvrement $\{U_j\}$. Alors $\{\rho_j\}$ où $\rho_j = \overline{\rho}_j\circ\pi$ est une partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $\{V_j\}$ qui vérifie $X\cdot\rho_j = 0$ pour tout j. Pour chaque $j\in\boldsymbol{N}$, on note g_j la restriction de g à l'ouvert V_j ; alors g_j est une fonction de classe C^∞ sur V_j satisfaisant la condition $I(g_j) = 0$. D'après le point i), il existe une fonction de classe C^∞ sur V_j qu'on notera f_j et qui vérifie $X \cdot f_j = g_j$. Il est alors immédiat de voir que $f = \sum_{j\in \boldsymbol{N}} \rho_j f_j$ est une fonction de classe C^∞ sur M et est une solution du problème i.e. vérifie $X \cdot f = g$. Ce qui termine la démonstration. □

De ce théorème on tire le corollaire qui suit.

COROLLAIRE 2.5. *L'espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathscr{F}}(M)$ du feuilletage $\mathscr{F}$ associé au champ X s'identifie à l'espace de Fréchet $C^\infty(W) \otimes \chi$ où χ est la 1-forme feuilletée induisant sur chaque fibre la 1-forme $\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} \sum_{i=1}^n dx_i$.*

L'EXEMPLE DES GROUPES DE LIE 2.6. L'un des exemples les plus intéressants pour illustrer ce qu'on vient d'obtenir dans cette section est celui où la variété M est un groupe de Lie connexe et X un champ invariant à gauche.

Soit G un groupe de Lie connexe de dimension m d'algèbre de Lie $\mathscr{G}$. Tout élément $X \in \mathscr{G}$ définit un champ invariant à gauche sur G et un sous-groupe à un paramètre $H = \{e^{tX} : t \in \boldsymbol{R}\}$. L'adhérence K de H est un sous-groupe abélien connexe de G qui est :

(1) - H lui-même isomorphe à $\boldsymbol{R}$ si H est fermé isomorphe à $\boldsymbol{R}$,

(2) - H lui-même isomorphe au cercle $\boldsymbol{S}^1$ si H est fermé isomorphe à $\boldsymbol{S}^1$,

(3) - isomorphe à un tore $\boldsymbol{T}^n$ sinon. Dans ce cas, la restriction de X à K est un champ de vecteurs invariant à orbites denses.

Dans tous les cas, on a une fibration principale $K \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} B = G/K$. On peut montrer que dans le :

– cas (1), l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ a toujours une solution C^∞ pour toute fonction g de classe C^∞ sur M ;

– cas (2), l'équation cohomologique $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, l'intégrale de g sur la fibre de π est nulle.

Situons le cas (3) dans le contexte du théorème 2.4. Soient ψ l'isomorphisme entre les groupes de Lie K et $\boldsymbol{T}^n$ et $\widetilde{X} = \psi_*(X)$ l'image directe de X par ψ. Alors $\widetilde{X}$ est un champ linéaire. Pour tout ouvert U de B trivialisant la fibration principale π, le système dynamique (V, X) (où $V = \pi^{-1}(U)$) est C^∞-conjugué au système dynamique $(U \times \boldsymbol{T}^n, \widetilde{X})$. On dira que X est *diophantien* si $\widetilde{X}$ l'est.

En appliquant le théorème 2.4, on montre alors que, si X est diophantien, l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ sur le groupe de Lie G a une solution, si et seulement si, l'intégrale de g sur K est nulle. □

3. Flots riemanniens complets.

Un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension n sur M est aussi la donnée d'un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, de submersions f_i de U_i au-dessus d'une variété transverse T de dimension n tels que, pour $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe un difféomorphisme $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ vérifiant $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$. Le système $\left\{\mathscr{U}, f_i, \gamma_{ij}\right\}$ est appelé *cocycle* feuilleté définissant $\mathscr{F}$. On dira que $\mathscr{F}$ est transversalement orientable si T est munie d'une orientation préservée par les γ_{ij}.

On dira qu'un champ de vecteurs Y sur M est feuilleté si, pour tout champ de vecteurs X tangent à $\mathscr{F}$, le crochet $[X,Y]$ est encore tangent à $\mathscr{F}$. Le flot local associé à un tel champ préserve le feuilletage $\mathscr{F}$. Les champs tangents à $\mathscr{F}$ forment un idéal $\Gamma(\mathscr{F})$ du module $\chi(M,\mathscr{F})$ des champs feuilletés sur M. Le quotient $\chi(M/\mathscr{F}) = \chi(M,\mathscr{F})/\Gamma(\mathscr{F})$ est une algèbre de Lie appelée algèbre des champs basiques de $\mathscr{F}$. On dira qu'une forme différentielle α est basique si elle vérifie $i_X\alpha = 0$ et $L_X\alpha = 0$ pour tout champ X tangent à $\mathscr{F}$. (Ici i_X et L_X désignent respectivement le produit intérieur de α par X et la dérivée de Lie de α le long de X.) Une fonction basique est simplement une fonction constante sur les feuilles ; l'espace des fonctions basiques est une algèbre qu'on notera $C^\infty(M/\mathscr{F})$.

Une structure transverse à $\mathscr{F}$ est une structure géométrique sur T invariante par les difféomorphismes (locaux) γ_{ij}.

i) Si T est un groupe de Lie G et les γ_{ij} les restrictions de translations à gauche, on dira que $\mathscr{F}$ est un G-feuilletage de Lie.

ii) On dira que $\mathscr{F}$ est transversalement parallélisable (on notera T.P en abrégé) si le $C^\infty(M/\mathscr{F})$-module $\chi(M/\mathscr{F})$ est libre de rang n. Cela signifie que la variété T admet un parallélisme invariant par les difféomorphismes (locaux) γ_{ij}. Les champs de ce parallélisme se relèvent en n champs de vecteurs feuilletés transverses à $\mathscr{F}$ et linéairement indépendants en chaque point. On dira que $\mathscr{F}$ est T.P complet si ces champs sont complets.

iii) Supposons T munie d'une métrique riemannienne pour laquelle les γ_{ij} sont des isométries locales. On dira alors que $\mathscr{F}$ est riemannien. Ceci signifie que le fibré normal $\nu\mathscr{F} = TM/T\mathscr{F}$ supporte une métrique invariante le long des feuilles ou encore que la distance entre les feuilles est localement constante. Si $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$ sont des coordonnées locales autour d'un point $z \in M$ telles que (localement) le feuilletage soit défini par les équations $dy_1 = \ldots = dy_n = 0$, la métrique sur $\nu\mathscr{F}$ s'écrit :

$$g(z) = \sum_{i,j} g_{ij}(y)dy_i \otimes dy_j.$$

Sur une variété M donnée, tout feuilletage de Lie est transversalement parallélisable et tout feuilletage transversalement parallélisable est riemannien.

THÉORÈME 3.1 ([**Mo**]). *Supposons $\mathscr{F}$ transversalement parallélisable complet. Alors :*

i) *l'adhérence de toute feuille de $\mathscr{F}$ est une sous-variété de M,*

ii) *il existe un groupe de Lie G_0 tel que le feuilletage $\mathscr{F}_0$ induit sur chaque adhérence est de Lie de groupe G_0 à feuilles denses,*

iii) *les adhérences des feuilles forment une fibration localement triviale $\pi : M \longrightarrow W$ au-dessus d'une variété complète W ; le cocycle de cette fibration est à valeurs dans le groupe* $\mathrm{Diff}(F,\mathscr{F}_0)$ *des difféomorphismes de la fibre type F qui respectent le feuilletage $\mathscr{F}_0$.*

La variété W est appelée variété basique de $\mathscr{F}$ et $\pi : M \longrightarrow W$ fibration basique de $\mathscr{F}$.

THÉORÈME 3.2 ([**Mo**]). *Supposons $\mathscr{F}$ riemannien complet et, pour simplifier, transversalement orientable. Notons $p : M^{\#} \longrightarrow M$ le R-fibré principal des repères orthonormés directs transverses à $\mathscr{F}$ (où R est le groupe linéaire spécial* $\mathrm{SO}(n)$*). Alors $\mathscr{F}$ se relève à $M^{\#}$ en un feuilletage $\mathscr{F}^{\#}$ tel que :*

i) $\dim \mathscr{F}^{\#} = \dim \mathscr{F}$ *et $\mathscr{F}^{\#}$ est T.P complet,*

ii) *$\mathscr{F}^{\#}$ est invariant par l'action naturelle de R sur $M^{\#}$.*

La variété basique de $\mathscr{F}^{\#}$ sera par définition la variété basique de $\mathscr{F}$. L'action de R sur $M^{\#}$ préserve le feuilletage $\mathscr{F}^{\#}$; elle envoie donc adhérence de feuille sur adhérence de feuille et, par suite, induit une action sur W. La métrique riemannienne transverse à $\mathscr{F}^{\#}$ définit une métrique riemannienne sur W pour laquelle cette action est par isométries.

On pose $N = \dim R = n(n-1)/2$ et on note $X_1, \cdots, X_N$ les champs fondamentaux de l'action de R sur $M^{\#}$. Ce sont des champs feuilletés ; ils se complètent par n champs horizontaux feuilletés $Y_1, \cdots, Y_n$ pour former un parallélisme transverse à $\mathscr{F}^{\#}$. Soient $\theta^1, \cdots, \theta^N$ les 1-formes basiques sur $M^{\#}$ telles que :

$$\theta^i(X_j) = \delta_i^j \quad \text{et} \quad \theta^k(Y_\ell) = 0 \text{ pour tout } k = 1, \cdots, N \text{ et tout } \ell = 1, \cdots, n.$$

Alors $\Theta = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^N$ est une forme volume normalisée sur les fibres de la fibration principale $R \longrightarrow M^{\#} \xrightarrow{p} M$. Elle est basique et invariante par les champs $X_1, \cdots, X_N$ *i.e.* pour tout $k = 1, \cdots, N$ on a $L_{X_k}\Theta = 0$.

Notons $F^{\#}$ la fibre type de la fibration basique $\pi^{\#} : M^{\#} \longrightarrow W$. Soit $f : M \longrightarrow \boldsymbol{C}$ une fonction de classe C^∞. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & & \downarrow & & \\ F^{\#} & \hookrightarrow & M^{\#} & \xrightarrow{\pi^{\#}} & W \\ & & p\downarrow & & \\ & & M & \xrightarrow{f} & \boldsymbol{C}. \end{array}$$

La projection $p : M^{\#} \longrightarrow M$ induit une application $p^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^{\#})$ définie par $p^*(f) = f \circ p$. La fonction $f^{\#} = f \circ p$ est un élément de $C_R^\infty(M^{\#})$ (espace des fonctions C^∞ sur $M^{\#}$ invariantes sous l'action de R) et $p^* : C^\infty(M) \longrightarrow C_R^\infty(M^{\#})$ est en fait un isomorphisme d'espaces de Fréchet. Si f est basique pour $\mathscr{F}$, $p^*(f)$ est basique pour $\mathscr{F}^{\#}$ donc définit une fonction $\bar{f}$ sur W ; comme $p^*(f)$ est R-invariante, $\bar{f}$ sera invariante sous l'action de R sur W *i.e.* $\bar{f} \in C_R^\infty(W)$. On voit facilement que l'application $\zeta : f \in C^\infty(M/\mathscr{F}) \longmapsto \bar{f} \in C_R^\infty(W)$ ainsi définie est un isomorphisme d'espaces de Fréchet. On a une application linéaire continue $\sigma : C^\infty(M^{\#}) \longrightarrow C_R^\infty(M^{\#})$ définie par :

$$\sigma(f^{\#}) = \int_R f^{\#}\Theta.$$

La restriction de σ à $C^\infty_R(M^\#)$ vaut l'identité *i.e.* σ est une rétraction de $C^\infty(M^\#)$ sur $C^\infty_R(M^\#)$.

Si $\mathscr{F}$ est un flot défini par un champ X, $\mathscr{F}^\#$ est un flot défini par un champ $X^\#$ tel que $p_*(X^\#) = X$. L'adhérence de toute feuille de $\mathscr{F}^\#$ est alors un tore sur lequel $\mathscr{F}^\#$ est défini par un champ de vecteurs linéaire (*cf.* [**Ca**]). Cette adhérence se projette par p sur l'adhérence d'une feuille de $\mathscr{F}$ et le flot induit sur cette adhérence est aussi linéaire. On dira que $\mathscr{F}$ est diophantien si $\mathscr{F}^\#$ l'est au sens de la définition donée dans la section 2. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
C^\infty(M^\#) & \xrightarrow{X^\#} & C^\infty(M^\#) \\
\sigma\downarrow & & \downarrow\sigma \\
C^\infty_R(M^\#) & \xrightarrow{X^\#} & C^\infty_R(M^\#) \\
p^*\uparrow & & \uparrow p^* \\
C^\infty(M) & \xrightarrow{X} & C^\infty(M).
\end{array}$$

L'équation cohomologique continue du SDC (M, X) est donc équivalente à l'équation cohomologique continue $X^\# \cdot f^\# = g^\#$ du SDC $(M^\#, X^\#)$ équivariante sous l'action du groupe R ; cela signifie qu'on se donne $g^\# \in C^\infty_R(M^\#)$ et on cherche $f^\# \in C^\infty_R(M^\#)$ telle que $X^\# \cdot f^\# = g^\#$. D'après la section 2, cette équation admet une solution $f^\# \in C^\infty(M^\#)$ si, et seulement si, l'intégrale de $g^\#$ sur la fibre de la fibration basique $F^\# \hookrightarrow M^\# \xrightarrow{\pi^\#} W$ est nulle. Si cette solution n'est pas R-invariante, on la remplace par $\sigma(f^\#)$ qui en est une. Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, on pose :

$$I(f) = (p^*)^{-1}\left(\int_{F^\#} p^*(f)\right)$$

(c'est l'intégrale de la fonction $p^*(f)$ sur la fibre de $\pi^\#$). La quantité $\int_{F^\#} p^*(f)$ est une fonction C^∞ $\mathscr{F}^\#$-basique sur $M^\#$ et invariante par l'action de R, donc son image réciproque par p^* est une fonction C^∞ sur M basique pour le feuilletage $\mathscr{F}$. L'application I est donc en fait à valeurs dans $C^\infty(M/\mathscr{F})$; c'est une surjection de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$ sur l'espace de Fréchet $C^\infty(M/\mathscr{F})$. On a alors le :

THÉORÈME 3.3. *Soit $\mathscr{F}$ un flot riemannien complet sur M défini par un champ X. On suppose $\mathscr{F}$ diophantien. Alors l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, on a $I(g) = 0$. L'espace $H^1_{\mathscr{F}}(M)$ est canoniquement isomorphe à l'espace $C^\infty(M/\mathscr{F}) \otimes \chi$ qui est aussi isomorphe à $C^\infty_R(W)$.*

Comme R est un groupe compact, l'espace des fonctionnelles invariantes sur $C^\infty(W)$ est exactement le dual de $C^\infty_R(W)$ (*cf.* [**AE**]). D'où le :

COROLLAIRE 3.4. *L'espace $\mathscr{D}'_X(M)$ des distributions sur M invariantes par le champ X est canoniquement isomorphe à l'espace $\mathscr{D}'_R(W)$ des distributions sur W invariantes par le groupe compact R.*

Nous allons terminer cette section en donnant un exemple concret sur lequel on verra exactement tous les objets géométriques qui interviennent.

EXAMPLE 3.5. Soit M la sphère $\boldsymbol{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \boldsymbol{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On considère le champ de vecteurs holomorphe sur $\boldsymbol{C}^2$ donné par $Z = i\lambda_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + i\lambda_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ où λ_1 et λ_2 sont des réels $\boldsymbol{Q}$-linéairement indépendants. Il induit sur M un champ réel (sans singularité) donc un feuilletage $\mathscr{F}$ de dimension réelle 1. Comme le flot (complexe) de Z préserve la métrique kählérienne standard sur $\boldsymbol{C}^2$, $\mathscr{F}$ est un flot riemannien. Ce flot a deux orbites fermées qui sont des cercles correspondant aux points $z_1 = 0$ et $z_2 = 0$. Ici le groupe R est égal à $\mathrm{SO}(2)$ et la fibration basique $F^\# \longrightarrow M^\# \longrightarrow W$ a comme fibre $F^\#$ le tore $\boldsymbol{T}^2$. La suite exacte d'homotopie de la fibration principale $\mathrm{SO}(2) \longrightarrow M^\# \longrightarrow M$ donne $\pi_2(M^\#) = 0$ et un isomorphisme $\pi_1(M^\#) \simeq \pi_1(\mathrm{SO}(2)) \simeq \boldsymbol{Z}$. Écrivons celle de la fibration basique $F^\# \hookrightarrow M^\# \longrightarrow M$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\pi_2(M^\#) & \longrightarrow & \pi_2(W) & \longrightarrow & \pi_1(F^\#) & \longrightarrow & \pi_1(M^\#) & \longrightarrow & \pi_1(W) & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_2(W) & \longrightarrow & \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & \longrightarrow & \boldsymbol{Z} & \longrightarrow & \pi_1(W) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

L'examen de cette suite exacte montre que forcément $\pi_1(W) = 0$ et $\pi_2(W) \simeq \boldsymbol{Z}$ donc W est la sphère $\boldsymbol{S}^2$. L'action de $\mathrm{SO}(2)$ sur cette sphère est par isométries ; comme $\mathrm{SO}(2)$ est abélien, toutes ces isométries fixent deux mêmes points diamétralement opposés. Le quotient de $\boldsymbol{S}^2$ par cette action est donc l'intervalle fermé $[0, 1]$.

Si le vecteur (λ_1, λ_2) est diophantien, l'espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathscr{F}}(M)$ est séparé et isomorphe (en tant qu'espace de Fréchet) à l'espace $C^\infty([0, 1])$. Au niveau de l'équation cohomologique, on peut dire que $X \cdot f = g$ a une solution si, et seulement si, pour toute adhérence d'orbite F, on a $\int_F g = 0$. □

Le reste du travail sera consacré à la résolution explicite des équations cohomologiques (discrète et continue) d'un système dynamique d'Anosov résoluble. Le fait de déterminer exactement les solutions permet aussi de donner d'autres invariants géométriques du difféomorphisme et du feuilletage. Nous commencerons d'abord par des remarques très utiles dans le cas général de la suspension d'un difféomorphisme.

4. Suspension d'un difféomorphisme.

Soient M une variété compacte et $\gamma : M \longrightarrow M$ un difféomorphisme. On note (x, t) les coordonnées d'un point z de $\widetilde{N} = M \times \boldsymbol{R}$ et $\widetilde{X}$ le champ $\frac{\partial}{\partial t}$; $\widetilde{X}$ est invariant par le difféomorphisme $(x, t) \in M \times \boldsymbol{R} \longmapsto (\gamma(x), t + 1) \in M \times \boldsymbol{R}$ et induit donc un champ de vecteurs X partout non nul sur la variété quotient $N = M \times \boldsymbol{R}/(x, t) \simeq (\gamma(x), t + 1)$. La deuxième projection $\widetilde{\pi} : \widetilde{N} = M \times \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ est équivariante par rapport aux actions du groupe $\boldsymbol{Z}$: $\tau_k : t \in \boldsymbol{R} \longrightarrow t + k \in \boldsymbol{R}$ et $(\gamma^k, \tau_k) : (x, t) \in \widetilde{N} \longrightarrow (\gamma^k(x), t + k) \in \widetilde{N}$; cela signifie que, pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{N} & \overset{(\gamma^k,\tau_k)}{\longrightarrow} & \widetilde{N} \\ \widetilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\pi} \\ \boldsymbol{R} & \overset{\tau_k}{\longrightarrow} & \boldsymbol{R} \end{array}$$

Donc $\widetilde{\pi}$ induit une submersion $\pi : N \longrightarrow \boldsymbol{S}^1$; c'est en fait une fibration plate de monodromie γ. Notons $\mathscr{F}$ le flot défini par X ; on dit que $(N, \mathscr{F})$ est la suspension de (M, γ). On a le :

THÉORÈME 4.1. *Les espaces vectoriels topologiques $H^1_{\mathscr{F}}(N)$ et $H^1(\boldsymbol{Z}, C^\infty(M))$ sont canoniquement isomorphes. Par conséquent l'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution sur N si, et seulement si, l'équation cohomologique discrète $K - K \circ \gamma = \Phi$ a une solution sur M pour $\Phi(x) = \int_0^1 g(x,t)dt$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{U} = \{U_1, U_2\}$ un recouvrement du cercle $\boldsymbol{S}^1$ par deux intervalles ouverts U_1 et U_2. Alors $U_1 \cap U_2$ est la réunion disjointe de deux intervalles ouverts U_+ et U_-. Les ouverts $V_1 = \pi^{-1}(U_1)$, $V_2 = \pi^{-1}(U_2)$, $V_+ = \pi^{-1}(U_+)$ et $V_- = \pi^{-1}(U_-)$ sont respectivement difféomorphes à $M \times U_1$, $M \times U_2$, $M \times U_+$ et $M \times U_-$ et la variété N se reconstitue en recollant les ouverts V_1 et V_2 à l'aide de l'identité sur V_+ et l'application γ sur V_-. Comme les feuilletages induits sur les ouverts V_1, V_2, V_+ et V_- sont intégrablement homotopes au feuilletage par points sur M (cela signifie que la rétraction, par exemple de V_1 sur $M \times \{*\}$, préserve chaque feuille individuellement *cf.* [**Ek**]), on a :

$$H^0_{\mathscr{F}}(V_1) = H^0_{\mathscr{F}}(V_2) = H^0_{\mathscr{F}}(V_+) = H^0_{\mathscr{F}}(V_-) = C^\infty(M)$$

et

$$H^1_{\mathscr{F}}(V_1) = H^1_{\mathscr{F}}(V_2) = H^1_{\mathscr{F}}(V_+) = H^1_{\mathscr{F}}(V_-) = 0.$$

Soient $r : \Omega^*_{\mathscr{F}}(N) \longrightarrow \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_2)$ et $j : \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_2) \longrightarrow \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_+) \oplus \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_-)$ les applications définies par :

$$r(\omega) = (\omega_{|V_1}, \omega_{|V_2}) \quad \text{et} \quad j(\alpha, \beta) = (\alpha_{|V_+} - \beta_{|V_+}, \alpha_{|V_-} - \gamma^*(\beta_{|V_-})).$$

Soit $\{\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2\}$ une partition de l'unité de classe C^∞ associée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$ de $\boldsymbol{S}^1$. On pose $\rho_1 = \overline{\rho}_1 \circ \pi$ et $\rho_2 = \overline{\rho}_2 \circ \pi$. Alors $\{\rho_1, \rho_2\}$ est une partition de l'unité de classe C^∞ associée au recouvrement $\{V_1, V_2\}$ de N. À l'aide de cette partition on construit une section de j et on montre ainsi qu'on a une suite exacte (de complexes différentiels feuilletés) :

$$0 \longrightarrow \Omega^*_{\mathscr{F}}(N) \xrightarrow{r} \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_1) \oplus \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_2) \xrightarrow{j} \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_+) \oplus \Omega^*_{\mathscr{F}}(V_-) \longrightarrow 0.$$

Cette suite donne lieu à une suite exacte longue de cohomologie feuilletée qui, dans notre situation présente, se réduit à la suite (exacte) :

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathscr{F}}(N) \xrightarrow{r} C^\infty(M) \oplus C^\infty(M) \xrightarrow{j} C^\infty(M) \oplus C^\infty(M) \xrightarrow{\xi} H^1_{\mathscr{F}}(N) \longrightarrow 0$$

où r et j sont définies par $r(h) = (h, h)$ et $j(f, g) = (f - g, f - g \circ \gamma)$. (L'espace $H^0_{\mathscr{F}}(N)$ est constitué des fonctions constantes sur les feuilles ; il s'identifie donc au sous-espace de $C^\infty(M)$ formé des fonctions constantes sur les orbites de γ.) L'application ξ étant surjective, $H^1_{\mathscr{F}}(N)$ s'identifie (en tant qu'espace vectoriel topologique) au quotient de $C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)$ par le noyau de ξ ; mais comme la suite est exacte, ce dernier est l'image de j. Un calcul détaillé et facile à mener montre que celle-ci s'identifie à $C^\infty(M) \oplus \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est le sous-espace de $C^\infty(M)$ engendré par les fonctions de la forme $g - g \circ \gamma$. Par conséquent :

$$H^1_{\mathscr{F}}(N) = C^\infty(M) \oplus C^\infty(M)/C^\infty(M) \oplus \mathscr{C} = C^\infty(M)/\mathscr{C} = H^1(\boldsymbol{Z}, C^\infty(M)).$$

Ceci démontre la première partie du théorème.

Les fonctions C^∞ sur N sont les fonctions C^∞ : $M \times \boldsymbol{R} \xrightarrow{f} \boldsymbol{C}$ qui vérifient la condition d'invariance :

$$f(\gamma(x), t + 1) = f(x, t) \quad \text{pour tout } (x, t) \in M \times \boldsymbol{R}. \tag{CI}$$

Soit $g \in C^\infty(M)$; on cherche $f \in C^\infty(M)$ telle que $X \cdot f = g$, c'est-à-dire $(\partial f/\partial t)(x, t) = g(x, t)$ pour tout $(x, t) \in M \times \boldsymbol{R}$. On intègre :

$$f(x, t) = \int_1^t g(x, u)du + K(x).$$

Il est clair que f ainsi définie est une fonction C^∞ sur $M \times \boldsymbol{R}$; elle doit vérifier en plus la condition (CI) *i.e.* $\int_1^{t+1} g(\gamma(x), u)du + K(\gamma(x)) = \int_1^t g(x, u)du + K(x)$. Un calcul immédiat utilisant la γ-invariance de g donne $K(x) - K(\gamma(x)) = \int_0^1 g(x, t)dt$. Nous sommes donc amenés à trouver une fonction $K \in C^\infty(M)$ telle que $K - K \circ \gamma = \Phi$ où $\Phi(x) = \int_0^1 g(x, t)dt$. L'existence de cette fonction K est donc équivalente à l'existence de la solution f qu'on cherche. $\square$

On déduit de ce qui précède que l'espace $\mathscr{D}'_X(N)$ des distributions invariantes par X sur N (*i.e.* les distributions T qui vérifient $X \cdot T = 0$) est isomorphe à l'espace $\mathscr{D}'_\gamma(M)$ des distributions γ-invariantes sur M. En fait, on peut préciser l'isomorphisme dans le :

THÉORÈME 4.2. *La transposée p' de l'application linéaire continue et surjective p qui à $g \in C^\infty(N)$ associe $p(g) = \int_0^1 g(., t)dt \in C^\infty(M)$ est un isomorphisme de $\mathscr{D}'_\gamma(M)$ sur $\mathscr{D}'_X(N)$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons d'abord construire une section $s : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(N)$ de l'application p (*i.e.* s vérifie $p \circ s =$ identité de $C^\infty(M)$). Soit $\theta : \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ une fonction C^∞, positive, à support dans $]0, 1[$, valant 1 sur un voisinage ouvert de $(1/2)$ et telle que $\int_0^1 \theta(t)dt = 1$. Alors θ peut être aussi vue comme fonction sur $M \times \boldsymbol{R}$ (constante sur les fibres de la deuxième projection). La variété M sera vue comme le facteur $M \times \{\frac{1}{2}\}$ de $M \times \boldsymbol{R}$. Si $\varphi \in C^\infty(M)$, $\theta\varphi$ est une fonction C^∞ sur $M \times \boldsymbol{R}$. Il est alors facile de voir que la quantité :

$$\overline{\varphi}(x,t) = \sum_{\ell \in \boldsymbol{Z}} \theta(t+\ell)\varphi(\gamma^\ell(x))$$

est bien définie et est une fonction C^∞ qui vérifie la condition (CI) donc induit une fonction C^∞ sur N. On posera alors $s(\varphi) = \overline{\varphi}$. Le fait que s soit effectivement une section de p est facile à vérifier. L'application p est donc surjective et, par suite, sa transposée $p' : \mathscr{D}'(M) \longrightarrow \mathscr{D}'(N)$ est injective. Montrons qu'elle envoie un élément de $\mathscr{D}'_\gamma(M)$ sur un élément de $\mathscr{D}'_X(N)$. Soit $T \in \mathscr{D}'_\gamma(M)$; alors, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, on a $\langle T, \varphi - \varphi \circ \gamma\rangle = 0$. On doit montrer que $X \cdot (p'(T)) = 0$, c'est-à-dire $\langle p'(T), X \cdot \psi\rangle = 0$ pour toute fonction ψ. Soit $\psi \in C^\infty(N)$. On a :

$$\begin{aligned}
\langle X \cdot (p'(T)), \psi\rangle &= -\langle p'(T), X \cdot \psi\rangle \\
&= -\langle T, p(X \cdot \psi)\rangle \\
&= -\left\langle T, \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t)dt \right\rangle \\
&= -\langle T, \psi(\cdot, 1) - \psi(\cdot, 0)\rangle.
\end{aligned}$$

Comme ψ vérifie la condition (CI) on a $\psi(x,0) = \psi(\gamma(x), 1)$. En posant $\varphi(x) = \psi(x,1)$, on voit alors que $\psi(\cdot,1) - \psi(\cdot,0) = \varphi - \varphi \circ \gamma$. Donc $\langle X \cdot (p'(T)), \psi\rangle = -\langle T, \varphi - \varphi \circ \gamma\rangle = 0$ puisque T est γ-invariante. Ce qui démontre que $p'(T)$ est invariante par X. La transposée p' de p est donc une application linéaire de $\mathscr{D}'_\gamma(M)$ dans $\mathscr{D}'_X(N)$. On sait déjà qu'elle est injective ; montrons qu'elle est surjective. Soit $S \in \mathscr{D}'_X(N)$. On cherche $T \in \mathscr{D}'_\gamma(M)$ telle que $p'(T) = S$, c'est-à-dire, pour toute fonction $\psi \in C^\infty(N)$ on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\langle S, \psi\rangle &= \langle p'(T), \psi\rangle \\
&= \langle T, p(\psi)\rangle.
\end{aligned}$$

Comme p est surjective, il suffit de définir T en posant $\langle T, p(\psi)\rangle = \langle S, \psi\rangle$ tout en s'assurant que, si ψ est dans le noyau de p, alors $\langle S, \psi\rangle = 0$. Mais dire que $p(\psi) = 0$ signifie $\int_0^1 \psi(\cdot, t)dt = 0$; dans ce cas $\int_0^1 \psi(\cdot, t)dt$ est de la forme $K - K \circ \gamma$ (avec $K \in C^\infty(M)$ constante) et donc, d'après le théorème 4.1, ψ est de la forme $X \cdot \zeta$ avec $\zeta \in C^\infty(N)$. Par suite $\langle S, \psi\rangle = \langle S, X \cdot \zeta\rangle = -\langle X \cdot S, \zeta\rangle = 0$ car S est invariante par X. On a donc montré que la transposée p' de p est un isomorphisme. □

5. Systèmes dynamiques d'Anosov.

Soit $A \in SL(n, \boldsymbol{Z})$ une matrice diagonalisable sur le corps des nombres réels ayant toutes ses valeurs propres positives. On supposera qu'elle est hyperbolique i.e. 1 n'est pas dans son spectre. On notera B la transposée de A.

La matrice B agit linéairement sur le réseau $\boldsymbol{Z}^n$. Soit Σ une partie de ce réseau contenant un et un seul représentant de chaque orbite de cette action. L'orbite de $\boldsymbol{0}$ est réduite à $\{\boldsymbol{0}\}$. Il est clair que :

$$\boldsymbol{Z}^n = \bigcup_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} \{B^k(\boldsymbol{m}) : k \in \boldsymbol{Z}\}$$

est une partition de $\boldsymbol{Z}^n$.

Pour tout $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, soit $V_{\boldsymbol{m}}$ le sous-espace de $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ engendré par la famille de fonctions $\{\Theta_{B^k\boldsymbol{m}} : k \in \boldsymbol{Z}\}$ *i.e.* toutes les fonctions $f \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ qui s'écrivent :

$$f = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} f_{B^k\boldsymbol{m}} \Theta_{B^k\boldsymbol{m}}.$$

L'espace $V_{\boldsymbol{0}}$ est égal à $\boldsymbol{C}$ (les fonctions constantes) et nous avons une décomposition orthogonale :

$$C^\infty(\boldsymbol{T}^n) = \bigoplus_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} V_{\boldsymbol{m}}.$$

L'action du groupe $\boldsymbol{Z}$ sur $\boldsymbol{T}^n$ par la matrice A induit une action sur $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ définie par l'application $f \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longrightarrow f \circ A \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$. Si $f \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ est de la forme $f = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} f_{\boldsymbol{m}} \Theta_{\boldsymbol{m}}$, alors :

$$f \circ A = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} f_{\boldsymbol{m}} \Theta_{B\boldsymbol{m}}.$$

L'action préserve chaque $V_{\boldsymbol{m}}$ (et bien sûr aussi le sous-espace $V_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{C}$). Pour $f = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} f_{B^k\boldsymbol{m}} \Theta_{B^k\boldsymbol{m}} \in V_{\boldsymbol{m}}$, on a :

$$f \circ A = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} f_{B^k\boldsymbol{m}} \Theta_{B^{k+1}\boldsymbol{m}}.$$

Pour tout $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, soit $\pi_{\boldsymbol{m}} : C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longrightarrow V_{\boldsymbol{m}}$ la projection orthogonale sur le sous-espace $V_{\boldsymbol{m}}$ et $\ell_{\boldsymbol{m}} : C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longrightarrow \boldsymbol{C}$ la forme linéaire continue définie par :

$$\ell_{\boldsymbol{m}}(f) = \pi_{\boldsymbol{m}}(f)(\boldsymbol{0}) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} f_{B^k\boldsymbol{m}}.$$

L'orbite $\Lambda_{\boldsymbol{0}}$ étant réduite à $\boldsymbol{0}$, la forme linéaire $\ell_{\boldsymbol{0}}$ n'est rien d'autre que l'intégrale :

$$\ell_{\boldsymbol{0}}(f) = \int_{\boldsymbol{T}^n} f(x)dx = f_{\boldsymbol{0}}.$$

On pose :

$$\mathscr{H} = \bigcap_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} (\text{Noyau de } \ell_{\boldsymbol{m}})$$

qui est un sous-espace fermé de $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$. Le théorème qui suit constitue le résultat fondamental de cette partie. Il donne les conditions exactes de résolution de l'équation cohomologique discrète pour $(\boldsymbol{T}^n, A)$.

THÉORÈME 5.1. *Il existe un opérateur compact* $L : \mathscr{H} \longrightarrow C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ *tel que, pour toute fonction* $\Phi \in \mathscr{H}$*, la fonction* $K = L(\Phi)$ *est solution de l'équation cohomologique discrète* $K - K \circ A = \Phi$.

DÉMONSTRATION. On va la mener en procédant en quatre étapes. Posons $\Sigma_* = \Sigma \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ et $V_* = \bigoplus_{\boldsymbol{m}\in\Sigma_*} V_{\boldsymbol{m}}$. On a donc une décomposition orthogonale $C^\infty(\boldsymbol{T}^n) = V_{\boldsymbol{0}} \oplus V_*$ et l'opérateur $\delta : K \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longmapsto (K - K \circ A) \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ respecte cette décomposition ; δ est nul sur $V_{\boldsymbol{0}}$ et δ restreint à V_* est injectif. En fait on se ramène à l'équation cohomologique sur le sous-espace V_*.

SOLUTION FORMELLE 5.1.1. Soit $\Phi \in V_*$. On cherche $K \in V_*$ telle que $K - K \circ A = \Phi$. On développe K et Φ en séries de Fourier :

$$\Phi = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} \Phi_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}} \quad \text{et} \quad K = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} K_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}}$$

(les coefficients $\Phi_{\boldsymbol{0}}$ et $K_{\boldsymbol{0}}$ étant nuls puisque $K, \Phi \in V_*$) où les coefficients de Fourier doivent vérifier, pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, les conditions de convergence :

$$\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^r |\Phi_{\boldsymbol{m}}| < +\infty \quad \text{et} \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^r |K_{\boldsymbol{m}}| < +\infty.$$

Traduite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation cohomologique discrète est équivalente au système d'équations fonctionnelles suivant :

$$K_{\boldsymbol{m}} - K_{B^{-1}\boldsymbol{m}} = \Phi_{\boldsymbol{m}} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n.$$

On voit apparaître la condition nécessaire $\Phi_{\boldsymbol{0}} = \int_{\boldsymbol{T}^n} \Phi = 0$ qui est déjà supposée puisque $\Phi \in V_*$. Ce système a deux solutions formelles :

$$K_{\boldsymbol{m}} = -\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{B^i\boldsymbol{m}} \quad \text{ou} \quad K_{\boldsymbol{m}} = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{B^{-i}\boldsymbol{m}} \quad \text{pour } \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}. \tag{5}$$

(Ces quantités existent bien.) Comme l'opérateur $K \in V_* \longrightarrow (K - K \circ A) \in V_*$ est injectif, ces deux solutions doivent coïncider, donc on doit avoir la condition :

$$\sum_{i\in\boldsymbol{Z}}\Phi_{B^i\boldsymbol{m}}=0$$

i.e. $\ell_{\boldsymbol{m}}(\Phi)=0$ pour tout $\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n$. Désormais, la donnée Φ sera un élément de $\mathscr{H}$ (qui est contenu dans V_*).

On aura défini l'opérateur linéaire L en décrétant $L(\Phi)=K$ lorsque on aura montré que la fonction $K=\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}K_{\boldsymbol{m}}\Theta_{\boldsymbol{m}}$ ($K_{\boldsymbol{0}}$ étant choisi égal à 0) ainsi construite est dans $W^{1,r}$, pour tout $r\in\boldsymbol{N}$ et donc de classe C^∞. Cela signifie que, pour tout $r\in\boldsymbol{N}$, la série $\sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}|\boldsymbol{m}|^r|K_{\boldsymbol{m}}|$ est convergente.

LE BON CHOIX DE Σ 5.1.2. Soient $0<\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_q<1<\lambda_{q+1}\leq\cdots\leq\lambda_n$ les valeurs propres de B (ce sont les mêmes que celles de A) et $(e_1,\cdots,e_q,e_{q+1},\cdots,e_n)$ une base normale propre. On note E_- et E_+ les sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{R}^n$ engendrés respectivement par les systèmes de vecteurs propres $\{e_1,\cdots,e_q\}$ et $\{e_{q+1},\cdots,e_n\}$. Nous avons donc une décomposition en somme directe $\boldsymbol{R}^n=E_-\oplus E_+$ et tout vecteur $u\in\boldsymbol{R}^n$ s'écrit :

$$u=\sum_{i=1}^{q}a_ie_i+\sum_{j=q+1}^{n}b_je_j.$$

où les a_i et b_j sont des réels. Pour tout $k\in\boldsymbol{Z}$ nous avons :

$$B^k(u)=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i^ka_ie_i+\sum_{j=q+1}^{n}\lambda_j^kb_je_j.$$

Soit $\varepsilon>0$. On note E_-^ε et E_+^ε les ε-voisinages respectivement de E_- et E_+. Il existe alors $k_0\in\boldsymbol{N}$ tel que

$$k\geq k_0\Longrightarrow B^k(u)\in E_+^\varepsilon\quad\text{et}\quad k\leq -k_0\Longrightarrow B^k(u)\in E_-^\varepsilon.$$

Remarquons d'abord qu'aucun des éléments du réseau n'appartient à $E_-\cup E_+$. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ de B sont strictement positives, on peut définir B^t (puissance $t^{\text{ème}}$ de B) pour tout $t\in\boldsymbol{R}$. Soit z un élément non nul dans $\boldsymbol{R}^n$. L'orbite $\{B^k(z):k\in\boldsymbol{Z}\}$ est contenue dans la courbe différentiable $t\in\boldsymbol{R}\longmapsto B^t(z)\in\boldsymbol{R}^n$. Dans la base propre $(e_1,\cdots,e_n)$, le carré de sa norme admet pour paramétrage la fonction différentiable $\rho:t\in\boldsymbol{R}\longmapsto|D^t|^2=\langle D^t(z),D^t(z)\rangle\in\boldsymbol{R}_+$ (D est la matrice des valeurs propres). Cette fonction a pour dérivée seconde $\rho''(t)=4\langle((\ln D)\cdot D^t)(z),((\ln D)\cdot D^t)(z)\rangle$ (où $\ln D$ est la matrice diagonale dont les termes sont les logarithmes des valeurs propres de A donc de B) ; c'est une fonction strictement positive. Donc sa dérivée $\rho'(t)$ est une fonction strictement croissante. Quand t est proche de $-\infty$, $B^t(z)$ est voisin de E_- et quand t est proche de $+\infty$, B^t est voisin de E_+ ; le point $B^t(z)$ passe par une position en laquelle $\rho(t)$ est minimale. En somme, la norme du vecteur $B^t(z)$ admet un minimum en un certain t_0, elle est décroissante sur $]-\infty,t_0[$ et croissante sur $]t_0,+\infty[$. Si on choisit un élément z de $\boldsymbol{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, on trouve un unique $\boldsymbol{m}$ dans l'orbite de z qui réalise le minimum de la famille $\{|B^k(z)| : k \in \boldsymbol{Z}\}$. L'ensemble Σ sera alors constitué de ces $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{0}$.

Soit $\boldsymbol{m} \in \Sigma \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Alors les suites $(|B^k(\boldsymbol{m})|)$ et $(|B^{-k}(\boldsymbol{m})|)$ (indexées par $k \geq 0$) sont strictement croissantes. Comme $|B^k(\boldsymbol{m})|^2$ est un entier strictement positif pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$, on a forcément :

$$|B^{|k|}(\boldsymbol{m})|^2 \geq (|k|+1) \quad \text{pour tout } k \in \boldsymbol{Z}. \tag{6}$$

Convergence de la solution formelle 5.1.3. Maintenant, on va démontrer que la fonction $K = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} K_{\boldsymbol{m}} \Theta_{\boldsymbol{m}}$ construite à l'étape 5.1.1 est de classe C^∞. En utilisant le point iii) de la proposition 2.1, cela revient à montrer que, pour tout $r \in \boldsymbol{N}$, la série $\sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^r |K_{\boldsymbol{m}}|$ est convergente. D'abord on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} |\boldsymbol{m}|^r |K_{\boldsymbol{m}}| \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \geq 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| + \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k < 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| \end{aligned}$$

Posons :

$$S_+ = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k \geq 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| \quad \text{et} \quad S_- = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{\Sigma}} \sum_{k < 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}|.$$

Démontrons la convergence de la série S_+. On a d'abord (première expression de (5)) :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| &= \sum_{k \geq 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r \left| - \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{B^{k+i} \boldsymbol{m}} \right| \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} |B^i \boldsymbol{m}|^r \right) |\Phi_{B^k \boldsymbol{m}}|. \end{aligned}$$

Comme $|\boldsymbol{m}|^r \leq |B\boldsymbol{m}|^r \leq \cdots \leq |B^{k-1}\boldsymbol{m}|^r \leq |B^k \boldsymbol{m}|^r$, on a (pour $k \geq 1$) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} |B^i \boldsymbol{m}|^r \leq k |B^k \boldsymbol{m}|^r$$

et donc :

$$\sum_{k \geq 0} |B^k \boldsymbol{m}|^r |K_{B^k \boldsymbol{m}}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |B^k \boldsymbol{m}|^r |\Phi_{B^k \boldsymbol{m}}|.$$

D'après l'inégalité (6), on a :

$$\begin{aligned} S_+ &= \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sum_{k\geq 0}|B^k\boldsymbol{m}|^r|K_{B^k\boldsymbol{m}}| \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sum_{k\geq 1}k|B^k\boldsymbol{m}|^r|\Phi_{B^k\boldsymbol{m}}| \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sum_{k\geq 1}|B^k\boldsymbol{m}|^{r+2}|\Phi_{B^k\boldsymbol{m}}| \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que la donnée Φ est de classe C^∞. Nous avons donc montré que la série S_+ converge.

Pour démontrer la convergence de la série $S_- = \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{\Sigma}}\sum_{k<0}|B^k\boldsymbol{m}|^r|K_{B^k\boldsymbol{m}}|$, on remplace cette fois-ci le terme $K_{B^k\boldsymbol{m}}$ par la deuxième expression de (5) *i.e.* :

$$K_{B^k\boldsymbol{m}} = \sum_{i=0}^{-\infty}\Phi_{B^{k+i}\boldsymbol{m}}$$

et on procède exactement par le même type de majorations que pour la série S_+.

COMPACITÉ DE L'OPÉRATEUR L 5.1.4. La dernière inégalité et celle qu'on obtiendrait si on avait traité de la même manière la série S_-, montrent qu'on a l'estimation :

$$\begin{aligned} \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}|\boldsymbol{m}|^r|K_{\boldsymbol{m}}| &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma}\sum_{k\in\boldsymbol{Z}}|B^k\boldsymbol{m}|^{r+2}|\Phi_{B^k\boldsymbol{m}}| \\ &\leq \sum_{\boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z}^n}|\boldsymbol{m}|^{r+2}|\Phi_{\boldsymbol{m}}| \end{aligned}$$

i.e. pour tout entier naturel r, l'opérateur $L : \Phi\in\mathscr{H}\subset W^{1,r+2}\longmapsto K\in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)\subset W^{1,r}$ vérifie l'inégalité :

$$\|L(\Phi)\|_{1,r}\leq\|\Phi\|_{1,r+2}.$$

Il est donc borné. Montrons qu'il est compact. Soit (Φ_p) une suite bornée dans $\mathscr{H}$. Alors la suite $L(\Phi_p)$ est bornée dans $W^{1,r}$ pour tout $r\in\boldsymbol{N}$ et en particulier dans $W^{1,1}$; elle admet donc une sous-suite $L(\Phi_p^0)$ qui converge dans $W^{1,0}$ (c'est la compacité de l'injection $W^{1,1}\hookrightarrow W^{1,0}$). Mais la suite $L(\Phi_p^0)$ est aussi bornée dans $W^{1,2}$; elle admet donc une sous-suite $L(\Phi_p^1)$ qui converge dans $W^{1,1}$ (c'est la compacité de l'injection $W^{1,2}\hookrightarrow W^{1,1}$). De cette façon on construit des suites $(\Phi_p^k)_p$ extraites de la suite $(\Phi_p)_p$ telles que :

– pour tout $k\in\boldsymbol{N}^*$, la suite $(\Phi_p^k)_p$ est extraite de $(\Phi_p^{k-1})_p$ pour $k\geq 1$;
– pour tout $k\in\boldsymbol{N}$, la suite $(L(\Phi_p^k))_p$ converge dans $W^{1,k}$.

Il n'est alors pas difficile de voir que la suite diagonale $L(\Phi_p^p)$ converge dans tout espace $W^{1,p}$ *i.e.* $L(\Phi_p^p)$ converge vers une limite Φ qui est la même dans tous les espaces

$W^{1,r}$ donc dans l'espace $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$. Ce qui montre finalement que l'opérateur $L : \mathscr{H} \longrightarrow C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ est compact.

Ceci termine la démonstration du théorème principal. □

On voit donc que le sous-espace $\mathscr{C}$ de $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ engendré par les éléments de la forme $K - K \circ A$ avec $K \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ est fermé puisque égal à $\mathscr{H}$.

Corollaire 5.2. *L'espace $\mathscr{D}'_A(\boldsymbol{T}^n)$ des distributions A-invariantes sur $\boldsymbol{T}^n$ est engendré par les formes linéaires continues $\ell_{\boldsymbol{m}} : f \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n) \longmapsto \pi_{\boldsymbol{m}}(f)(\boldsymbol{0}) \in \boldsymbol{C}$ avec $\boldsymbol{m}$ variant dans Σ.*

Nous allons appliquer le théorème 5.1 pour résoudre l'équation cohomologique continue du flot d'Anosov associé à la matrice A. Mais d'abord une description explicite de la variété qui supporte ce champ paraît nécessaire.

On note $u_1, \cdots, u_n$ les vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On a une action :

$$(t, x) \in \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \longmapsto A^t(x) \in \boldsymbol{R}^n$$

qui permet de construire le produit semi-direct $G = \boldsymbol{R}^n \rtimes \boldsymbol{R}$; G est un groupe de Lie résoluble (non nilpotent) 1-connexe dans lequel $\Gamma = \boldsymbol{Z}^n \rtimes \boldsymbol{Z}$ est un réseau cocompact. Le quotient G/Γ est une variété analytique réelle compacte notée $\boldsymbol{T}_A^{n+1}$ et appelée tore hyperbolique ; elle fibre sur le cercle $\boldsymbol{S}^1$ avec fibre le tore $\boldsymbol{T}^n$. Pour $i = 1, \cdots, n$, notons u_i le champ linéaire sur le tore $\boldsymbol{T}^n$ tel que $A_* u_i = \lambda_i u_i$. On vérifie facilement que les champs de vecteurs $X = (\partial/\partial t)$ et $X_i = \lambda_i^t u_i$ avec $i = 1, \cdots, n$ induisent des champs sur $\boldsymbol{T}_A^{n+1}$. Ils vérifient les relations de crochet :

$$\begin{cases} [X_i, X_j] = 0 \\ [X, X_i] = (\ln \lambda_i) X_i. \end{cases}$$

Pour tout $i = 1, \cdots, n$, les adhérences des orbites du champ X_i sont précisément les fibres de la fibration naturelle $\boldsymbol{T}^n \hookrightarrow \boldsymbol{T}_A^{n+1} \longrightarrow \boldsymbol{S}^1$. En plus X_i est diophantien (cf. [**Sc**]) ; on sait donc dans quelles conditions résoudre son équation cohomologique continue associée (*cf.* Théorème 2.4). Regardons plutôt le champ X. Comme toutes les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont différentes de 1, le champ X définit un flot d'Anosov. C'est à son équation cohomologique que nous allons nous intéresser.

Tout élément de $C^\infty(\boldsymbol{T}_A^{n+1})$ est une fonction C^∞ : $(x, t) \in \boldsymbol{T}^n \times \boldsymbol{R} \xmapsto{f} f(x, t) \in \boldsymbol{C}$ qui vérifie en plus la condition d'invariance $f(A(x), t+1) = f(x, t)$. Elle se développe en série de Fourier $f(x, t) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} f_{\boldsymbol{m}}(t) \Theta_{\boldsymbol{m}}(x)$ où les coefficients de Fourier (dépendant de manière C^∞ du paramètre t) vérifient les relations :

$$f_{\boldsymbol{m}}(t+1) = f_{B\boldsymbol{m}}(t). \tag{C}$$

Notons I l'application linéaire continue de $C^\infty(\boldsymbol{T}_A^{n+1})$ dans $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ qui à toute fonction g associe :

$$I(g) = \int_0^1 g(\cdot, t)dt.$$

Théorème 5.3. *Soit $g \in C^\infty(\boldsymbol{T}_A^{n+1})$. L'équation cohomologique continue $X \cdot f = g$ a une solution $f \in C^\infty(\boldsymbol{T}_A^{n+1})$ si, et seulement si, pour tout $\boldsymbol{m} \in \Sigma$, on a $\ell_{\boldsymbol{m}}(I(g)) = 0$. La solution est donnée, à une constante additive près, par la série* :

$$f(x,t) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} \left(\int_1^t g_{\boldsymbol{m}}(u)du - \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 g_{B^k\boldsymbol{m}}(u)du \right) e^{2i\pi\langle x, \boldsymbol{m}\rangle}.$$

Démonstration. On développe f et g sous forme de séries de Fourier :

$$f(x,t) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} f_{\boldsymbol{m}}(t)\Theta_{\boldsymbol{m}}(x) \quad \text{et} \quad g(x,t) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n} g_{\boldsymbol{m}}(t)\Theta_{\boldsymbol{m}}(x).$$

Traduite au niveau des coefficients de Fourier, l'équation cohomologique se ramène alors au système :

$$\frac{\partial f_{\boldsymbol{m}}}{\partial t}(t) = g_{\boldsymbol{m}}(t) \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n.$$

En intégrant chacune des équations de ce système, on obtient :

$$f_{\boldsymbol{m}}(t) = \int_1^t g_{\boldsymbol{m}}(u)du + K_{\boldsymbol{m}}.$$

Reste à vérifier que f ainsi définie (par ses coefficients de Fourier $f_{\boldsymbol{m}}$) satisfait la condition (C) i.e. :

$$\int_1^t g_{\boldsymbol{m}}(u)du + K_{\boldsymbol{m}} = \int_1^{t+1} g_{B^{-1}\boldsymbol{m}}(u)du + K_{B^{-1}\boldsymbol{m}}.$$

Mais on sait que $g_{\boldsymbol{m}}(t) = g_{B^{-1}\boldsymbol{m}}(t+1)$ pour tout $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$ donc :

$$\int_0^t g_{B^{-1}\boldsymbol{m}}(v+1)dv = \int_0^t g_{\boldsymbol{m}}(v)dv.$$

On obtient :

$$\int_1^t g_{\boldsymbol{m}}(u)du + K_{\boldsymbol{m}} = \int_0^t g_{\boldsymbol{m}}(u)du + K_{B^{-1}\boldsymbol{m}}$$

i.e. :

$$K_{\boldsymbol{m}} - K_{B^{-1}\boldsymbol{m}} = \int_0^1 g_{\boldsymbol{m}}(u)du.$$

Pour tout $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{Z}^n$, on pose $\Phi_{\boldsymbol{m}} = \int_0^1 g_{\boldsymbol{m}}(u)\mathrm{d}u$ et on applique le théorème 5.1 pour donner la solution finale sous forme de la série indiquée. □

COROLLAIRE 5.4. *Si $\mathscr{F}$ est le feuilletage dont les feuilles sont les orbites de X, son espace vectoriel de cohomologie feuilletée $H^1_{\mathscr{F}}(\boldsymbol{T}^{n+1}_A)$ est fermé et s'identifie à l'orthogonal dans $C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ du sous-espace $\mathscr{H}$.*

REMARQUES 5.5.

5.5.1. Les champs de vecteurs $X, X_1, \cdots, X_q$ définissent un feuilletage de codimension $n-q$ noté $\mathscr{F}_s$ et appellé *feuilletage stable* de A. De même, les champs de vecteurs $X, X_{q+1}, \cdots, X_n$ définissent un feuilletage de codimension q noté $\mathscr{F}_u$ et appellé feuilletage instable de A. Leurs cohomologies feuilletées respectives ont été calculées dans [**ET**] :

$$H^r_{\mathscr{F}_s}(\boldsymbol{T}^{n+1}_A) = H^r_{\mathscr{F}_u}(\boldsymbol{T}^{n+1}_A) = \begin{cases} \boldsymbol{R} & \text{si } r = 0 \text{ ou } 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5.5.2. Supposons $q = n-1$ c'est-à-dire que seule la valeur propre λ_n est supérieure à 1 ; alors le feuilletage stable $\mathscr{F}_s$ sur $\boldsymbol{T}^{n+1}_A$ est de codimension 1. De même, si $q = 1$ *i.e.* seule la valeur propre λ_1 est inférieure à 1, alors feuilletage instable $\mathscr{F}_u$ est de codimension 1. Dans ces cas, on dira que A est un difféomorphisme d'Anosov de codimension 1. Topologiquement, il est le seul : tout difféómorphisme d'Anosov de codimension 1 sur une variété compacte est topologiquement conjugué à un difféomorphisme du tore donné par une matrice hyperbolique. Pour une introduction rapide et agréable à toutes ces notions, on peut consulter [**Ma**] ou [**Ve**].

5.5.3. Les exemples de matrices hyperboliques habitant dans $SL(n, \boldsymbol{Z})$ diagonalisables et ayant toutes leurs valeurs propres positives ne manquent pas. Une des plus connues, en dimension 2 est la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; on la retrouve en tête de pas mal de situations. Sa généralisation en toute dimension est donnée par la matrice qui suit (considérée dans [**EN**]).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

où les termes diagonaux $d_1, \cdots, d_n$ sont définis par $d_1 = 1$ et la relation de récurrence $d_{\ell+1} = 1 + d_1 \cdot d_2, \cdots, d_\ell$ pour $\ell = 1, \cdots, n-1$. Cette matrice a sa valeur propre λ_1 dans l'intervalle $]0,1[$ et toutes les autres $\lambda_2 \in]d_2, d_3[$, $\lambda_3 \in]d_3, d_4[, \cdots, \lambda_n \in]d_n, +\infty[$.

5.5.4. La mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{T}^n$ est bien entendu invariante par A et on l'a retrouvée. Si $x \in \boldsymbol{T}^n$ est un point périodique de A (de tels points sont exactement ceux à coordonnées rationnelles) de période q, alors la mesure :

$$\mu_x = \sum_{j=0}^{q-1} \delta_{A^j x}$$

définie, sur toute fonction continue $\varphi \in C^0(\boldsymbol{T}^n)$, par :

$$\langle \mu_x, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^j(x))$$

est une mesure A-invariante et donc, a fortiori, une distribution A-invariante. Un lecteur bien regardant aurait raison de poser la question : la mesure μ_x est-elle recensée par le corollaire 5.2 ? Voici la réponse.

Comme μ_x est une distribution invariante par le difféomorphisme A, on a, pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{T}^n)$ et tout $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$\begin{aligned}\langle \mu_x, \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^j(x)) \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} \varphi(A^{j+k}(x)).\end{aligned}$$

Mais φ s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} e^{2i\pi \langle B^k \boldsymbol{m}, x \rangle}.$$

Et comme la matrice B est la transposée de A, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} e^{2i\pi \langle \boldsymbol{m}, A^k x \rangle}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\langle \mu_x, \varphi \rangle &= \sum_{j=0}^{q-1} \left(\sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} e^{2i\pi \langle B^k \boldsymbol{m}, A^j x, \rangle} \right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle B^k \boldsymbol{m}, A^j x \rangle} \right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle \boldsymbol{m}, A^{j+k} x \rangle} \right) \\ &= \sum_{\boldsymbol{m} \in \Sigma} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k \boldsymbol{m}} \left(\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi \langle \boldsymbol{m}, A^j x \rangle} \right).\end{aligned}$$

Comme la quantité :

$$\sum_{j=0}^{q-1} e^{2i\pi\langle \boldsymbol{m}, A^j x\rangle}$$

ne dépend que de x et de $\boldsymbol{m}$, on la note $a(x,\boldsymbol{m})$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\langle \mu_x, \varphi\rangle &= \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} a(x,\boldsymbol{m})\left(\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi_{B^k\boldsymbol{m}}\right)\\ &= \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} a(x,\boldsymbol{m})\langle \ell_{\boldsymbol{m}}, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\mu_x = \sum_{\boldsymbol{m}\in\Sigma} a(x,\boldsymbol{m})\ell_{\boldsymbol{m}}$$

où la convergence de la série est entendue au sens de la topologie faible sur l'espace des distributions $\mathscr{D}'(\boldsymbol{T}^n)$. □

Références

[AE] A. Abouqateb and A. El Kacimi Alaoui, Fonctionnelles invariantes et courants basiques, Studia Math., **143** (2000), 199–219.

[Ca] Y. Carrière, Flots riemanniens, Structures transverses des feuilletages, Toulouse, 1982, Astérisque, **116** (1984), 31–52.

[Ek] A. El Kacimi Alaoui, Sur la cohomologie feuilletée, Compos. Math., **49** (1983), 195–215.

[EMM] A. El Kacimi Alaoui, T. Moussa and S. Matsumoto, Currents invariant by a Kleinian group, Hokkaido Math. J., **26** (1997), 177–202.

[EN] A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau, A class of C^∞-stable foliations, Ergodic Theory Dynam. Systems, **13** (1993), 697–704.

[ET] A. El Kacimi Alaoui and A. Tihami, Cohomologie bigraduée de certains feuilletages, Bulletin de la Soc. Math. de Belgique Fasc. 2, **38** (1986), 144–157.

[FF1] L. Flaminio and G. Forni, Invariant distributions and time averages for horocycle flows, Duke Math. J., **119** (2003), 465–526.

[FF2] L. Flaminio and G. Forni, On the cohomological equation for nilflows, Prépublication : arXiv: math.DS/0512192 v1 9 Dec 2005.

[Fo] G. Forni, Solutions of the cohomological equation for area-preserving flows on compact surfaces of higher genus, Ann. of Math., **146** (1997), 295–344.

[GW] S. Greenfield and N. Wallach, Globally hypoelliptic vector fields, Topology, **12** (1973), 247–253.

[Ka] A. Katok, Cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory, In collaboration with E. A. Robinson, Smooth ergodic theory and its applications, In Proc. Sympos. Pure Math., **69** (2001), 107–173.

[LMM] R. de la Llave, J. M. Marco and R. Moriyon, Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livsic cohomology equation, Ann. of Math. (2), **123** (1985), 357–611.

[Li1] A. Livsic, Homology properties of Y-systems, Math. Notes, **10** (1972), 754–757.

[Li2] A. Livsic, Cohomology of dynamical systems, Math. USSR, Izv., **6** (1972), 1278–1320.

[Ma] S. Matsumoto, Codimension one Anosov flows, Lect. Notes Ser. **27**, Global Analysis Research Center, Seoul, 1995.

[MM] S. Matsumoto and Y. Mitsumatsu, Leafwise cohomology and rigidity of certain Lie group actions, Ergod. Theory Dynam. Systems, **23** (2003), 1839–1866.

[Mi] D. J. Mieczkowski, The cohomological equation and representation theory, Thesis, Pennsylvania State University, 2006.

[Mo] P. Molino, Riemannian foliations, Birkhäuser, 1988.

[Sc] W. M. Schmidt, Diophantine approximation, Lecture Notes in Math., **785** (1980).

[Su] D. Sullivan, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, Invent. Math., **36** (1978), 225–255.

[Ve] A. Verjovsky, Sistemas de Anosov, Escuela Latinoamericana de Matemáticas (XII-ELAM), Lima 28 juin - 3 juillet 1999, Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines.

Akbar Dehghan-Nezhad
LAMAV, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9
France
E-mail: adehghan@univ-valenciennes.fr

Aziz El Kacimi Alaoui
LAMAV, Le Mont Houy
Université de Valenciennes
59313 Valenciennes Cedex 9
France
E-mail: aziz.elkacimi@univ-valenciennes.fr