

Espaces symétriques ordonnés et algèbres de Volterra

Par Jacques FARAUT

(Reçu le 5 fév., 1990)

L'étude des espaces symétriques ordonnés que nous présentons a été motivée par une question de mécanique quantique relativiste sur laquelle mon attention a été attirée par G. Viano. Il s'agit de l'équation de Bethe-Salpeter qui intervient dans la description des collisions de particules [4]. C'est une équation intégrale qui possède une propriété d'invariance par le groupe de Lorentz et une propriété de causalité.

Nous considérons d'abord la situation générale suivante: G/H est un espace homogène ordonné pour lequel les intervalles sont compacts. Il lui est associé un semi-groupe S contenu dans G tel que $S \cap S^{-1} = H$. Sous certaines hypothèses l'algèbre des noyaux causaux invariants sur G/H est commutative. Nous nous intéressons ensuite au cas où l'espace homogène G/H est un espace symétrique et où l'ordre est défini par une structure causale invariante globale. D'après un résultat de Ol'shanskii [12], c'est le cas si l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H est hermitienne et si celle de G est la complexifiée de \mathfrak{h} . Nous montrons qu'alors les intervalles sont compacts. Nous décrivons ensuite de nombreux exemples d'espaces symétriques qui sont des variétés causales globales pour lesquels les intervalles sont compacts et l'algèbre des noyaux causaux invariants est commutative. Nous montrons enfin que ces espaces symétriques sont des variétés causales globalement hyperboliques.

Dans le cadre du projet Akizuki, un séjour au département de mathématiques de l'Université Tôhoku en 1989 m'a permis de mener à bien ce travail. Il a été présenté à la réunion annuelle de la Société Mathématique du Japon en août 1989 à Tokyo. Ce travail a également bénéficié d'échanges fructueux avec K. Hofmann et J. Hilgert de la Technische Hochschule de Darmstadt.

1. Espaces homogènes ordonnés.

Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G . On considère sur l'espace homogène $X=G/H$ une relation d'ordre partiel invariant par G ,

$$\forall g \in G, x \geq y \iff gx \geq gy.$$

On suppose que le graphe

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x \geq y\}$$

de cette relation d'ordre est fermé. A cet ordre on associe un semi-groupe fermé S de G ,

$$S = \{g \in G \mid gx_0 \geq x_0\}, (x_0 = eH).$$

Nous avons $S \cap S^{-1} = H$. Réciproquement, si S est un semi-groupe fermé de G tel que $S \cap S^{-1} = H$, alors S définit sur G/H un ordre partiel invariant,

$$x \geq y \text{ si } x = g_1H, y = g_2H, g_2^{-1}g_1 \in S.$$

On suppose qu'il existe sur X une mesure, notée dx , invariante par G . On note $D(a, b)$ l'intervalle d'extrémités a et b ,

$$D(a, b) = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}.$$

Nous considérons les hypothèses (A) suivantes

(A1) Les intervalles sont compacts.

(A2) Tout compact E de X est contenu dans un intervalle,

$$\exists a, b, E \subset D(a, b).$$

(A3) La mesure d'un intervalle $D(a, b)$ est une fonction continue de a et b .

Un *noyau causal* sur X est une fonction $F(x, y)$ sur $X \times X$ à valeurs complexes qui est continue sur le graphe Γ de la relation d'ordre, et qui est nulle en dehors de Γ . Le produit de composition $F_1 \circ F_2$ de deux noyaux causaux F_1 et F_2 est défini par

$$F_1 \circ F_2(x, y) = \int F_1(x, z)F_2(z, y)dz.$$

Sous les hypothèses (A) cette intégrale est bien définie car le support de l'intégrand est contenu dans l'intervalle $D(y, x)$ qui est compact, et le noyau $F_1 \circ F_2$ est aussi un noyau causal. L'espace $V(X)$ des noyaux causaux est une algèbre, l'*algèbre de Volterra* de X . Un noyau causal F est dit invariant si, pour tout g de G et tous x, y de X ,

$$F(gx, gy) = F(x, y).$$

L'espace $V(X)^{\text{in}}$ des noyaux causaux invariants est une sous-algèbre de $V(X)$. A un noyau causal invariant F associons la fonction f définie sur G par

$$f(g) = F(gx_0, x_0).$$

La fonction f est biinvariante par H , continue sur S et nulle en dehors de S . Réciproquement à une telle fonction f définie sur G correspond un noyau causal invariant.

Considérons de plus l'hypothèse (B) suivante: il existe une involution $g \mapsto g^{\#}$ du semi-groupe S telle que

$$(B1) \quad (g_1g_2)^{\#} = g_2^{\#}g_1^{\#},$$

- (B2) $\forall h \in H, h^* = h^{-1}$,
 (B3) $\forall g \in S, g^* \in HgH$.

De plus,

- (B4) l'application s (symétrie) définie par

$$\begin{aligned} s: Sx_0 &\longrightarrow S^{-1}x_0, \\ gx_0 &\longmapsto (g^*)^{-1}x_0, \end{aligned}$$

laisse la mesure dx invariante.

REMARQUE. Introduisons la propriété

(B3)' tout g de S peut s'écrire $g=qh$, avec q dans S vérifiant $q^*=q$, et h dans H .

Alors les propriétés (B1), (B2) et (B3)' impliquent les propriétés (B1), (B2) et (B3).

THÉORÈME 1. Sous l'hypothèse (B) l'algèbre $V(X)^{\#}$ est commutative.

DÉMONSTRATION. A tout noyau causal F on associe le noyau F^* ,

$$F^*(x, y) = F(s(y), s(x)),$$

alors F^* est aussi un noyau causal.

Si F_1 et F_2 sont deux noyaux causaux, et si $F = F_1 \circ F_2$, alors $F^* = F_2^* \circ F_1^*$.
 En effet

$$\begin{aligned} F^*(x, y) &= \int F_1(s(y), z) F_2(z, s(x)) dz \\ &= \int F_1(s(y), s(z)) F_2(s(z), s(x)) dz \\ &= \int F_1^*(z, y) F_2^*(x, z) dz \\ &= F_2^* \circ F_1^*(x, y). \end{aligned}$$

Si F est un noyau causal invariant alors $F^* = F$. En effet, pour g dans S ,

$$\begin{aligned} F^*(gx_0, x_0) &= F(x_0, (g^*)^{-1}x_0) \\ &= F(x_0, h_2^{-1}g^{-1}h_1^{-1}x_0) = F(gx_0, x_0), \end{aligned}$$

où h_1 et h_2 sont deux éléments de H tels que $g^* = h_1gh_2$.

2. Espaces symétriques ordonnés.

Soit V une variété différentiable de dimension n . Une *structure causale* sur V est la donnée d'un champ de cônes convexes fermés, c'est à dire la donnée en chaque point x de V d'un cône convexe fermé C_x dans l'espace tangent $T_x(V)$. On suppose que le cône "dépend différentiablement" de x : localement il existe une application différentiable

$$\Phi : V_0 \times \mathbf{R}^n \longrightarrow T(V),$$

telle que $\Phi(x, z) \in T_x(V)$, et un cône convexe fermé C dans \mathbf{R}^n tel que

$$C_x = \Phi(x, C),$$

ceci pour une famille d'ouverts V_0 recouvrant V . Une courbe de classe C^1 par morceaux

$$\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow V$$

est dite *causale* si pour tout t le vecteur vitesse $\dot{\gamma}(t)$ appartient au cône $C_{\gamma(t)}$. (On dit aussi que la courbe γ est admissible.) Plus généralement si V et W sont deux variétés causales, une application différentiable

$$f : V \longrightarrow W$$

est dite *causale* si, pour tout x de V ,

$$df_x(C_x) \subset C_{f(x)}.$$

On dit que V est une *variété causale globale* s'il n'existe pas de courbe causale non triviale fermée. On peut alors associer à cette structure causale un ordre partiel sur V : $x \leq y$ signifie qu'il existe une courbe causale d'origine x et d'extrémité y . (Au sujet des structures causales on peut consulter [1], [18] et [10].)

Supposons que la variété V soit un espace homogène : $V = G/H$, où G est un groupe de Lie et H est un sous-groupe fermé de G . On note $\tau(g)$ la transformation

$$\tau(g) : aH \longmapsto gaH.$$

Une structure causale sur G/H est dite *invariante* par G si, lorsque $y = \tau(g)x$,

$$C_y = d\tau(g)_x(C_x).$$

(Cela équivaut à dire que les transformations $\tau(g)$ sont causales.)

Soit (G, H) une paire symétrique, c'est à dire que G est un groupe de Lie connexe, et H un sous-groupe fermé de G pour lequel il existe un automorphisme involutif σ de G tel que

$$(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma,$$

où $G_\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$, et où $(G_\sigma)_0$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G_σ . Soient \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie de G et H , nous avons

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\},$$

et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q},$$

avec

$$\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = -X\}.$$

(La lettre σ désigne aussi bien l'involution de G que sa différentielle.) L'espace tangent au point $x_0 = eH$ de l'espace symétrique G/H peut être identifié à \mathfrak{q} , et

une structure causale invariante sur G/H est déterminée par la donnée d'un cône convexe fermé C dans \mathfrak{q} qui est invariant par $Ad(H)$. Si C est un cône convexe fermé contenu dans \mathfrak{q} invariant par $Ad(H)$, alors $C \cap -C$ et $C - C$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathfrak{q} invariant par $Ad(H)$. Par suite si $Ad(H)$ opère irréductiblement dans \mathfrak{q} , et si $C \neq 0$, $C \neq \mathfrak{q}$, alors $C \cap -C = 0$ (on dit que C est propre), et $C - C = \mathfrak{q}$, c'est à dire que C est d'intérieur non vide.

Supposons que G est un groupe de Lie semi-simple de centre fini. Il existe alors une involution de Cartan θ de G qui commute avec σ . Soit K le sous-groupe compact maximal qui lui correspond,

$$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\},$$

et posons

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}.$$

THÉORÈME 2. *Pour qu'il existe dans \mathfrak{q} un cône convexe fermé C propre, c'est à dire tel que $C \cap -C = 0$, et invariant par $Ad(H)$, il faut et suffit qu'il existe dans \mathfrak{q} un vecteur non nul invariant par $Ad(K \cap H)$.*

La démonstration est semblable à celle d'un théorème de Kostant (Voir [18] p. 29, [19] theorem 1, [14] theorem 2.2, ou [5] theorem III.4.5).

(a) Soit C un cône convexe fermé dans \mathfrak{q} , propre et invariant par $Ad(H)$. Puisque C est propre il existe une forme linéaire l sur \mathfrak{q} et un vecteur X_0 de C tels que

$$\forall X \in C, l(X) \geq 0, \text{ et } l(X_0) > 0.$$

Posons

$$Y_0 = \int_{K \cap H} Ad(k)X_0 dk,$$

où dk désigne la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact $K \cap H$. Le vecteur Y_0 est invariant par $Ad(K \cap H)$ et, puisque $l(X_0) > 0$ et que $l(X) \geq 0$ pour tout point X de l'orbite $Ad(K \cap H)X_0$, alors $l(Y_0) > 0$, donc Y_0 n'est pas nul.

(b) Tout élément h de H admet la décomposition de Cartan suivante

$$h = \exp(Y)k,$$

avec $Y \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ et $k \in K \cap H$, de plus $\theta(h) = \exp(-Y)k \in H$. En effet, d'après décomposition de Cartan de G nous pouvons écrire $h = \exp(Y)k$, avec Y dans \mathfrak{p} et k dans K , et aussi $h = \sigma(h) = \exp \sigma(Y) \sigma(k)$, et puisque les involutions σ et θ commutent, $\sigma(Y)$ appartient à \mathfrak{p} et $\sigma(k)$ à K . A cause de l'unicité de la décomposition de Cartan $\sigma(Y) = Y$ et $\sigma(k) = k$, donc h appartient à $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$, et k à $K \cap G_\sigma$, mais aussi $k = \exp(-Y)h \in H$, donc $k \in K \cap H$.

(c) Soit X_0 un vecteur non nul de \mathfrak{q} invariant par $Ad(K \cap H)$. Considérons sur \mathfrak{g} le produit scalaire défini par

$$(U \mid V) = -B(U, \theta(V)),$$

où B désigne la forme de Killing de \mathfrak{g} . Pour Y dans \mathfrak{p} , $Ad(\exp Y)$ est un

endomorphisme symétrique défini positif pour ce produit scalaire, par suite, si $h \in H$, $h = \exp(Y)k$ avec $Y \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ et $k \in K \cap H$, et

$$(Ad(h)X_0 | X_0) = (Ad(\exp Y)X_0 | X_0) > 0.$$

Si X_1 et X_2 sont deux points de l'orbite $\{Ad(h)X_0 | h \in Ad(H)\}$, $X_1 = Ad(h_1)X_0$, et $X_2 = Ad(h_2)X_0$, alors $(X_1 | X_2) > 0$, en effet,

$$(X_1 | X_2) = (Ad(h)X_0 | X_0) > 0,$$

avec $h = \theta(h_1)^{-1}h_2 \in H$. Soit C le plus petit cône convexe fermé contenant cette orbite. Ce cône est invariant par $Ad(H)$, et si X_1 et X_2 sont deux points de C , $(X_1 | X_2) \geq 0$. Par suite le cône C est propre, car, si $X \in C \cap -C$, $(X | -X) \geq 0$, ou $(X | X) \leq 0$, donc $X = 0$. \square

Si G/H est un espace riemannien symétrique irréductible, l'action de $Ad(H)$ dans \mathfrak{q} est irréductible, et il n'existe dans \mathfrak{q} un cône convexe fermé propre invariant par $Ad(H)$ que si $X = \mathbf{R}$. La frontière de Shilov d'un domaine symétrique borné de type tube est un espace riemannien symétrique non irréductible qui possède une structure causale invariante. Elle est étudiée par Kaneyuki dans [7].

Dans [11] 'Olafsson fait une étude systématique des espaces symétriques munis d'une structure causale invariante.

Soit H un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini. On peut considérer H comme un espace symétrique associé à la paire $(H \times H, \Delta)$ où $\Delta = \{(g, g) | g \in H\}$. On a alors

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h} + \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{q} \cong \mathfrak{h}.$$

Soit θ_0 une involution de Cartan de H , soit K_0 le sous groupe compact maximal de H des points fixes de θ_0 , et \mathfrak{k}_0 son algèbre de Lie. Le résultat suivant est dû à Vinberg ([19] theorem 4, voir aussi [5] theorem III.4.7).

COROLLAIRE. *Il existe dans \mathfrak{h} un cône convexe fermé propre invariant par $Ad(H)$ si et seulement si le centre de \mathfrak{k}_0 n'est pas réduit à $\{0\}$.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2, pour qu'il existe dans \mathfrak{h} un cône convexe fermé propre invariant, il faut et suffit qu'il existe dans \mathfrak{h} un vecteur X_0 non nul invariant par K_0 , c'est à dire

$$\forall k \in K_0, \quad Ad(k)X_0 = X_0.$$

Considérons la décomposition de Cartan de \mathfrak{h} ,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$$

associée à l'involution θ_0 , et décomposons X_0 ,

L'ensemble $X_0 = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{k}_0$, $X_2 \in \mathfrak{p}_0$.
 $\mathfrak{X} = \{X \in \mathfrak{h} \mid B(X, X_2) = 0\}$,

où B désigne la forme de Killing de \mathfrak{h} est un idéal de \mathfrak{h} qui contient \mathfrak{k}_0 , donc $\mathfrak{X} = \mathfrak{h}$ et $X_2 = 0$. Par suite X_0 appartient au centre de \mathfrak{k}_0 . \square

Les cônes convexes fermés invariants dans une algèbre de Lie hermitienne ont été décrits par Vinberg ([19], voir aussi [12]), et par Paneitz ([14] et [15]).

Supposons qu'il existe dans \mathfrak{q} un cône convexe fermé propre d'intérieur non vide. L'espace symétrique G/H est alors muni d'une structure causale. Une première question se pose :

La structure causale est-elle globale?

Si c'est le cas cette structure causale définit sur l'espace G/H un ordre partiel invariant, et une deuxième question se pose : les intervalles sont-ils compacts?

3. Espaces symétriques ordonnés de Ol'shanskii.

Soit \mathfrak{h} une algèbre de Lie réelle simple hermitienne, et soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie complexifiée,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}.$$

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est une paire symétrique : l'involution σ est la conjugaison relativement à \mathfrak{h} , $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$. Soit G un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . On suppose que la conjugaison σ se remonte à G , et que H est un sous-groupe fermé de G tel que $(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$. Soit C_0 un cône convexe fermé propre et d'intérieur non vide dans \mathfrak{h} , invariant par $Ad(H)$, alors $C = iC_0 \subset \mathfrak{q}$ est un cône convexe fermé dans \mathfrak{q} invariant par $Ad(H)$.

THÉORÈME 3 ([12]).

(i) Supposons G et H connexes, alors $S = \exp(C)H$ est un semi-groupe fermé contenu dans G tel que $S \cap S^{-1} = H$.

(ii) L'application Exp de \mathfrak{q} dans G/H , définie par

$$\text{Exp}(X) = \exp(X)H,$$

est un difféomorphisme de C sur $\text{Exp}(C)$.

Pour un élément g de G posons

$$g^* = \sigma(g)^{-1}.$$

L'application $g \rightarrow g^*$ est un involution du semi-groupe S vérifiant les hypothèses (B). En effet, d'après le théorème précédent, tout élément g de S s'écrit $g = \exp(X)h$, $X \in C$, $h \in H$ et $(\exp(X))^* = \exp(X)$.

Exemples.

1) Soient $H = Sp(n, \mathbf{R})$, $G = Sp(n, \mathbf{C})$. L'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H est alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} = sp(n, \mathbf{R}) &= \left\{ X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A' \end{pmatrix} \mid B=B', C=C' \right\} \\ &= \{ X \in M(2n, \mathbf{R}) \mid X'J + JX = 0 \}, \end{aligned}$$

où A' désigne la matrice transposée de A et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition $X'J + JX = 0$ signifie que JX est une matrice symétrique. L'adhérence C_0 du cône

$$\{ X \in \mathfrak{h} \mid JX \gg 0 \}$$

est un cône convexe fermé qui est invariant par $Ad(H)$. Soit $C = iC_0$. D'après le théorème 3, $S = \exp(C)H$ est un semi-groupe fermé contenu dans G . Nous allons en donner une autre description. Considérons sur \mathbf{C}^{2n} la forme hermitienne

$$[\xi, \eta] = -i\beta(\xi, \bar{\eta}),$$

où β désigne la forme symplectique de matrice J . Cette forme hermitienne, de signature (n, n) , est invariante par $H = Sp(n, \mathbf{R})$. Ainsi $Sp(n, \mathbf{R})$ peut être considéré comme un sous-groupe du groupe unitaire de la forme hermitienne $[\cdot, \cdot]$ (qui est isomorphe à $U(n, n)$), et l'espace symétrique $Sp(n, \mathbf{C})/Sp(n, \mathbf{R})$ peut être réalisé comme un espace de formes hermitiennes sur \mathbf{C}^{2n} de signature (n, n) : au point gH on associe la forme hermitienne $[g^{-1}\xi, g^{-1}\eta]$. Le semi-groupe S peut alors être décrit comme

$$S = \{ g \in Sp(n, \mathbf{C}) \mid [g^{-1}\xi, g^{-1}\xi] \leq [\xi, \xi] \}.$$

REMARQUE. Le semi-groupe de l'oscillateur étudié par R. Howe dans [6] est un revêtement à deux feuillets du semi-groupe S .

2) Soient $H = SU(p, q)$, et $G = SL(n, \mathbf{C})$ ($n = p + q$, p et $q > 0$). Sur \mathbf{C}^n considérons la forme hermitienne

$$[\xi, \eta] = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_p \bar{\eta}_p - \xi_{p+1} \bar{\eta}_{p+1} - \dots - \xi_n \bar{\eta}_n.$$

Pour une matrice X de $M(n, \mathbf{C})$ on définit X^* par

$$[X\xi, \eta] = [\xi, X^*\eta],$$

c'est à dire

$$X^* = I_{p,q} X^* I_{p,q}, \quad \text{avec } I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Nous avons

$$su(p, q) = \{ X \in M(n, \mathbf{C}) \mid X^* = -X, \operatorname{tr}(X) = 0 \},$$

$$SU(p, q) = \{ g \in SL(n, \mathbf{C}) \mid g^* = g^{-1} \}.$$

Remarquons que si A appartient à \mathfrak{q} , alors $[A\xi, \xi]$ est réel. Soit C le cône convexe fermé de \mathfrak{q} défini par

$$C = \{X \in \mathfrak{q} \mid \forall \xi \in \mathbf{C}^n, [X\xi, \xi] \leq 0\}.$$

Alors C est invariant par $Ad(H)$. Le semi-groupe $S = \exp(C)H$ peut être décrit comme suit

$$S = \{g \in G \mid \forall \xi \in \mathbf{C}^n, [g\xi, g\xi] \leq [\xi, \xi]\}.$$

Revenons à la situation générale du théorème 3. Le semi-groupe S définit un ordre partiel sur l'espace symétrique G/H .

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses du théorèmes 3, les intervalles de l'espace ordonné G/H sont compacts.*

LEMMA 1. *La fonction φ ,*

$$\varphi(u) = \frac{u}{\operatorname{sh} u},$$

est de type positif sur \mathbf{R} . Plus précisément,

$$\frac{u}{\operatorname{sh} u} = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} t} dt.$$

Partons de la formule classique

$$\pi \operatorname{th} \pi \nu = \int_0^{\infty} \frac{\sin \nu x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} dx.$$

En dérivant par rapport à ν nous obtenons,

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 \pi \nu} = \int_0^{\infty} \frac{x \cos \nu x}{\operatorname{sh} \frac{x}{2}} dx = 4 \int_0^{\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u} \cos(2\nu u) du,$$

ou

$$\frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{2} t \right)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u}{\operatorname{sh} u} e^{itu} du,$$

et par inversion de la transformation de Fourier,

$$\frac{u}{\operatorname{sh} u} = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{\pi}{2} t \right)} dt.$$

LEMME 2. *Soit C un cône convexe fermé de $\mathfrak{q} = i\mathfrak{h}$ invariant par $Ad(H)$, alors, pour tout X de C ,*

$$\frac{ad(X)}{\operatorname{sh} ad(X)} C \subset C.$$

Soit X un élément de C , alors, pour tout t réel,

$$\exp it ad(X) = Ad(\exp it X) \in Ad(H),$$

donc

$$Ad(\exp itX)C \subset C.$$

De plus les valeurs propres de $ad(X)$ sont réelles. En effet tout élément intérieur à iC est conjugué par $Ad(H)$ à un élément d'une sous-algèbre de Cartan compacte de \mathfrak{h} ([19]). Par suite si φ est une fonction de type positif sur \mathbf{R} ,

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} d\mu(t),$$

où μ est une mesure positive sur \mathbf{R} , alors

$$\varphi(ad(X))C \subset C,$$

car, pour tout Y de C ,

$$\varphi(ad(X))Y = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itad(X))Y d\mu(t).$$

Ceci s'applique en particulier à la fonction $\varphi(u) = \frac{u}{\text{sh}(u)}$ qui est de type positif d'après le lemme 1.

Démontrons maintenant le théorème 4. D'après le théorème 3, l'application $X \rightarrow \text{Exp}(X)$ de C sur $\text{Exp}(C)$ est un difféomorphisme. Pour montrer que l'intervalle $D(x_0, x_1)$ est compact, il suffit de montrer que l'ensemble

$$E = \{X \in C \mid \text{Exp}(X) \in D(x_0, x_1)\}$$

est compact. On va montrer que l'application Log , inverse de l'application Exp , est une application causale de $\text{Exp}C$ dans \mathfrak{q} , muni de la structure causale invariante par translation définie par le cône C . Il en résultera que, si $x_1 = \text{Exp}(X_1)$, l'ensemble E est contenu dans $C \cap (X_1 - C)$ qui est compact. Soit $\gamma(t)$ une courbe causale contenue dans $\text{Exp}(C)$, $\gamma(t) = \text{Exp} \Gamma(t)$. Montrons que la courbe $\Gamma(t)$ tracée dans C est aussi causale. Si $\gamma(t) = x = \text{Exp}(X)$, $\dot{\gamma}(t) \in C_x$, et

$$C_x = d\tau(\exp X)_{x_0} C.$$

La différentielle de l'application exponentielle Exp est donnée par

$$d \text{Exp}_x = d\tau(\exp X)_{x_0} \frac{\text{sh} ad(X)}{ad(X)},$$

donc

$$\dot{\gamma}(t) = d\tau(\exp X)_{x_0} \frac{\text{sh} ad(X)}{ad(X)} \dot{\Gamma}(t),$$

par suite

$$\dot{\Gamma}(t) \in \frac{ad(X)}{\text{sh} ad(X)} C,$$

et d'après le lemme, 2, $\dot{\Gamma}(t)$ appartient à C , ce qui montre que la courbe $\Gamma(t)$ est causale. \square

En conclusion les hypothèses (A) et (B) de la section 1 sont vérifiées pour les espaces symétriques G/H décrits ci-dessus. Nous avons déjà étudié l'algèbre de Volterra $V(G/H)$ lorsque $G/H=SL(n, \mathbf{C})/SU(p, q)$ [3]. Une étude semblable dans le cas général reste à faire.

REMARQUE. Le revêtement universel du groupe $SL(2, \mathbf{R})$ possède une structure causale biinvariante qui est globale, mais les intervalles ne sont pas tous compacts (voir [16]).

4. Espace symétrique associé à une forme réelle régulière de la complexifiée d'une algèbre de Lie hermitienne.

Reprenons la situation de la section précédente: \mathfrak{h} est une algèbre de Lie simple hermitienne, \mathfrak{g} est sa complexifiée, et C désigne un cône convexe fermé dans $i\mathfrak{h}$ invariant par $Ad(H)$. Notons par la même lettre θ l'involution de Cartan antilinéaire de \mathfrak{g} qui prolonge l'involution de Cartan θ de \mathfrak{h} . Considérons une autre forme réelle \mathfrak{l} de \mathfrak{g} , et notons τ la conjugaison de \mathfrak{g} par rapport à \mathfrak{l} . La forme réelle \mathfrak{l} est dite *régulière* si τ commute à σ et θ , et si $i\mathfrak{z} \subset \mathfrak{l}$, \mathfrak{z} désignant le centre de $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{h} \mid \theta(X) = X\}$. On suppose que la conjugaison τ se remonte en une involution de G , et on note $L = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$. Notons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$. Alors $(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_0)$ est une paire symétrique et $C_0 = C \cap \mathfrak{l}$ est un cône convexe fermé de $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{l} \cap i\mathfrak{h}$ invariant par $Ad(H_0)$, où $H_0 = \{g \in H \mid \tau(g) = g\}$. On peut considérer l'espace symétrique L/H_0 comme un sous-espace de l'espace symétrique G/H . Le cône C_0 définit sur L/H_0 une structure causale invariante. Cette structure causale est globale et définit donc un ordre partiel, auquel est associé le semi-groupe $S_0 = \exp(C_0)H_0$ (voir [13] et [11]). Les hypothèses (A) et (B) sont vérifiées et l'algèbre de Volterra $V(L/H_0)^{\mathfrak{h}}$ est commutative.

Exemples.

1) Soient $\mathfrak{g} = sl(n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{h} = su(p, q)$, $(p+q=n)$. Nous avons $\sigma(X) = -I_{p,q} X^* I_{p,q}$, avec

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

et $\theta(X) = -X^*$. La sous-algèbre $\mathfrak{l} = sl(n, \mathbf{R})$ est une forme régulière de \mathfrak{g} associée à la conjugaison τ , $\tau(X) = \bar{X}$, et $\mathfrak{h}_0 = so(p, q)$.

2) Soient $\mathfrak{g} = sl(2n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{h} = su(2p, 2q)$, $(p+q=n)$. Choisissons l'involution σ définie par $\sigma(X) = -K_{p,q} X^* K_{p,q}$, avec

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_q \end{pmatrix},$$

et $\theta(X) = -X^*$. Soit τ l'involution de \mathfrak{g} définie par $\tau(X) = -J\bar{X}J$, avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

La sous-algèbre \mathfrak{l} qui lui est associée est $su^*(2n) = sl(n, \mathbf{H})$. C'est une forme réelle régulière de \mathfrak{g} , et $\mathfrak{h}_0 = sp(p, q)$.

3) Soient $\mathfrak{g} = so(n+2, \mathbf{C})$, et $\mathfrak{h} = so(2, n)$ associée à l'involution $\sigma(X) = -I_{2,n}X^*I_{2,n} = I_{2,n}\bar{X}I_{2,n}$. De plus $\theta(X) = -X^*$. Soit τ l'involution de \mathfrak{g} définie par $\tau(X) = -I_{1,n+1}X^*I_{1,n+1}$. La sous-algèbre qui lui est associée est $\mathfrak{l} = so(1, n+1)$, c'est une forme réelle de \mathfrak{g} et $\mathfrak{h}_0 = so(1, n)$.

Nous allons décrire une famille d'espaces symétriques ordonnés qui possèdent une structure paracomplexe, et qui sont des espaces symétriques parahermitiens [8]. Soit \mathfrak{h} une algèbre de Lie hermitienne simple telle que le domaine symétrique qui lui est associé soit de type tube. Il existe un homomorphisme d'algèbre de Lie

$$\rho: sl(2, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathfrak{h},$$

telle que

$$Z = \rho\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

engendre le centre \mathfrak{z} de \mathfrak{k} , et que

$$X = \rho\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

vérifie $\theta(X) = -X$ ([9] p. 267, [17] ch. III § 1). On définit l'élément c de G par

$$c = \exp\left(i\frac{\pi}{4}X\right)$$

(cet élément permet de définir la transformation de Cayley [9]). L'algèbre de Lie $\mathfrak{l} = Ad(c)\mathfrak{h}$ est une forme réelle de \mathfrak{g} et la conjugaison τ par rapport à \mathfrak{l} est donnée par

$$\tau = Ad(c)^2 \circ \sigma.$$

(On remarquera que $Ad(c)^4$ est l'identité.) On vérifie sans difficulté que τ commute avec θ et σ , que iZ appartient à \mathfrak{l} , en effet,

$$iZ = Ad(c)\rho\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi \mathfrak{l} est une forme réelle régulière de \mathfrak{g} .

Les valeurs propres de $ad((1/2)X)$ sont égales à 0, 1 et -1. Décomposons l'algèbre de Lie \mathfrak{l} en sous-espaces propres de $ad((1/2)X)$,

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{l}_1.$$

La sous-algèbre \mathfrak{l}_0 est égale à $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$. En effet si un élément Y de \mathfrak{l} vérifie $ad(X)Y=0$, alors

$$Ad(c)Y = \exp\left(i\frac{\pi}{4}ad(X)\right)Y = Y.$$

Réciproquement soit Y un élément de $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{h}$, alors $\sigma(Y)=Y$ et $\tau(Y)=Y$, donc $Ad(c)^2Y=Y$. Les sous-espaces \mathfrak{l}_0 et $\mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_1$ sont sous-espaces propres de $Ad(c)^2$ pour les valeurs propres 1 et -1 , donc $Y \in \mathfrak{l}_0$. Ainsi $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{h}_0$. Considérons la paire symétrique $(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}_0, \sigma)$, alors

$$\mathfrak{q}_0 = \{X \in \mathfrak{l} \mid \sigma(X) = -X\} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} + \mathfrak{l}_1.$$

La restriction I_0 de $ad(X)$ à \mathfrak{q}_0 admet les sous-espaces propres \mathfrak{l}_1 et \mathfrak{l}_{-1} pour les valeurs propres 1 et -1 , et définit sur l'espace symétrique L/H_0 une structure paracomplexe invariante par L , l'espace L/H_0 est ainsi muni d'une structure d'espace symétrique parahermitien [8].

Considérons les éléments E_+ et E_- définis par

$$E_+ = Ad(c)\rho\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_- = Ad(c)\rho\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right),$$

alors $E_+ \in \mathfrak{l}_1$, $E_- \in \mathfrak{l}_{-1}$, et (X, E_+, E_-) est un $sl(2)$ -triplet, de plus $E_+ + E_- = iZ$. L'orbite $\Omega_+ = Ad(H_0)E_+ \subset \mathfrak{l}_1$ est un cône symétrique, c'est à dire homogène et autodual, de même $\Omega_- = Ad(H_0)E_- = \sigma(\Omega_+)$ est un cône symétrique. Notons C_+ et C_- les adhérences de Ω_+ et Ω_- . Le plus petit cône convexe fermé C_0 de \mathfrak{q}_0 invariant par $Ad(H_0)$ et contenant iZ est la somme $C_0 = C_+ + C_-$.

Voici la liste des paires symétriques obtenues par la construction que nous venons de décrire.

\mathfrak{l}	\mathfrak{h}
$sp(n, \mathbf{R})$	$sl(n, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}$
$su(n, n)$	$sl(n, \mathbf{C}) \oplus \mathbf{R}$
$so^*(4n)$	$sl(n, \mathbf{H}) \oplus \mathbf{R}$
$so(2, n)$	$so(1, n) \oplus \mathbf{R}$
$e_{7, (-25)}$	$e_{6, (-26)} \oplus \mathbf{R}$

5. Hyperbolicité globale.

Soit V une variété causale. On considère sur V une structure riemannienne complète, et on note $d(x, y)$ la distance riemannienne correspondante. Soit \mathcal{C}_0

l'ensemble des courbes causales,

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow V, \quad t \longmapsto \gamma(t),$$

telles que le paramètre t soit proportionnel à l'abscisse curviligne: $\|\dot{\gamma}(t)\| = l(\gamma)$, la longueur de la courbe γ . La distance de deux courbes γ_1 et γ_2 de \mathcal{C}_0 est définie par

$$\delta(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [0, 1]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

Soit \mathcal{C} le complété de \mathcal{C}_0 pour la distance δ . On montre qu'un élément de \mathcal{C} est une courbe rectifiable, admettant pour presque tout t un vecteur tangent $\dot{\gamma}(t)$ appartenant au cône $\mathcal{C}_{\gamma(t)}$. La variété causale V est dite *globalement hyperbolique* si, quels que soient les points a et b de V , l'ensemble $\mathcal{C}(a, b)$ des courbes de \mathcal{C} d'origine $\gamma(0)=a$ et d'extrémité $\gamma(1)=b$ est compact. Dans [2] on montre à l'aide du théorème d'Ascoli que $\mathcal{C}(a, b)$ est compact si et seulement si

$$\sup\{l(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(a, b)\} < \infty.$$

THÉOREME 5. *Sous les hypothèses du théorème 3, l'espace symétrique G/H est une variété causale globalement hyperbolique.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 4. En effet l'application Log de $\text{Exp } \mathfrak{C}$ dans \mathfrak{q} est causale, et l'hyperbolicité globale de G/H se déduit de l'hyperbolicité globale de \mathfrak{q} qui elle-même résulte du lemme suivant :

LEMME. *Considérons sur un espace vectoriel V de dimension finie la structure causale invariante par translation définie par un cône convexe fermé propre C . Alors V est une variété causale globalement hyperbolique.*

On peut supposer que la structure riemannienne considérée sur V provient d'une structure euclidienne. Fixons un vecteur v dans l'intérieur du cône dual C^* de C , il existe alors une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout u de C ,

$$\|u\| \leq \alpha(u|v).$$

Si γ est une courbe causale d'origine a et d'extrémité b ,

$$\|\dot{\gamma}(t)\| \leq \alpha(\dot{\gamma}(t)|v),$$

et

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \alpha(b-a|v),$$

et ceci implique que $\mathcal{C}(a, b)$ est compact.

Référence

- [1] J.K. Beem and P.E. Ehrlich, *Global Lorentzian geometry*, Marcel Dekker, 1981.
- [2] Y. Choquet-Bruhat, *Hyperbolic partial differential equations on a manifold*, Battelle Rencontres, Benjamin, (1967), 84-106.
- [3] J. Faraut, *Algèbres de Volterra et transformation de Laplace sphérique sur certains espaces symétriques ordonnés*, *Symposia Mathematica*, **29** (1987), 183-196.
- [4] J. Faraut and G.A. Viano, *Volterra algebra and the Bethe-Salpeter equation*, *J. Math. Phys.*, **27** (1986), 840-848.
- [5] J. Hilgert, K.H. Hofmann and J.D. Lawson, *Lie groups, convex cones, and semigroups*, Oxford University Press, 1989.
- [6] R. Howe, *The oscillator semigroup*, preprint, 1987.
- [7] S. Kaneyuki, *On the causal structures of the Shilov boundaries*, preprint, 1989.
- [8] S. Kaneyuki and M. Kozai, *Paracomplex structures and affine symmetric spaces*, *Tokyo J. Math.*, **8** (1985), 81-98.
- [9] A. Koranyi and J.A. Wolf, *Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 265-288.
- [10] J.D. Lawson, *Ordered manifolds, invariant cone fields, and semigroups*, preprint, 1988.
- [11] G. Olafsson, *Harmonic analysis on causal symmetric spaces*, preprint, 1989.
- [12] G.I. Ol'shanskii, *Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups and the holomorphic discrete series*, *Funct. Anal. Appl.*, **15** (1981), 275-285.
- [13] G.I. Ol'shanskii, *Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups, and invariant causal (order) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces*, *Sov. Math. Dokl.*, **26** (1982), 97-101.
- [14] S. Paneitz, *Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups*, *J. Funct. Anal.*, **43** (1981), 313-359.
- [15] S. Paneitz, *Determination of invariant convex cones in simple Lie algebras*, *Arkiv för Mat.*, **21** (1984), 217-228.
- [16] S. Paneitz, *Parametrization of causal actions of universal covering groups and global hyperbolicity*, *J. Funct. Anal.*, **62** (1985), 337-353.
- [17] I. Satake, *Algebraic structures of symmetric domains*, Iwanami Shoten, Tokyo and Princeton University Press, Princeton, 1980.
- [18] I.E. Segal, *Mathematical cosmology and extragalactic astronomy*, Academic Press, New York, 1976.
- [19] E.B. Vinberg, *Invariant convex cones and orderings in Lie groups*, *Funct. Anal. Appl.*, **14** (1980), 1-10.

Jacques FARAUT

Département de Mathématiques

Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

4 place Jussieu

75230 Paris cedex 05