J. Math. Soc. Japan
Vol. 42, No. 3, 1990

# Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques; Cas de dimension 1

Par Kinji WATANABE

(Reçu le 23 janv., 1989)
(Revisé le 13 avril, 1989)

## 1. Introduction.

Nous nous proposons ici de discuter l'unicité rétrograde des solutions des équations :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k}(t, x)D_x^k u=0 \qquad \text{dans } ]-T, 0[\times I, \tag{1.1}$$

vérifiant $2m$ conditions au bord :

$$\begin{aligned} B_j(t)u &= \sum_{k=0}^{\nu_j}\{\alpha_{j,\nu_j-k}(t)D_x^k u(t, 0)+\beta_{j,\nu_j-k}(t)D_x^k u(t, 1)\} \\ &= 0 \qquad \text{dans } ]-T, 0[ \text{ pour } j=0, 1, \cdots, 2m-1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ici $I=]0, 1[$, $T>0$ et $D_x=-i\partial/\partial x$ et nous supposons que

(i) $a_0(t, x)=1$ dans $]-T, 0[\times I$,
(ii) pour $j=0, 1, \cdots, 2m-1$, $0\leqq \nu_j<2m$ et

$$|\alpha_{j,0}(t)|+|\beta_{j,0}(t)|>0 \qquad \text{dans } ]-T, 0].$$

Pour préciser les résultats, prenons quelques notations. Désignons par $H^p(I)$ l'espace de Sobolev sur $I$ d'ordre $p$ et par $H^{p,q}(]-T, 0[\times I)$ l'espace des fonctions $u$ telles que $(\partial/\partial t)^j D_x^k u$, $0\leqq j\leqq p$, $0\leqq k\leqq q$, appartiennent à $L^2(]-T, 0[\times I)$. Soit $H$ un sous-ensemble de $H^{0,2m}(]-T, 0[\times I)$. On dit qu'il y a l'unicité rétrograde dans le problème (1.1)-(1.2) pour les solutions dans $H$ s'il existe $T_0>0$ tel que chaque solution $u$ dans $H$ de (1.1)-(1.2) est nulle dans $]-T_0, 0[\times I$ dès que $u(0, x)=0$ dans $I$.

Posons pour les nombres complexes $\mu$ et pour $0\leqq j$, $k<2m$, $\omega_k=\exp(ik\pi/m)$,

$$N_{j,0}(t, \mu)=\alpha_{j,0}(t)+\beta_{j,0}(t)e^{i\mu}, \qquad N_{j,m}(t, \mu)=(-1)^{\nu_j}\{\alpha_{j,0}(t)+\beta_{j,0}(t)e^{-i\mu}\},$$

$$N_{j,k}(t)=\begin{cases}\alpha_{j,0}(t)(\omega_k)^{\nu_j}, & \text{si } 0<k<m,\\ \beta_{j,0}(t)(\omega_k)^{\nu_j}, & \text{si } m<k<2m.\end{cases}$$

Cette recherche a été partiellement supporté par "Grant-in-Aid for Scientific Research (No. 01540133), Ministry of Education, Science and Culture".

La fonction $N(t, \mu)$ définie par

$$N(t, \mu) = \det(N_{j,k}(t, \mu))_{0\leqq j,k<2m} = \alpha(t)e^{i\mu}+\beta(t)e^{-i\mu}+\gamma(t) \tag{1.3}$$

joue un rôle important dans le comportement asymptotique des valeurs propres de la réalisation $A(t)$ de $D_x^{2m}$ dans $L^2(I)$, dont le domaine de définition est donné par

$$D(A(t)) = \{u\in H^{2m}(I)\,;\, B_j(t)u=0 \text{ pour } 0\leqq j<2m\}.$$

Faisons les hypothèses suivantes.

(iii) Dans $]-T, 0]\times I$, $a_1$ est $C^{2m-1}$ et $a_k$, $2\leqq k\leqq 2m$, sont mesurables et bornés.

(iv) Dans $]-T, 0]$, tous les coefficients des parties principaux $B_j^\circ$ de $B_j$:

$$B_j^\circ(t)u = \alpha_{j,0}(t)D_x^{\nu_j}u(0)+\beta_{j,0}(t)D_x^{\nu_j}u(1),$$

sont $C^3$ et les autres de $B_j$ sont $C^1$.

Nous énonçons alors le résultat principal.

THÉORÈME 1. *Supposons que les hypothèses ci-dessus* (i)-(iv) *soient vérifiées. De plus si* $m>1$ *et si*

(v) $\alpha(0)\beta(0)\neq 0$,

*il y a l'unicité rétrograde dans le problème* (1.1)-(1.2) *pour les solutions dans* $H^{0,2m}(]-T, 0[\times I)$.

Dans le livre [**1**], Dunford et Schwartz présentent des exemples de H. P. Kramer de $B_j$, vérifiant la condition (v) qui est dit l'hypothèse de régularité. Dans le paragraphe 3, nous allons traiter le problème au cas de $m=1$. Quand il s'agit de l'unicité rétrograde des solutions des équations paraboliques:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A(t, x\,;\, D_x)u = 0 \qquad \text{dans } ]-T, 0[\times\Omega,$$

associées aux opérateurs $A(t, x\,;\, D_x)$ elliptiques d'ordre $2m>2$ sur un domaine $\Omega$ dans $\boldsymbol{R}^d$, $d>1$, on doit faire des hypothèses fortes sur $A$ même sous la condition de Dirichlet (voir Lions et Malgrange [**2**]).

## 2. Preuve du Théorème 1.

Pour établir les estimations du type Carleman, qui impliquent l'unicité exigée, nous utilisons des majorations des normes des résolvants de $A(t)$. Premièrement nous expliquons, d'après le chapitre XIX de [**1**], le comportement asymptotique des valeurs propres de $A(t)$ sous les hypothèses dans le Théorème 1.

Désignons par $\mu(\lambda)$ la racine de l'équation:

$$\mu^{2m} = \lambda, \qquad \mu\in\Sigma = \{\mu\,;\, -\pi/2m<\arg\mu\leqq\pi/2m\},$$

et posons $\nu=\nu_0+\cdots+\nu_{2m-1}$, $\sigma_k(\mu, x)=\exp(i\omega_k\mu x)$ si $0\leqq k\leqq m$, $=\exp(i\omega_k\mu(x-1))$ si $m<k<2m$, et

$$M_{j,k}(t, \mu)=B_j(t)\sigma_k(\mu, \cdot), \qquad M(t, \mu)=\det(M_{j,k}(t, \mu))_{0\leq j,k<2m}.$$

Il existe alors $C>0$, indépendant de $t$, tel que pour $\mu\in\Sigma$ avec $|\mu|>C$,

$$|\mu^{-\nu}M(t, \mu)-N(t, \mu)|\leqq C|\mu|^{-1}e^{|\mathrm{Im}\,\mu|}, \tag{2.1}$$

d'où nous avons en vertu de (v) le comportement asymptotique suivant. Soient $\pi\delta_k/m$, $k=1, 2$, deux racines de l'équation en $z$:

$$N(0, z)=0, \qquad 0\leqq\mathrm{Re}\,z<2\pi.$$

Il existe alors $C_1>0$ tel que les valeurs propres de $A(t)$ dans $|\lambda|>C_1$ sont énumérées par deux séries $\{\lambda_{k,n}(t)\,;\, n>n_1\}$, $k=1, 2$, $-t_1<t\leqq 0$, ($t_1$ est assez petit) telles que au cas de $\delta_1\neq\delta_2$,

$$|\lambda_{k,n}(t)-(2\pi n)^{2m}\{1+(\delta_k/n)\}|\leqq C_1\{|t|n+1\}n^{2m-2}, \tag{2.2}$$

et que au cas de $\delta_1=\delta_2=\tilde{\delta}$,

$$|\lambda_{k,n}(t)-(2\pi n)^{2m}\{1+(\tilde{\delta}/n)\}|\leqq C_1\{|t|n^{1/2}+1\}n^{2m-3/2}. \tag{2.3}$$

Ensuite nous traitons les résolvants de $A(t)$. Soit $A_D$ la réalisation de $D_x^{2m}$ dans $L^2(I)$ sous la condition de Dirichlet:

$$D(A_D)=\{u\in H^{2m}(I)\,;\, D_x^k u(0)=D_x^k u(1)=0 \text{ pour } 0\leqq k<m\}.$$

Les valeurs propres de $A_D$, exceptées un nombre fini, sont données par (2.2) avec $\delta_1=0$ (resp. $m/2$), $\delta_2=m$ (resp. $3m/2$) au cas où $m$ est impair (resp. pair). Prenons une constante $\delta$ telle que

$$0<\delta<m/2, \qquad \delta\neq\mathrm{Re}\,\delta_k,\ k=1, 2,$$

et posons

$$\tau_n=(2\pi n)^{2m}\{1+(\delta/n)\}. \tag{2.4}$$

LEMME 1. *Il existe $t_2$, $n_2$, $C_2>0$ tels que pour tous $-t_2<t\leqq 0$, $n>n_2$, $\eta\in\boldsymbol{R}$, $u\in H^{2m}(I)$, on a l'inégalité suivante.*

$$\|(\tau_n-i\eta-D_x^{2m})u\|+\sum_{j=0}^{2m-1}n^{(4m-2\nu_j-3)/2}|B_j(t)u|\geqq C_2 n^{(4m-3)/2}\|u\|. \tag{2.5}$$

*Ici $\|u\|$ est le norme usuel de $u$ dans $L^2(I)$.*

PREUVE. Posons $\lambda_n=\tau_n-i\eta$, $\mu_n=\mu(\lambda_n)$ et désignons par $\tilde{M}_{j,k}$ la cofacteur de $M_{j,k}$ dans la matrice $(M_{p,q})_{0\leq p,q<2m}$. Comme $\lambda_n$, $n>n_2$ ($n_2$ assez grand) sont des résolvants de $A_D$ et de $A(t)$ en vertu de (2.2), (2.3) et de la chois de $\delta$, nous avons

$$(\lambda_n-A_D)^{-1}f-(\lambda_n-A(t))^{-1}f$$

$$= M(t,\ \mu_n)^{-1}\sum_{j,k=0}^{2m-1}\tilde{M}_{j,k}(t,\ \mu_n)B_j(t)\{(\lambda_n-A_D)^{-1}f\}\sigma_k(\mu_n,\ \cdot).$$

Démontrons d'abord que pour $f\in L^2(I)$,

$$\|(\lambda_n-A(t))^{-1}f\| \leqq C(n^{2m-1}+|\eta|)^{-1}|\mu_n|^{1/2}\|f\|. \tag{2.6}$$

Ici $C>0$ est une constante indépendante de $t$, $n$, $\eta$ et $f$ et nous allons désigner telles constantes par les mêmes lettres $C$, $C_1$, $\cdots$. Comme $A_D$ est auto-adjoint, nous avons de la théorie d'interpolation que pour tous $u\in D(A_D)$,

$$\|(\lambda_n-A_D)u\| \geqq C\sum_{k=0}^{2m}(n^{2m-1}+|\eta|)|\mu_n|^{-k}\|D_x^k u\|,$$

de sorte que si $\nu_j\geqq m$,

$$|B_j(t)\{(\lambda_n-A_D)^{-1}f\}| \leqq C_1(n^{2m-1}+|\eta|)^{-1}|\mu_n|^{(2\nu_j+1)/2}\|f\|.$$

Puisque

$$|\eta||\mu_n|^{1-2m} \geqq |\mathrm{Im}\,\mu_n| \geqq (1/2m)|\eta||\mu_n|^{1-2m},$$

(2.1) implique pour $-t_2<t\leqq 0$ ($t_2$ assez petit) et pour $(n,\ \eta)$ avec $|\eta|\geqq C_2 n^{2m-1}$ ($C_2$ assez grand),

$$|M(t,\ \mu_n)| \geqq (1/2)|\mu_n|^{\nu}e^{|\mathrm{Im}\,\mu_n|}\min(|\alpha(0)|,\ |\beta(0)|).$$

Lorsque $|\eta|\leqq C_2 n^{2m-1}$, $\mathrm{Im}\,\mu_n$ et $n\{\mu_n-2\pi n-\pi\delta/m-i\eta(2\pi n)^{1-2m}/2m\}$ sont bornés, de sorte que nous avons

$$|M(t,\ \mu_n)| \geqq C_3|\mu_n|^{\nu}.$$

Comme il est facile de voir que

$$|\tilde{M}_{j,k}(t,\ \mu_n)|\|\sigma_k(\mu_n,\ \cdot)\| \leqq C_4|\mu_n|^{\nu-\nu_j}e^{|\mathrm{Im}\,\mu_n|},$$

nous obtenons (2.6) par combinant les inégalités ci-dessus. Lorsque $u$ est une solution de l'équation:

$$(\lambda_n-D_x^{2m})u = 0 \qquad \text{dans } I,$$

$$u = M(t,\ \mu_n)^{-1}\sum_{j,k=0}^{2m-1}\tilde{M}_{j,k}(t,\ \mu_n)\{B_j(t)u\}\sigma_k(\mu_n,\ \cdot),$$

ce qui implique

$$\|u\| \leqq C_5\sum_{j=0}^{2m-1}|\mu_n|^{-\nu_j}|B_j(t)u|,$$

de sorte que nous avons (2.5) par combinant (2.6).

REMARQUE. Par des arguments pareils à la preuve du Lemme 1, il est aisé de voir le suivant. Pour $\theta_0>0$, il existe $C_6$, $C_7>0$ tels que pour tous $\lambda$ avec $|\lambda|>C_6$, $\theta_0<|\arg\lambda|\leqq\pi$ et pour tous $u\in H^{2m}(I)$, on a

$$\|(\lambda-D_x^{2m})u\|+\sum_{j=0}^{2m-1}|\lambda|^{(4m-2\nu_j-1)/4m}|B_j(t)u| \geqq C_7\{|\lambda|\|u\|+\|D_x^{2m}u\|\}. \tag{2.7}$$

Parce que

$$|\operatorname{Im}\mu(\lambda)| \geqq |\sin(\theta_0/2m)|\,|\mu(\lambda)|$$

implique

$$|\tilde{M}_{j,k}(t, \mu(\lambda))|\,\|\sigma_k(\mu(\lambda), \cdot)\| \leqq C_8|\mu(\lambda)|^{\nu-\nu_j-1/2}e^{|\operatorname{Im}\mu(\lambda)|},$$

nous avons que pour tous $f\in L^2(I)$,

$$\|(\lambda-A(t))^{-1}f\| \leqq C_9|\lambda|^{-1}\|f\|.$$

En désignant par $\|\ \|_k$ le norme usuel dans $H^k(I)$:

$$\|u\|_k = \Big\{\sum_{j=0}^{k}\|D_x^j u\|^2\Big\}^{1/2},$$

nous démontrons les estimations du type Carleman.

LEMME 2. *Supposons que toutes les hypothèses dans le Théorème* 1 *soient vérifiées. Pour chaque* $\varepsilon>0$ *assez petit, il existe alors* $n(\varepsilon)$, $C>0$ *tels que pour* $n>n(\varepsilon)$, $u\in H^{0,2m}(]-\varepsilon, 0[\times I)\cap H^{1,0}(]-\varepsilon, 0[\times I)$ *vérifiant*

(2.8) $$B_j(t)u = 0 \quad \textit{dans } ]-\varepsilon, 0[ \textit{ pour } 0\leqq j<2m,$$

(2.9) $$u(-\varepsilon, x) = u(0, x) = 0 \quad \textit{dans } I,$$

*on a l'inégalité suivante.*

(2.10) $$\int_{-\varepsilon}^{0}\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}+D_x^{2m}u\Big\|^2 e^{2\tau_n t}dt \geqq C\sum_{k=0}^{2m} n^{4m-2k-3}\int_{-\varepsilon}^{0}\|u\|_k^2 e^{2\tau_n t}dt.$$

PREUVE. En employant l'opérateur pseudo-différentiel $\Lambda=\Lambda(D_t)$ dans $\boldsymbol{R}$ à symbole $(1+\eta^2)^{1/2}$, nous remarquons qu'il existe $C_1$, $C_2$ tels que pour tous $u\in H^{0,2m}(\boldsymbol{R}\times I)\cap H^{1,0}(\boldsymbol{R}\times I)$ et pour $0\leqq k<2m$,

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda^{(4m-2k-1)/4m}D_x^k u(t, 0)|^2+|\Lambda^{(4m-2k-1)/4m}D_x^k u(0, 1)|^2 dt\\ &\leqq C_1\int_{-\infty}^{\infty}\|\Lambda^{(2m-k)/2m}u\|_k\|\Lambda^{(2m-k-1)/2m}u\|_{k+1}dt \leqq C_2\int_{-\infty}^{\infty}\|\Lambda u\|^2+\|u\|_{2m}^2 dt.\end{aligned}$$

Lorsque nous posons

$$v(t, x) = u(t, x)e^{\tau_n t}, \qquad \hat{v}(\eta, x) = \int_{-\varepsilon}^{0} e^{-i\eta t}v(t, x)dt,$$

pour $u\in H^{0,2m}(]-\varepsilon, 0[\times I)\cap H^{1,0}(]-\varepsilon, 0[\times I)$ vérifiant (2.8) et (2.9) et nous appliquons $\hat{v}(\eta, \cdot)$ aux (2.5) et (2.7), nous avons, après l'intégration par rapport à $\eta$, que pour $-t_2<\hat{t}\leqq 0$ ($t_2$ est la constante donnée dans le Lemme 1),

(2.11) $$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} n^3\Big\|\frac{\partial v}{\partial t}-\tau_n v+D_x^{2m}v\Big\|^2+\sum_{j=0}^{2m-1}|\{n^{2m-\nu_j}+\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}\}B_j(\hat{t})v|^2 dt\\ &\geqq C_3\int_{-\infty}^{\infty} n^{4m}\|v\|^2+\Big\|\frac{\partial v}{\partial t}+\tau_n v+D_x^{2m}v\Big\|^2+\sum_{j=0}^{2m-1}|\{n^{2m}+\Lambda\}^{(4m-2\nu_j-1)/4m}B_j(\hat{t})v|^2 dt\\ &\geqq C_4\int_{-\infty}^{\infty} n^{4m}\|v\|^2+\|v\|_{2m}^2+\|\Lambda v\|^2 dt.\end{aligned}$$

Ici $C_3$, $C_4>0$ sont des constantes indépendantes de $u$, $n$, $\varepsilon$, $\hat{t}$ et $l$ ($l$ est un paramètre paraissant plus tard) et nous allons désigner telles constantes par les mêmes lettres $C_5$, $C_6$, $\cdots$.

Ensuite nous utilisons la partition de l'unité suivante. Soit $\Psi$ une fonction $C^\infty(\boldsymbol{R})$ telle que $0 \leqq \Psi \leqq 1$ dans $\boldsymbol{R}$, $\Psi(t)=1$ si $|t|<1/2$, $=0$ si $|t|>1$. Pour $1>\sigma>1/2$ et pour les entiers $l \leqq 0$, $n>1$, posons

$$t_{n,l}=ln^{-\sigma}, \qquad \Psi_{n,l}(t)=\Psi(tn^\sigma-l)\Big\{\sum_{j=-\infty}^{0}\Psi(tn^\sigma-j)^2\Big\}^{-1/2}.$$

Nous peuvons alors obtenir (2.10) par groupant (2.11), échangant $\hat{t}$ contre $t_{n,l}$ et $v$ contre $v_{n,l}(t,x)=v(t,x)\Psi_{n,l}(t)$. Pour le faire estimons les suivants.

$$J=J(v_{n,l})=\int_{-\infty}^{\infty} n^{4m}\|v_{n,l}\|^2+\|v_{n,l}\|_{2m}^2+\|\Lambda v_{n,l}\|^2 dt,$$

$$J_{j,1}=\int_{-\infty}^{\infty} n^{4m-2\nu_j}|\{B_j(t_{n,l})-B_j(t)\}v_{n,l}|^2$$
$$+|\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}\{B_j(t_{n,l})-B_j^\circ(t_{n,l})-B_j(t)+B_j^\circ(t)\}v_{n,l}|^2 dt,$$

$$J_{j,2}=\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}\{B_j^\circ(t_{n,l})-B_j^\circ(t)\}v_{n,l}|^2 dt.$$

Comme l'application $f\to fg$ est bornée dans $H^\theta(\boldsymbol{R})$ pour $|\theta|\leqq 1$ au cas où $(\partial/\partial t)^k g$, $k=0, 1$, sont bornés dans $\boldsymbol{R}$, il est aisé de voir que

$$\begin{aligned}(2.12)\quad J_{j,1} &\leqq C_5\int_{-\infty}^{\infty} n^{4m-2\nu_j-2\sigma}\|v_{n,l}\|_{\nu_j}\|v_{n,l}\|_{\nu_j+1}\\ &\quad+\|\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}v_{n,l}\|_{\nu_j-1}\|\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}v_{n,l}\|_{\nu_j}dt \leqq C_6\{n^{1-2\sigma}+n^{-2}\}J.\end{aligned}$$

Prenons des opérateurs au bord $B_j'(t)$, $0\leqq j<2m$, à coefficients $C_c^3(\boldsymbol{R})$ tels que $B_j'(t)=B_j^\circ(t)$ dans $]-T/2, 0]$ et $\chi_\varepsilon$, $\tilde{\chi}_\varepsilon$ dans $C^\infty(\boldsymbol{R})$ tels que $\chi_\varepsilon(t)=1$ si $-4\varepsilon<t<3\varepsilon$, $\tilde{\chi}_\varepsilon(t)=1$ si $-2\varepsilon<t<\varepsilon$, $\chi_\varepsilon(t)=0$ si $-5\varepsilon<t<4\varepsilon$, $\tilde{\chi}_\varepsilon(t)=0$ si $-3\varepsilon<t<2\varepsilon$. Puisque les applications $f\to[\Lambda^\theta, g]f=\{\Lambda^\theta g-g\Lambda^\theta\}f$ et $f\to(1-\chi_\varepsilon)\Lambda^\theta\tilde{\chi}_\varepsilon f$, $0\leqq\theta\leqq 1$, sont bornées dans $L^2(\boldsymbol{R})$ au cas où $(\partial/\partial t)^k g$, $0\leqq k\leqq 3$, sont bornés dans $\boldsymbol{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}J_{j,2}/8 &\leqq \int_{-\infty}^{\infty}|\chi_\varepsilon\{B_j^\circ(t_{n,l})-B_j'(t)\}\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}v_{n,l}|^2+|\{B_j^\circ(t_{n,l})-B_j'(t)\}\\ &\qquad\times(1-\chi_\varepsilon)\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}\tilde{\chi}_\varepsilon v_{n,l}|^2+|[\Lambda^{(4m-2\nu_j-1)/4m}, B_j'(t)]v_{n,l}|^2 dt\\ &\leqq \int_{-\infty}^{\infty} C_7\varepsilon^2\|\Lambda^{(2m-\nu_j)/2m}v_{n,l}\|_{\nu_j}\|\Lambda^{(2m-\nu_j-1)/2m}v_{n,l}\|_{\nu_j+1}+C_1(\varepsilon)\|v_{n,l}\|_{\nu_j}\|v_{n,l}\|_{\nu_j+1}dt,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$(2.13)\qquad J_{j,2}\leqq\{C_8\varepsilon^2+C_2(\varepsilon)n^{-1}\}J.$$

Ici $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ sont des constantes dépendantes de $\varepsilon$, mais indépendantes de $u$, $n$, $l$. Lorsque nous prenons $\varepsilon$ et $1/n$ assez petits, nous avons en vertu de $m>1$ (2.10) par (2.11)-(2.13) et

$$\sum_{l=-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} n^3\Big\|\frac{\partial}{\partial t}v_{n,l}-\Psi_{n,l}\frac{\partial v}{\partial t}\Big\|^2 dt \leqq C_9 n^{-4m+3+2\sigma}\sum_{l=-\infty}^{0}J(v_{n,l}).$$

PREUVE DU THÉORÈME 1. Soient $\tilde{B}_j(t)$, $0\leqq j<2m$, $2m$ opérateurs au bord définis par

$$\tilde{B}_j(t)u=B_j(t)\{e^{\Phi(t,\cdot)}u\},\qquad \Phi(t,x)=-i\int_0^x a_1(t,\tilde{x})/2m d\tilde{x}.$$

Comme la condition (v) par rapport aux $\tilde{B}_j(t)$ est vérifiée, nous avons par le Lemme 2 des estimations du type Carleman: Pour chaque $\varepsilon>0$ assez petit, il existe $n(\varepsilon)$, $C>0$ tels que pour tous $n>n(\varepsilon)$, $u\in H^{0,2m}(]-\varepsilon, 0[\times I)\cap H^{1,0}(]-\varepsilon,0[\times I)$ vérifiant $B_j(t)u=0$ dans $]-\varepsilon, 0[$ pour $0\leqq j<2m$, et $u(-\varepsilon, x)=u(0, x)=0$ dans $I$, on a l'inégalité suivante.

$$\int_{-\varepsilon}^0\left\|\frac{\partial u}{\partial t}+D_x^{2m}u+a_1(t,x)D_x^{2m-1}u\right\|^2 e^{2\tilde{\tau}_n t}dt\geqq C\sum_{k=0}^{2m}n^{4m-2k-3}\int_{-\varepsilon}^0\|u\|_k^2 e^{2\tilde{\tau}_n t}dt.$$

Ici $\tilde{\tau}_n$ est défini par (2.4) par rapport aux $\tilde{B}_j(t)$. Nous avons donc l'unicité exigée par des arguments usuels.

## 3. Unicité et non unicité au cas de $m=1$.

Dans ce paragraphe nous traitons le problème (1.1)-(1.2) au cas de $m=1$. Remarquons tout d'bord que si $B_j^\circ(0)$, $j=0, 1$, sont linéairement indépendants et s'ils ne sont pas vérifiés (v), les conditions au bord:

$$B_j^\circ(0)u=0,\qquad j=0,1,$$

sont équivalentes à l'une des suivantes:

(3.1) $$u(x_o)=D_xu(x_o)=0,\qquad x_o=0 \text{ ou } 1.$$

(3.2) $$u(0)-bu(1)=D_xu(0)+bD_xu(1)=0,\qquad b\neq 0.$$

D'après le résultat de Mizohata [**3**] concernant l'unicité dans les problèmes de Cauchy non caractéristiques pour les équations paraboliques du second ordre, nous savons l'unicité pour le future et pour le passé dans le problème (1.1)-(3.1) sans la condition que $u(0, x)=0$ dans $I$. D'autre part il est aisé de voir d'après le contre-exemple suivant qu'il n'y a plus d'unicité dans le problème (1.1)-(3.2) pour certains $a_1$ et $a_2$.

CONTRE-EXEMPLE. *Il existe une solution $u$ non triviale dans $C^\infty(\boldsymbol{R}\times I)$ de l'équation:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+D_x^2u=0\qquad \textit{dans } \boldsymbol{R}\times I,$$

*vérifiant $u(0, x)=0$ dans $I$ et (3.2) dans $\boldsymbol{R}$ avec $b=1$.*

PREUVE. Pour $\sigma>1$ posons

$$f(t)=\exp(-|t|^{-\sigma}),\qquad u(t,x)=\sum_{k=0}^\infty(\partial/\partial t)^k f(t)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2k}/(2k)!.$$

Comme il existe $C>0$ tel que pour tous $k\geqq 0$, $t\in\boldsymbol{R}$,

$$|(\partial/\partial t)^k f(t)| \leqq C^{-k}(k!)^{1+1/\sigma}\exp(-C|t|^{-\sigma}),$$

$u$ est une solution désirée.

Au lieu de (iii), nous faisons l'hypothèse:

(iii)′ Dans $]-T, 0]\times\bar{I}$, $a_1$ est continu et $a_2$ est mesurable et borné,

et démontrons le suivant.

THÉORÈME 2. *Soit* $m=1$. *Supposons que* (i), (ii), (iii)′, (iv) *et* (v) *soient vérifiées. On a alors la même conclusion que le Théorème* 1.

Lorsque $a_k$, $k=1, 2$, sont $C^1$ et $\nu_0=\nu_1$, ce théorème est un cas particulier des résultats de [**2**], dont les techniques sont encore valables pour établir l'unicté rétrograde pour les solutions dans $H^{0,2}(]-T, 0[\times I)\cap H^{1,1}(]-T, 0[\times I)$ même au cas où $a_1$ est mesurable et borné.

Avant de commencer la preuve du Théorème 2, nous notons le suivant. En vertu de (iii)′ nous peuvons prendre, pour chaque $\varepsilon>0$, $a_\varepsilon(x)$ dans $C^1(\bar{I})$ tel que $|a_1(0, x)-a_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ dans $I$ et posons pour une solution $u$ de (1.1)-(1.2),

$$v(t, x) = u(t, x)\exp\left(i\int_0^x a_\varepsilon(y)/2dy\right).$$

Alors $v$ satisfait l'inégalité différentielle:

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial t}+D_x^2 v\right\| \leqq \rho(\varepsilon)\|D_x v\|+C_\varepsilon\|v\|, \qquad \text{p.p. dans } ]-\varepsilon, 0[. \tag{3.3}$$

Ici $\rho(\varepsilon)=\sup\{|a_1(t, x)-a(0, x)|\,;\ -\varepsilon<t<0,\ x\in I\}$ et $C_\varepsilon$ est une constante indépendante de $v$.

Ensuite nous considérons les réalisations, $A_D$, $A_N$, $A_b$, de $D_x^2$ dans $L^2(I)$, dont les domaines de définition sont donnés par

$$D(A_N) = \{u\in H^2(I)\,;\, D_x u(0)=D_x u(1)=0\}$$
$$D(A_b) = \{u\in H^2(I)\,;\, b_k u\equiv\alpha_k D_x^k u(0)+\beta_k D_x^k u(1)=0,\ k=0, 1\}.$$

La condition (v) par rapport à $\{b_0, b_1\}$ signifie que

$$\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0 \neq 0. \tag{3.4}$$

LEMME 3. *Soit $A$ l'un des $A_D$, $A_N$, $A_b$. Si* (3.4) *est vérifié et $\{\tau_n\}$ est une série donnée par* (2.4) *par rapport à $\{b_0, b_1\}$, il existe $n_o$, $C$ tels que pour tous $n>n_o$, $\eta\in\boldsymbol{R}$, $u\in D(A)$, on a*

$$C\|(A-\tau_n-i\eta)u\| \geqq (n+|\eta|)\|u\|. \tag{3.5}$$

PREUVE. Comme $A$ est auto-adjoint au cas de $A=A_D$ ou $A_N$, il est clair. Soit $G_\mu(x, y)$ le noyau de Green de $A_b-\mu^2$:

$$M(\mu)=(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)\cosh(i\mu)+\alpha_0\alpha_1+\beta_0\beta_1,$$

$$i\mu M(\mu)G_\mu(x, y)-\frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)\sinh(i\mu(1-|x-y|))$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)\sinh(i\mu(1-x-y))$$

$$=\begin{cases}\beta_0\beta_1\sinh(i\mu(x-y)), & \text{si } 0\leqq x\leqq y\leqq 1,\\ -\alpha_0\alpha_1\sinh(i\mu(x-y)), & \text{si } 0\leqq y\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Si nous prenons $C$ assez grand et désignons $\mu(\tau_n+i\eta)$ par $\mu_n$, $|\mu_n|^{-1}|G_{\mu_n}(x, y)|$ est borné dans $\{(x, y, \eta, n);\ x, y\in I,\ |\eta|\leqq Cn\}$, de sorte que nous avons (3.5) pour $|\eta|\leqq Cn$. Lorsque $|\eta|\geqq Cn$, nous utilisons le noyau de Green $H_\mu(x, y)$ de $A_b-\mu^2$ avec $b_0u=u(1)$, $b_1u=D_xu(0)$ et posons

$$G'_\mu(x, y)=G_\mu(x, y)+(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)\frac{\cosh(i\mu)}{M(\mu)}H_\mu(x, y).$$

Par l'inégalité de Hausdorff-Young nous obtenons

$$|\eta|\left\|\int_0^1 G'_{\mu_n}(\cdot, y)f(y)dy\right\|\leqq C_1\|f\|,$$

pour certaine constante $C_1$ indépendante de $n$, $\eta$, $f$. D'autre part la réalisation de $D_x^2$ dans $L^2(I)$ sous les conditions au bord: $u(1)=D_xu(0)=0$, est auto-adjoint, nous avons (3.5) pour $|\eta|\geqq Cn$.

PREUVE DU THÉORÈME 2. Nous démontrons l'unicité rétrograde des solutions $v$ de (3.3) vérifiant

$$B_j(t)\Big\{v\exp\Big(-i\int_0^x a_\varepsilon(y)/2dy\Big)\Big\}=0,\qquad j=0, 1, \tag{3.6}$$

ce qui sont équivalents aux conditions au bord suivantes. Au cas de $\nu_0=\nu_1=0$,

$$b_0u\equiv u(0)=0,\qquad b_1u\equiv u(1)=0,$$

au cas de $\nu_0=\nu_1=1$,

$$b_0u\equiv D_xu(0)=\alpha_{0,1,\varepsilon}(t)u(0)+\beta_{0,1,\varepsilon}(t)u(1),$$

$$b_1u\equiv D_xu(1)=\alpha_{1,1,\varepsilon}(t)u(0)+\beta_{1,1,\varepsilon}(t)u(1),$$

et au cas de $\nu_0=0$, $\nu_1=1$,

$$b_{0,\varepsilon}(t)u\equiv\alpha_{0,0}(t)u(0)+\beta_{0,0}(t)B_\varepsilon u(1)=0,$$

$$b_{1,\varepsilon}(t)u\equiv\alpha_{1,0}(t)D_xu(0)+\beta_{1,0}(t)B_\varepsilon D_xu(1)=\alpha_{1,1,\varepsilon}(t)u(0)+\beta_{1,1,\varepsilon}(t)u(1).$$

Ici $\alpha_{j,k,\varepsilon}$ et $\beta_{j,k,\varepsilon}$ sont $C^1$ et

$$B_\varepsilon=\exp\Big(-i\int_0^1 a_\varepsilon(x)/2\,dx\Big).$$

Lorsque nous prenons $\{\tau_n\}$ donné par (2.4) par rapport aux conditions au bord :

$$B_j(t)\left\{v\exp\left(-i\int_0^x a_1(0,\,y)/2\,dy\right)\right\}=0, \qquad j=0,\,1,$$

nous avons les estimations du type Carleman: Pour chaque $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, ($\varepsilon_1$ est assez petit), il existe $n(\varepsilon)$ tel que pour tous $n>n(\varepsilon)$, $v\in H^{0,2}(]-\varepsilon,\,0[\times I)\cap H^{1,1}(]-\varepsilon,\,0[\times I)$ vérifiant (2.9) et (3.6) dans $]-\varepsilon,\,0[$, on a

$$\int_{-\varepsilon}^{0}\left\|\frac{\partial v}{\partial t}+D_x^2 v\right\|^2 e^{2\tau_n t}dt \geqq C_1\int_{-\varepsilon}^{0}\{\|v\|_1^2+n^2\|v\|^2\}e^{2\tau_n t}dt. \tag{3.7}$$

Ici $C_1>0$ est une constante indépendante de $v$, $n$, $\varepsilon$ et nous allons désigner telle constante par $C_2$. Parce que nous obtenons par (3.5) et par des arguments pareils dans les preuves des Lemmes 1 et 2 que

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} n^2\left\|\frac{\partial v}{\partial t}-\tau_n v+D_x^2 v\right\|^2+\sum_{j=0}^{1}|\{n^{2-\nu_j}+\Lambda^{(3-2\nu_j)/4}\}b_{j,\varepsilon}(t)v|^2 dt\\ &\quad\geqq C_2\int_{-\infty}^{\infty} n^4\|v\|^2+\|v\|_2^2+\|\Lambda v\|^2 dt.\end{aligned}$$

Si $\nu_j=1$, nous obtenons pour certaine constante $C(\varepsilon)$ dépendante de $\varepsilon$,

$$|b_{j,\varepsilon}(t)v|^2 \leqq C(\varepsilon)\|v\|\|v\|_1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Lambda^{1/4}b_{j,\varepsilon}(t)v|^2 dt \leqq C(\varepsilon)\int_{-\infty}^{\infty}\|\Lambda^{1/4}v\|\|\Lambda^{1/4}v\|_1 dt,$$

et donc nous avons (3.7) pour $n$ assez grand.

## Bibliographie


[1] N. Dunford et J. T. Schwartz, Linear Operators, Part III, Wiley-Interscience, New York, 1971.

[2] J.-L. Lions et B. Malgrange, Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques, Math. Scand., **8** (1960), 277-286.

[3] S. Mizohata, Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **31** (1958), 219-239.



Kinji WATANABE

Département de Mathématiques
Hyogo Université d'Education
Yashiro, Hyogo 673-14
Japon