J. Math. Soc. Japan
Vol. 47, No. 1, 1995

Principe de Picard pour les mesures invariantes par rotation

Par Abderrahman BOUKRICHA et Ezzeddine HAOUALA

(Reçu le 21 décembre, 1992)
(Revisé le 28 juin, 1993)

0. Introduction.

Dans ce travail, nous considérons l'équation de Schrödinger stationnaire généralisée: (1) $\Delta u-u\mu=0$ au sens des distributions sur $U=\{x\in\boldsymbol{R}^{n}\setminus\{0\}\mid 0<\|x\|<p\}$, $n\geqq 2$ et $p>0$, avec μ une mesure dans la classe de Kato locale $M(U)$ (voir § 1) associée à $\bar{U}\setminus\{0\}$.

La notion de principe des singularitiés positives connue sous le nom de principe de Picard a suscité depuis le début de ce siècle l'intérêt de plusieurs travaux (voir [**3**], [**4**], [**6**], [**7**], [**10**], [**11**], [**22**], [**23**], [**24**], [**25**], [**26**], [**27**]) et sa caractérisation reste dans le cas des mesures non invariantes par rotation un problème ouvert.

Dans ce travail, nous prouvons dans $\boldsymbol{R}^{n}$, $n\geqq 2$, pour les mesures invariantes par rotation une nouvelle caractérisation du principe de Picard à l'aide de la fonction de Green associée à l'èquation (1). Nous en tirons pour le principe de Picard, la monotonie, la positive homogénéité et le "Order Comparison Theorem" de M. Nakai qui ont été prouvés par M. Nakai et M. Kawamura dans $\boldsymbol{R}^{2}$ et pour les mesures à densité radiale localement höldérienne sur $\bar{U}\setminus\{0\}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Ensuite en utilisant une nouvelle caractérisation des ensembles essentiels introduits par Toshimasa Tada [**29**], nous généralisons en dimension supérieure à deux et dans le cadre des mesures de Kato le résultat de M. Nakai [**22**] sur la non additivité du principe de Picard.

Au paragraphe 1, nous rappelons la notion de principe de Picard pour l'équation (1), l'existence des solutions bornées et non bornées et leur comportement au voisinage de la singularité de μ.

Au paragraphe 2, nous considérons une mesure $\mu\in M(U)$ invariante par rotation et nous prouvons entre autres l'égalité intéressante suivante:

Il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $r\in]0, p[$ et $\theta\in S^{n-1}$ on a:

$$\int_{S^{n-1}}{}^{\mu}G^{U}(r\theta, rz)\sigma_{n-1}(dz)=\alpha e_{\mu}(r)h_{\mu}(r)$$

où ${}^{\mu}G^{U}$ est la fonction de Green associée à l'équation (1) et l'ouvert U. e_{μ} est la solution bornée de (1) qui tend vers 1 à la frontière de $\bar{U}$ et h_μ est la solution non bornée et radiale qui vaut 1 pour $\|x\|=p/2$ et qui tend vers zéro à la frontière de $\bar{U}$.

Au paragraphe 3, nous considérons dans $\boldsymbol{R}^n$, $n\geqq 2$, les mesures radiales dans $M(U)$. Nous établissons pour le principe de Picard une nouvelle caractérisation et nous déduisons sa monotonie.

Au paragraphe 4, et avec les mêmes conditions que dans le précédent, nous prouvons que le principe de Picard est positivement homogène ainsi que la validité du "Order Comparison Theorem" de M. Nakai.

Au paragraphe 5, nous démontrons pour les ensembles $1/\|x\|^2$-essentiels la caractérisation suivante:

Un ensemble $A\subset U$ invariant par rotation est $1/\|x\|^2$-essentiel si et seulement si pour toute mesure $\nu\in M(U)$ invariante par rotation, le principe de Picard est valable pour $1_{c_A}\nu$. Nous concluons par la preuve de la non additivité du principe de Picard et ce même dans le cas invariant par rotation.

Au dernier paragraphe nous obtenons dans le cas non-invariant par rotation des Tests pour le principe de Picard. Nous considérons dans $\boldsymbol{R}^2$ une mesure μ dans $M(U)$ invariante par rotation qui vérifie le principe de Picard et ρ_1 et ρ_2 deux mesures non nécessairement invariantes par rotation et telles qu'il existe A et B deux parties de U μ-effilées en zéro (voir [6]) telle que

$$\int_{U\setminus A}^{*}\log\frac{1}{|t|}\rho_1(dt)<+\infty \quad \text{et} \quad \rho_2^*(U\setminus B)<+\infty$$

où le $*$ désigne l'intégrale supérieure.

Nous démontrons alors que $\mu+\rho_1$ et $\mu+(\alpha/\|x\|^2)\lambda+\rho_2$ vérifient le principe de Picard (où λ est la mesure de Lebesgue et α est un nombre réel strictement positif). Nous concluons que si ρ est dans la classe de Kato locale sur $\boldsymbol{R}^2$ alors $\mu+\rho$ vérifie le principe de Picard.

Les auteurs remercient le professeur Wolfhard Hansen pour l'intérêt qu'il a manifesté à ce travail et le Referee pour les remarques utiles qu'il leur a communiquées.

§1. Notations et Préliminaires.

Soit U un ouvert relativement compact de $\boldsymbol{R}^n$, $n\geqq 2$, tel que $U=W\setminus\{0\}$ avec W un ouvert qui contient l'origine et qui est regulier (voir [2]) pour le Laplacien. Soit $M(U)$ la classe de Kato locale (voir [1], [8]) associée à $\bar{U}\setminus\{0\}$, c'est à dire l'ensemble des mesures positives sur $\boldsymbol{R}^n$ qui sont portées par $\bar{U}$ et qui vérifient la propriété suivante: Pour tout ouvert V relativement compact dans $\boldsymbol{R}^n\setminus\{0\}$ la fonction: $P_V=\int G_t^V\mu(dt)$ est continue et réelle sur V (G^V est la fonction de Green associée au Laplacien et à l'ouvert V).

Pour un ouvert X de $\boldsymbol{R}^n$, nous noterons par $C(X)$ (resp. $B(X)$) l'ensemble des fonctions continues (resp. boréliennes) réelles sur X. Pour tout ensemble A de fonctions numériques, A^+ (resp. A_b) est l'ensemble de toutes les fonctions positives (resp. bornées) de A. Pour tout $r>0$ et $x\in\boldsymbol{R}^n$, $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r. On note par σ_{n-1} la mesure de surface normalisée sur la sphère unité $S^{n-1}=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid \|x\|=1\}$.

Soit f une fonction d'une partie A de $\boldsymbol{R}^n$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que A et f sont invariantes par rotation, donc f est radiale et on écrira souvent $f(r)$ à la place de $f(x)$ pour $\|x\|=r$ (exemples $e_\mu(r)$ et $h_\mu(r)$).

Si A est une partie d'un ensemble X, on notera par 1_A la fonction indicatrice de A définie de X dans $\boldsymbol{R}$ par $1_A(x)=1$ si $x\in A$ et $1_A(x)=0$ si $x\notin A$, par ${}^cA$ le complémentaire de A dans X.

Pour $\mu\in M(U)$ et $V\subset U$, nous considérons les ensembles suivants:

$$^{\mu}H(V):=\{u\in C(V): \Delta u-u\mu=0 \quad \text{au sens des distributions}\}$$

$$^{\mu}H_0:=\{h\in {}^{\mu}H^+(U): \lim_{x\to z} h(x)=0 \quad \text{pour tout } z\in\partial\overline{U}\}.$$

1.1. DÉFINITION. (Cf. [**3**], [**5**], [**6**], [**24**], [**25**], [**26**]). Soit $\mu\in M(U)$. Nous dirons que le principe de Picard est valable pour μ sur U si le cône ${}^{\mu}H_0$ est engendré par une seule fonction.

Notons que cette notion a été étudiée sous le nom de principe des singularités isolées par M. Brelot et a été appelée principe de Picard par G. Bouligand et M. Nakai et ce dans le cas où μ est donnée par une densité localement hölderienne par rapport à la mesure de Lebesgue sur la boule unité de $\boldsymbol{R}^2$.

1.2. REMARQUE. Soit $\mu\in M(U)$ et V un ouvert dans U tel que $V\cup\{0\}$ est un voisinage de 0. Alors le principe de Picard est valable pour μ sur U si et seulement si il l'est pour μ sur V.

1.3. LEMME. *Soit $\mu\in M(U)$. Alors on a:*

a) *Il existe une unique fonction continue bornée e_μ dans ${}^{\mu}H^+(U)$ telle que $\lim_{x\to z} e_\mu(x)=1$ pour tout point z régulier dans la frontière de $\overline{U}$.*

Si μ et U sont invariants par rotation alors pour $x_0\in U$ on a:

b) *Il existe une unique fonction h_μ dans ${}^{\mu}H_0$ invariante par rotation telle que $h_\mu(x_0)=1$. De plus on a $\lim_{x\to 0} h_\mu(x)=+\infty$.*

c) *Soit μ' une autre mesure invariante par rotation dans $M(U)$ telle que $\mu\leqq\mu'$. Alors $\lim_{x\to 0} e_{\mu'}/e_\mu(x)$ et $\lim_{x\to 0} h_\mu/h'_\mu(x)$ existent et sont toutes les deux dans $[0, 1]$.*

PREUVE. Pour a) voir [**3**] et pour b) et c) voir [**4**] et [**6**].

§ 2. Fonction de Green.

Dans ce paragraphe on considère une mesure $\mu \in M(U)$ et on suppose que l'ouvert U de $\boldsymbol{R}^n (n \geqq 2)$ possède une fonction de Green G^U pour le laplacien (voir [**18**]). D'après [**3**] on a:

L'opérateur de Schrödinger $\Delta - \mu$ possède une fonction de Green symétrique sur U, notée par ${}^{\mu}G^U$, qui vérifie l'égalité suivante:

$$G_x^U(y) = {}^{\mu}G_x^U(y) + \int G_t^U(x) {}^{\mu}G_t^U(y) \mu(dt) \quad \text{pour tout } x, y \in U.$$

Dans la suite on suppose que $U = B(0, p) \setminus \{0\}$ avec $p > 0$. On considère la fonction de Green $G^U = G^{B(0,p)}$ donné par: $G^{B(0,p)}(x, y) = G(x, y) - H_B(G(x, \cdot))(y)$, où H_B est le noyau harmonique donné par la formule de Poisson sur la boule $B(0, p)$, c.à.d.

$$H_B(G(x, \cdot))(y) = p^{n-2} \int_{S^{n-1}} \frac{p^2 - \|y\|^2}{\|y - p\xi\|^n} G(x, p\xi) \sigma_{n-1}(d\xi);$$

et $G(x, y) = c_n \|x - y\|^{-n+2}$ si $n \geqq 3$, $G(x, y) = c_2 \log \|x - y\|^{-1}$ si $n = 2$ où $c_n = \Gamma(n/2)/2(n-2)\pi^{n/2}$ pour $n \geqq 3$ et $c_2 = 1/2\pi$.

2.1. PROPOSITION. *Si $x \in U$ et $r \in]0, p[$ on a: pour $n \geqq 3$*

$$\int_{S^{n-1}} G^U(x, rz) \sigma_{n-1}(dz) = \begin{cases} c_n \left(\dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} - \dfrac{1}{p^{n-2}} \right) & si \quad \|x\| > r \\ c_n \left(\dfrac{1}{r^{n-2}} - \dfrac{1}{p^{n-2}} \right) & si \quad \|x\| \leqq r, \end{cases}$$

et pour $n = 2$ on a:

$$\int_{S^{n-1}} G^B(x, rz) \sigma_{n-1}(dz) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \left(\log \dfrac{p}{\|x\|} \right) & si \quad \|x\| > r \\ \dfrac{1}{2\pi} \left(\log \dfrac{p}{r} \right) & si \quad \|x\| \leqq r. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. On peut voir [**18**] ou simplement utiliser la propriété de la moyenne et le principe du minimum.

2.2. COROLLAIRE. *Pour $n \geqq 3$, on a pour $x \in \boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}$ et $r > 0$,*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|x - rz\|^{n-2}} \sigma_{n-1}(dz) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} & si \quad \|x\| > r \\ \dfrac{1}{r^{n-2}} & si \quad \|x\| \leqq r. \end{cases}$$

2.3. PROPOSITION. *Soit $\mu \in M(U)$ une mesure invariante par rotation. Alors il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $0 < r < p$*

$$\int_{S^{n-1}} {}^{\mu}G^{U}(x, rz)\sigma_{n-1}(dz) = \begin{cases} \alpha e_{\mu}(r)h_{\mu}(x) & si \quad \|x\| \geqq r \\ \alpha e_{\mu}(x)h_{\mu}(r) & si \quad \|x\| \leqq r\,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Comme μ est invariante par rotation, alors la fonction $f: x \mapsto \int {}^{\mu}G^{U}(x, rz)\sigma_{n-1}(dz)$ est radiale.

D'après la proposition 2.1, l'application $x \in U \to \int G^{U}(x, rz)\sigma_{n-1}(dz)$ est continue et réelle dans U. Comme ${}^{\mu}G^{U} \leqq G^{U}$, il en résulte que f est continue sur U. Soit $\beta := f(r)/h_{\mu}(r)$ et $\gamma := f(r)/e_{\mu}(r)$.

Comme f est dans ${}^{\mu}H(U \setminus \{x \in \boldsymbol{R}^{n} \mid \|x\| = r\})$, d'après le principe du minimum [**3**] on a:

$$f(x) = \beta h_{\mu}(x) \text{ si } \|x\| > r \text{ et } f(x) = \gamma e_{\mu}(x) \text{ si } \|x\| < r\,.$$

D'après [**12**] thm. 11, 1.1. et le procédé diagonal, il existe une suite $(x_k)_k \subset U$ telle que $\lim x_k = 0$ et $\lim {}^{\mu}G^{U}_{x_k}/e_{\mu}(x_k)$ existe et donne une fonction dans ${}^{\mu}H_0$. D'après le théorème de convergence dominée et le lemme 1.3.b), il existe $\alpha > 0$ tel que $\gamma = \alpha h_{\mu}(r)$.

Il résulte de ce qui précède que $f(r) = \beta h_{\mu}(r) = \alpha h_{\mu}(r) e_{\mu}(r)$. Par conséquent $\beta = \alpha e_{\mu}(r)$ et on a le résultat demandé.

2.4. COROLLAIRE. *Soit $\mu \in M(U)$ une mesure radiale. Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $r \in]0, p[$ et $\theta \in S^{n-1}$:*

$$\int_{S^{n-1}} {}^{\mu}G^{U}(r\theta, rz)\sigma_{n-1}(dz) = \alpha e_{\mu}(r)h_{\mu}(r)\,.$$

2.5. COROLLAIRE. *Soient μ_1, μ_2 deux mesures dans $M(U)$ invariantes par rotation telles que $\mu_1 \leqq \mu_2$. Alors il existe des constantes réelles strictement positives β_1 et β_2 telles que*

$$e_{\mu_2}h_{\mu_2} \leqq \beta_1 e_{\mu_1}h_{\mu_1} \leqq \beta_2 G^{U}(0, \cdot)\,.$$

§ 3. Caractérisation et monotonie du principe de Picard pour les mesures radiales.

Nous considérons dans $\boldsymbol{R}^{n}$, $(n \geqq 2)$, $U = B(0, p) \setminus \{0\}$ et G^{U} la fonction de Green définie comme dans le paragraphe précédent et $\mu \in M(U)$ une mesure invariante par rotation. Pour la validité du principe de Picard pour μ sur U on a les caractérisations suivantes.

3.1. THÉORÈME. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) *Le principe de Picard est valable pour μ.*

2) *Il existe un réel $\beta > 0$ tel que* $\lim_{x \to 0} \dfrac{e_{(\mu + \beta\lambda/\|t\|^2)}}{e_{\mu}}(x) = 0$.

3) *Pour tout réel* $\beta>0$ *on a* $\lim_{x\to 0}\frac{e_{(\mu+\beta\lambda/\|t\|^2)}}{e_\mu}(x)=0$.

4) *Il existe un réel* $\alpha>0$ *tel que* $\lim_{x\to 0}\frac{h_\mu}{h_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)}}(x)=0$.

5) *Pour tout réel* $\alpha>0$ *on a* $\lim_{x\to 0}\frac{h_\mu}{h_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)}}(x)=0$.

6) $\int e_\mu(t)h_\mu(t)\|t\|^{-2}\lambda(dt)=+\infty$.

7) $\int_0^p\left(\int_{S^{n-1}}{}^\mu G^U(r\theta, rz)\sigma_{n-1}(dz)\right)r^{n-3}dr=+\infty \quad \forall\theta\in S^{n-1}$.

DÉMONSTRATION. Pour les équivalences 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) $\Leftrightarrow$ 5) $\Leftrightarrow$ 6) voir [**6**] thm. 4.5. Pour 1) $\Leftrightarrow$ 4) nous reprenons la même démonstration que celle de [**4**] dans le cas où μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Enfin l'équivalence 6) $\Leftrightarrow$ 7) est une conséquence immédiate du corollaire 2.4.

3.2. THÉORÈME. (Monotonie du principe de Picard pour les mesures radiales): *Soient* μ_1 *et* μ_2 *deux mesures radiales dans* $M(U)$ *telles que* $\mu_1\leqq\mu_2$. *Alors si le principe de Picard est valable pour* μ_2 *il en est de même pour* μ_1.

DÉMONSTRATION. D'après la construction de la fonction de Green perturbée ${}^\mu G^U$ (voir [**3**]) on a: ${}^{\mu_2}G^U\leqq{}^{\mu_1}G^U$. Le résultat découle alors immédiatement de la propriété 7) du théorème 3.1 précédent.

3.3. REMARQUE. Le théorème précédent n'est pas valable si les deux mesures ne sont pas invariantes par rotation et de même si uniquement la plus grande mesure est invariante par rotation voir ([**27**], [**28**]).

§4. "Order Comparison Theorem" de M. Nakai.

Dans ce paragraphe nous répondons dans le cadre des mesures invariantes par rotation, par l'affirmative à des questions posées par M. Nakai dans [**23**] et résolues dans [**20**], [**26**] dans le cadre des mesures à densité localement höldérienne par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\boldsymbol{R}^2$. Plus précisément, nous prouvons que si le principe de Picard est valable pour μ sur U, alors il en est de même pour $c\mu$ pour tout réel c positif. En utilisant les résultats des paragraphes précédents, nous prouvons pour les mesures invariantes par rotation dans $\boldsymbol{R}^n$ le "Order Comparison Theorem" de M. Nakai suivant. Si μ_1 et μ_2 sont dans $M(U)$ et invariantes par rotation et telles qu'il existe $c>0$ avec $\mu_1/c\leqq\mu_2\leqq c\mu_1$, alors μ_1 et μ_2 sont de même nature pour le principe de Picard.

4.1. THÉORÈME. *Soient* μ *une mesure invariante par rotation dans* $M(U)$ *et* c *une constante strictement positive. Alors le principe de Picard est valable pour*

μ sur U si et seulement si il l'est pour $c\mu$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de considérer le cas $c \geqq 1$ puisque $\mu=(c\mu)/c$. Supposons que $c\mu$ vérifie le principe de Picard. Alors comme $\mu \leqq c\mu$ la validité du principe de Picard pour μ découle de la monotonie démontrée dans le théorème 3.2. Pour montrer l'implication directe, supposons que μ vérifie le principe de Picard. D'après [**3**] Satz 3.6 on a:

$$^{\mu}G_x^U(y) = {}^{c\mu}G_x^U(y) + \int {}^{\mu}G_t^U(x)\,{}^{c\mu}G_t^U(y)(c-1)\mu(dt)$$

pour tout x, $y \in U$. En considérant $y=\|x\|z$ avec $z \in S^{n-1}$, en intégrant par rapport à σ_{n-1} et en utilisant le corollaire 2.4 on a: Il existe deux constantes strictement positives α et β telles que

$$\alpha e_\mu(x)h_\mu(x) = \beta e_{c\mu}(x)h_{c\mu}(x) + (c-1)\int_{S^{n-1}}\left(\int {}^{\mu}G_t^U(x)\,{}^{c\mu}G_t^U(\|x\|z)\mu(dt)\right)\sigma_{n-1}(dz).$$

D'après la proposition 2.3 on a:

$$\int_{S^{n-1}} {}^{c\mu}G_t(\|x\|z)\sigma_{n-1}(dz) = \begin{cases} \beta e_{c\mu}(x)h_{c\mu}(t) & \text{si } \|t\| > \|x\|, \\ \beta e_{c\mu}(t)h_{c\mu}(x) & \text{si } \|t\| \leqq \|x\|. \end{cases}$$

Il en résulte d'après le théorème de Fubini que:

$$\begin{aligned} I := & \int_{S^{n-1}}\left(\int {}^{\mu}G_t(x)\,{}^{c\mu}G_t(\|x\|z)\mu(dt)\right)\sigma_{n-1}(dz) \\ = & \ \beta e_{c\mu}(x)\int_{\|t\|>\|x\|} {}^{\mu}G_t(x)h_{c\mu}(t)\mu(dt) + \beta h_{c\mu}(x)\int_{\|t\| \leqq \|x\|} {}^{\mu}G_t(x)e_{c\mu}(t)\mu(dt). \end{aligned}$$

Comme les fonctions $h_{c\mu}$ et $e_{c\mu}$ sont respectivement décroissante et croissante, on obtient:

$$I \leqq \beta e_{c\mu}(x)h_{c\mu}(x)\int {}^{\mu}G_t^U(x)\mu(dt).$$

D'après [**3**], on a $\int {}^{\mu}G_t^U(x)\mu(dt) = 1 - e_\mu(x)$.

Il en resulte que

$$\alpha e_\mu(x)h_\mu(x) \leqq \beta e_{c\mu}(x)h_{c\mu}(x)[1+(c-1)(1-e_\mu(x))].$$

Comme $1-e_\mu(x) \leqq 1$ et $c \geqq 1$ on a pour tout $x \in U$

$$\alpha e_\mu(x)h_\mu(x) \leqq c\beta e_{c\mu}(x)h_{c\mu}(x).$$

Comme par hypothèse μ vérifie le principe de Picard, d'après le théorème 3.1 on a:

$$\int_U e_\mu(x)h_\mu(x)\frac{1}{\|x\|^2}\lambda(dx) = +\infty$$

et d'après l'inégalité précédente, la propriété 6) du théorème 3.1 est verifiée pour $c\mu$ et par conséquent la validité du principe de Picard.

4.2. COROLLAIRE. (Order Comparison Theorem de M. Nakai): *Soient μ_1, μ_2 deux mesures radiales dans $M(U)$ et $c>0$ un nombre réel tels que $\mu_1/c \leqq \mu_2 \leqq c\mu_1$ sur $\boldsymbol{R}^n$. Alors μ_1 et μ_2 sont de même nature pour la validité du principe de Picard.*

DÉMONSTRATION. Supposons que le principe de Picard est valable pour μ_1. Alors il l'est aussi pour $c\mu_1$ d'après le théorème 4.1, donc pour μ_2 d'après le théorème 3.2. La réciproque découle de l'inégalité $\mu_1 \leqq c\mu_2$.

§5. Ensembles essentiels et non-additivité du principe de Picard.

Dans ce paragraphe, nous définissons et caractérisons les ensembles essentiels. Nous prouvons que le principe de Picard n'est pas additif même dans le cas invariant par rotation, c'est à dire si μ_1, $\mu_2 \in M(U)$ et vérifient le principe de Picard, alors il n'est pas toujours de même pour $\mu_1+\mu_2$.

Dans la suite soit $U=B(0, 1)\setminus\{0\}$, $A\subset U$ et $\mu \in M(U)$. Nous supposons que μ et A sont invariants par rotation.

5.1. DÉFINITION. (Cf. [**29**], [**16**].) Nous dirons que A est μ-essentiel si toute mesure $\rho \in M(U)$ invariante par rotation telle que $1_A\rho \leqq 1_A\mu$ vérifie le principe de Picard.

5.2. REMARQUES. 1) La notion d'ensemble μ-essentiel a été introduite par T. Tada [**29**], pour les mesures μ sur $\boldsymbol{R}^2$ qui possèdent une densité localement höldérienne sur $B(0, 1)\setminus\{0\}$ par rapport à la mesure de Lebesgue et reprise par E. Haouala [**16**] dans le cas général de la classe de Kato $M(U)$ dans $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqq 2$. Pour la définition d'ensemble essentiel ils ont considéré ceux de la forme

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in U:\ a_n \leqq \|x\| \leqq b_n\},$$

avec $0<b_{n+1}<a_n<b_n<1$ pour tout $n \in \boldsymbol{N}$, et $\lim a_n=0$.

2) Comme chez Tada [**29**], nous dirons qu'un ensemble $A\subset U$ invariant par rotation est c-essentiel si A est $c\lambda$-essentiel. En utilisant les paragraphes précédents on a la caractérisation importante suivante des ensembles $1/\|x\|^2$-essentiels.

5.3. THÉORÈME. *A est $1/\|x\|^2$-essentiel si et seulement si pour toute mesure $\nu \in M(U)$, le principe de Picard est valable pour $1_{cA}\nu$.*

DÉMONSTRATION. Montrons l'implication directe. Soit $\nu \in M(U)$. Alors $1_A 1_{cA}\nu = 0 \leqq 1_A\lambda/\|x\|^2$. Comme A est $1/\|x\|^2$-essentiel, le principe de Picard est alors valable pour $1_{cA}\nu$.

Pour l'implication réciproque, soit $\rho\in M(U)$ telle que $1_A\rho\leqq 1_A\lambda/\|x\|^2$. D'après [7] thm. 2.3 et l'hypothèse, le principe de Picard est valable pour $\lambda/\|x\|^2+1_{cA}\rho$ et par suite il en est de même pour ρ d'après le théorème 3.2 de monotonie. D'où la réciproque du théorème.

D'après [**16**] on a le résultat suivant:

5.4. THÉORÈME. *Soit* $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in U: a_n\leqq\|x\|\leqq b_n\}$ *avec* $0<b_{n+1}<a_n<b_n<1$ *pour tout* $n\in\boldsymbol{N}$, *et* $\lim a_n=0$. *Alors* A μ*-essentiel implique* A $1/\|x\|^2$*-essentiel.*

5.5. REMARQUE. La réciproque du théorème 5.4 est fausse (voir par exemple Tada [**29**] ou Haouala [**16**]). Plus précisement il existe une mesure $\mu\in M(U)$ invariante par rotation qui vérifie le principe de Picard et un ensemble $A\subset U$ tel que A est $1/\|x\|^2$-essentiel mais non μ-essentiel.

5.6. THÉORÈME. *Il existe deux mesures* μ_1 *et* μ_2 *dans* $M(U)$ *telles que le principe de Picard est valable pour* μ_1 *et* μ_2 *et non valable pour* $\mu_1+\mu_2$.

DÉMONSTRATION. D'après la remarque précédente, il existe une mesure $\mu\in M(U)$ qui vérifie le principe de Picard et il existe $A\subset U$ invariant par rotation tel que A est $1/\|x\|^2$-essentiel mais non μ-essentiel. Donc il existe $\rho\in M(U)$ invariante par rotation telle que $1_A\rho\leqq 1_A\mu$, mais ρ ne vérifie pas le principe de Picard. L'inégalité $1_A\rho\leqq 1_A\mu$ et le théorème 3.2 entrainent que $1_A\rho$ vérifie le principe de Picard. D'après l'hypothèse A est $1/\|x\|^2$-essentiel, on a $1_{cA}\rho$ vérifie le principe de Picard. Il en résulte que la mesure $\rho\in M(U)$ est la somme de deux mesures qui vérifient le principe de Picard.

5.7. REMARQUE. En 1974 M. Nakai [**22**] a montré, sur le disque unité U de $\boldsymbol{R}^2$, qu'il existe deux fonctions régulières P et Q qui sont invariantes par rotation, vérifient le principe de Picard mais leur somme ne le vérifie pas. Ensuite M. Kawamura [**19**] a renforcé ce résultat en prouvant que toute fonction P localement höldérienne sur $\bar{U}\setminus\{0\}$ est la somme de deux fonctions du même type qui vérifient le principe de Picard. Le théorème précédent est alors une généralisation de [**22**] pour les mesures de Kato et la dimension supérieure à deux.

§6. Test pour le principe de Picard.

Dans ce paragraphe, nous considérons $U=\{x\in\boldsymbol{R}^2\setminus\{0\}\mid 0<\|x\|<1\}$, $\mu\in M(U)$ une mesure invariante pour rotation qui vérifie le principe de Picard et ρ_1 et ρ_2 deux mesures dans $M(U)$ qui vérifient les propriétés suivantes: Il existe A, B deux parties de U, μ-effilées en zéro (voir [**6**]) telles que

$$\int_{U\setminus A}^{*} \log \frac{1}{\|t\|} \rho_1(dt) < +\infty \quad \text{et} \quad \rho_2^*(U\setminus B) < +\infty .$$

Nous allons prouver que $\mu+\rho_1$ et $\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2+\rho_2$ $(\alpha>0)$ vérifient le principe de Picard.

6.1. THÉORÈME. *Soit* $\rho\in M(U)$ *et* $E\subset U$ *une partie* μ*-effilée en zéro tels que* $\int_{U\setminus E}^{*} e_\mu(t)h_\mu(t)\rho(dt)<+\infty$, *alors* $\mu+\rho$ *vérifie le principe de Picard.*

DÉMONSTRATION. Voir [**15**].

6.2. THÉORÈME. $\mu+\rho_1$ *et* $\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2+\rho_2$ $(\alpha>0)$ vérifient le principe de Picard.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 2.5, il existe des constantes strictement positives β_1 et β_2 telles que:

$$e_\mu h_\mu(t) \leqq \beta_1 \log \frac{1}{\|t\|} \quad \text{et} \quad e_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)} h_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)} \leqq \beta_2 e_{\alpha\lambda/\|t\|^2} h_{\alpha\lambda/\|t\|^2} .$$

Comme $e_{\alpha\lambda/\|t\|^2}(x)=\|x\|^{\sqrt{\alpha}}$ et $h_{\alpha\lambda/\|t\|^2}=\|x\|^{-\sqrt{\alpha}}-\|x\|^{\sqrt{\alpha}}$, on a alors

$$e_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)} h_{(\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2)} \leqq \beta_2 .$$

Le résultat découle alors immédiatement du théorème 6.1.

6.3. COROLLAIRE. *Si* ρ_1 *et* ρ_2 *sont deux mesures dans* $M(U)$ *telles que* $\int \log(\rho_1/\|t\|)(dt)<+\infty$ *et* $\rho_2(U)<+\infty$, *alors* $\mu+\rho_1$ *et* $\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2+\rho_2$ $(\alpha>0)$ *vérifient le principe de Picard.*

6.4. COROLLAIRE. *Si* ρ *est une mesure dans* $M(U)$ *et dans* K_2^{loc} (*voir* [**1**] *ou* [**9**]) *alors* $\mu+\alpha\lambda/\|t\|^2+\rho$ *vérifie le principe de Picard pour tout* $\alpha\geqq 0$.

6.5. REMARQUES. a) Les résultats des corollaires 6.3 et 6.4 sont à nos connaissances inconnus. Cependant nous ne savons pas donner un résultat analogue au corollaire 6.3 dans les cas $\alpha=0$ et les cas $\mu=0$, $\alpha=0$ et $\rho_2(U)<+\infty$.

b) Dans le cas où la mesure ρ_2 possède une densité localement höldérienne par rapport à la mesure de Lebesgue, alors la condition $\rho_2(U)<+\infty$ implique, d'aprés un résultat de M. Nakai [**23**], la validité du principe de Picard.

c) Le théorème 6.1 n'est pas en général vrai en dimension $n\geqq 3$. Il utilise le caractère spécial de l'effilement en dimension deux.

References

[1] M. Aizenman and B. Simon, Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators, Comm. Pure Appl. Math., **35** (1982), 209-273.

[2] J. Bliedtner and W. Hansen, Potential Theory—An Analytic and Probabilistic Ap-

proach to Balayage, Universitext., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1986.

[3] A. Boukricha, Das Picard-Prinzip und verwandte Fragen bei Störung von harmonischen Räumen, Math. Ann., **239** (1979), 247-270.

[4] A. Boukricha and H. Hueber, The Poisson space ${}^{c}P_{X}$ for $\Delta u=cu$ with rotation free c, Académie royale de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, 5eme Série, Tome XIV (1978-10), 651-658.

[5] A. Boukricha, The Schrödinger equation with an isolated singularity, In infinite dimensional analysis and stochastic processes, Res. Notes Math., **124** (1985), 1-15.

[6] A. Boukricha, Principe de Picard et comportement des solutions continues de l'équation de Schrödinger, au voisinage d'une singularité isolée, Bibos Publication, **247**, Universität Bielefeld, 1987.

[7] A. Boukricha, Principe de Picard pour les mesures invariantes par rotation et applications, Potential Theory, (ed. M. Kishi), Walter de Gruyter & Co, Berlin-New York, 1991.

[8] A. Boukricha, Classe de Kato et équation de Schrödinger généralisée avec une singularité isolée, Afrika Mat., serie 3 vol. 1, (1993).

[9] A. Boukricha, W. Hansen and H. Hueber, Continuous solutions of the generalized Schrödinger equation and perturbation of harmonic spaces, Exposition. Math., **5** (1987), 97-135.

[10] M. Brelot, Etude de l'équation de la chaleur $\Delta u(M)=c(M)u(M)$, $c(M)\geqq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient, Ann. Sci. École Norm. Sup., **48** (1931), 153-246.

[11] M. Brelot, Sur le principe des singularités positives et la notion de source pour l'équation $\Delta u(M)=c(M)u(M)$ $(c\geqq 0)$, Ann. Univ. Lyon Section AXI, **9**.

[12] C. Constantinescu and A. Cornea, Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[13] W. Hansen, Perturbation of harmonic spaces and construction of semigroups, Invent. Math., **19** (1973), 149-164.

[14] W. Hansen, Perturbation of harmonic spaces, Math. Ann., **251** (1980), 111-122.

[15] E. Haouala, Effilement minimal en une singularité isolée de l'équation de Schrödinger et application au principe de Picard, Potential Analysis, **3** (1994), 133-143.

[16] E. Haouala, Ensembles essentiels du principe de Picard pour les mesures invariantes par rotation, preprint.

[17] E. Haouala, Test pour le principe de Picard, preprint.

[18] L. L. Helms, Introduction to Potential Theory, Wiley-Interscience, New York-London-Sydney-Toronto, 1969.

[19] M. Kawamura, A remark on inhomogeneity of Picard principle, J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 517-519.

[20] M. Kawamura and M. Nakai, A test of Picard principle for rotation free densities II, J. Math. Soc. Japan, **28** (1976), 323-342.

[21] M. Murata, Structure of positive solutions to $(-\Delta+V)u=0$ in $\boldsymbol{R}^{n}$, Duke Math. J., **53** (1986), 869-943.

[22] M. Nakai, A remark on Picard principle, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 806-808.

[23] M. Nakai, Picard principle for finite densities, Nagoya Math. J., **70** (1978), 7-24.

[24] M. Nakai, Martin boundary over an isolated singularity of rotation free densities, J. Math. Soc. Japan, **26** (1974), 483-507.

[25] M. Nakai, A test for Picard principle, Nagoya Math. J., **56** (1974), 105-119.

[26] M. Nakai, A test for Picard principle for rotation free densities, J. Math. Soc. Japan, **27** (1975), 412-431.

[27] M. Nakai and T. Tada, Extreme Nonmonotoneity of Picard Principle, Math. Ann., **281** (1988), 279-293.
[28] T. Tada, Nonmonotoneity of Picard principle for Schrödinger operators, Proc. Japan Acad. Ser. A, **66** (1990).
[29] T. Tada, Essential sets of Picard principle for rotation free densities, Kodai Math. J., **14** (1991), 134-143.

Abderrahman BOUKRICHA
Université de Tunis-II-
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
1060 Tunis
Tunisie

Ezzeddine HAOUALA
Université de Tunis-II-
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
1060 Tunis
Tunisie