

## Champs de vecteurs invariants sur une algèbre de Lie réductive complexe

Par M. RAÏS

(Reçu le 6 mai, 1986)  
(Revisé le 27 mars, 1987)

### 1. Introduction.

1.1. A l'origine de ces notes se trouve un article de J. Sekiguchi ([S]). L'auteur considère une algèbre de Lie simple complexe  $\mathfrak{g}$ , son groupe adjoint  $G$ , une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  et le groupe de Weyl  $W$  de la paire  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Il rappelle le théorème (de Chevalley), selon lequel l'opération de restriction à  $\mathfrak{h}$  est un isomorphisme d'algèbres de l'algèbre  $P(\mathfrak{g})^G$  (des fonctions polynômes  $G$ -invariantes sur  $\mathfrak{g}$ ) sur celle  $P(\mathfrak{h})^W$  des fonctions polynômes  $W$ -invariantes sur  $\mathfrak{h}$ , et pose la question de savoir dans quelle mesure un tel isomorphisme existe encore lorsqu'il s'agit de *champs de vecteurs  $G$ -invariants* sur  $\mathfrak{g}$ .

1.2. La réponse qu'il apporte à cette question est essentiellement la suivante : il existe une bijection entre l'ensemble des champs de vecteurs invariants sur  $\mathfrak{g}$  et une certaine algèbre de Lie de champs de vecteurs sur  $\mathfrak{h}/W$  (celle des champs "logarithmiques le long de l'ensemble discriminant de  $\mathfrak{h}/W$ "). Pour préciser ce résultat, donnons quelques détails (voir le paragraphe 4 pour des compléments). Sekiguchi choisit une transversale (de Kostant)  $\mathfrak{t}$ ; c'est un sous-espace affine de  $\mathfrak{g}$ , de dimension égale au rang  $r$  de  $\mathfrak{g}$ , qui rencontre chaque  $G$ -orbite régulière en un point et un seul; l'opération de restriction à  $\mathfrak{t}$  est un isomorphisme d'algèbres de  $P(\mathfrak{g})^G$  sur l'algèbre  $P(\mathfrak{t})$  des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{t}$ . On note  $D$  la fonction polynomiale (sur  $\mathfrak{g}$ ) qui est le coefficient de  $\lambda^r$  dans le développement du polynôme caractéristique  $\det(\lambda + \text{ad } X)$  de  $(-\text{ad } X)$  et  $F$  la restriction de  $D$  à  $\mathfrak{t}$ . On désignera par  $\mathfrak{G}_F$  l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs  $L$  sur  $\mathfrak{t}$ , à coefficients polynômes, qui préservent l'idéal engendré par  $F$  dans  $P(\mathfrak{t})$ : un champ  $L$  appartient à  $\mathfrak{G}_F$  si et seulement s'il existe une fonction polynôme  $c(L)$  sur  $\mathfrak{t}$  telle que  $LF = c(L)F$ , et on a donc une application (en fait un cocycle)  $c: \mathfrak{G}_F \rightarrow P(\mathfrak{t})$ . Les éléments de  $\mathfrak{G}_F$  sont les champs logarithmiques auxquels il a été fait allusion plus haut. Ceci étant, Sekiguchi établit sa bijection selon les étapes suivantes :

1) En construisant d'une manière très technique des fonctions polynomiales  $X_i: \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{g}$ , ( $1 \leq i \leq r$ ), définies (seulement) dans  $\mathfrak{t}$  et à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  ([S], Pro-

position 2.2).

2) En calculant les “composantes radiales”  $L_i$  des  $X_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) le long de  $\underline{t}$  ([S], Theorem 3.4).

3) En montrant que les champs ainsi calculés  $L_1, \dots, L_r$ , forment une base de  $\mathfrak{C}_F$ , considérée comme module sur  $P(\underline{t})$  (il utilise pour cela des résultats antérieurement connus concernant la structure de  $\mathfrak{C}_F$ ) ([S], Theorem 3.6.1).

Enfin, il montre que les fonctions  $X_i$  admettent des prolongements holomorphes  $M_i: \underline{g} \rightarrow \underline{g}$ , qui sont des champs de vecteurs invariants sur  $\underline{g}$ .

**1.3.** Dans ces notes, on propose de montrer que :

1°) Le résultat principal de Sekiguchi, énoncé de la manière suivante : il existe un isomorphisme naturel entre l’algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants sur  $\underline{g}$  et l’algèbre de Lie  $\mathfrak{C}_F$ , est une *illustration* du théorème de relèvement des champs de vecteurs de G. Schwarz ([Sch 1]). On en donnera une généralisation dans le cadre des espaces symétriques, et pour d’autres types de champs de vecteurs : polynomiaux, holomorphes,  $C^\infty$ .

2°) Si on souhaite faire intervenir les  $M_i$ , afin d’obtenir comme *conséquence* du théorème de Schwarz, des renseignements sur la structure de  $\mathfrak{C}_F$ , il est tout à fait satisfaisant de constater que les champs de vecteurs  $M_1, M_2, \dots, M_r$  de Sekiguchi ont en fait une définition très simple comme *gradients* de polynômes invariants  $p_1, p_2, \dots, p_r$ , constituant un système de générateurs de  $P(\underline{g})^G$ , et que le calcul de leurs composantes radiales le long de  $\underline{t}$  résulte immédiatement de leur définition.

Dans un appendice, on donne la formule explicite du cocycle (dans le cas d’une algèbre de Lie *quelconque*), et on montre comment la formule de la composante radiale du Casimir d’une algèbre de Lie réductive réelle (formule due à Harish-Chandra) en résulte.

L’auteur remercie bien sincèrement le referee qui a relevé une erreur plutôt importante dans la première version de ce texte et qui a fourni l’exemple 3.7.

## 2. Le théorème de Schwarz.

**2.1.** A l’origine, Schwarz considère un groupe de Lie compact  $K$  opérant différentiablement dans une variété différentielle  $V$ , mais se ramène très vite au cas où  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension finie, l’opération de  $K$  dans  $V$  étant celle associée à une représentation linéaire continue de  $K$  dans  $V$ . Dans cette situation, on considère l’algèbre  $C^\infty(V)^K$  des fonctions réelles de classe  $C^\infty$  et  $K$ -invariantes sur  $V$  avec l’algèbre  $\text{Der}(C^\infty(V)^K)$  de ses dérivations  $\mathbf{R}$ -linéaires d’une part, et l’algèbre de Lie  $\mathcal{X}^\infty(V)^K$  des champs de vecteurs  $C^\infty$  et  $K$ -invariants sur  $V$  d’autre part. Chaque élément de  $\mathcal{X}^\infty(V)^K$ , considéré comme

un opérateur différentiel sur  $V$ , induit naturellement dans  $C^\infty(V)^K$  une dérivation  $\mathbf{R}$ -linéaire. D'où un homomorphisme d'algèbres de Lie  $\theta : \mathcal{X}^\infty(V)^K \rightarrow \text{Der}(C^\infty(V)^K)$ , qu'on appellera l'application *composante radiale (abstraite)*. Le théorème fondamental de Schwarz ([Sch 1], 0.2) détermine l'image de  $\theta$  : elle est constituée par les champs de vecteurs sur l'espace des orbites  $V/K$ , qui sont *tangents aux strates* de  $V/K$ .

**2.2.** Plus précisément, soient  $L$  un sous-groupe d'isotropie de  $K$  et  $(L)$  l'ensemble des sous-groupes de  $K$ , conjugués de  $L$ . On note  $V^{(L)}$  l'ensemble des points de  $V$  dont le sous-groupe d'isotropie appartient à  $(L)$  et  $I^\infty(L)$  l'idéal de  $C^\infty(V)^K$  constitué par les fonctions nulles sur  $V^{(L)}$ . On a alors le théorème de relèvement des champs de vecteurs  $C^\infty$  ([Sch 1], 0.2 et 3.1) :

**THÉORÈME.** *L'image de  $\theta$  est constituée précisément par les dérivations de  $C^\infty(V)^K$  qui préservent chacun des idéaux  $I^\infty(L)$ ,  $(L)$  décrivant l'ensemble des classes d'isotropie.*

**2.3.** Pour ce qui nous intéresse ici, on doit ajouter que ce théorème admet deux analogues *algébriques*, l'un sur le corps des réels, l'autre sur le corps des complexes :

Notons  $\mathcal{X}(V)^K$  l'ensemble des champs de vecteurs  $K$ -invariants à *coefficients polynômes* sur  $V$ , et  $P(V)^K$  l'algèbre des fonctions polynomiales  $K$ -invariantes sur  $V$  ; on a encore une application composante radiale  $\theta : \mathcal{X}(V)^K \rightarrow \text{Der}(P(V)^K)$ . Pour chaque classe d'isotropie  $(L)$ , on désigne par  $I(L)$  l'idéal de  $P(V)^K$  constitué par les fonctions nulles sur  $V^{(L)}$ . On a alors le théorème de relèvement des champs de vecteurs polynomiaux ([Sch 1], 3.7).

**THÉORÈME.** *L'image de  $\theta : \mathcal{X}(V)^K \rightarrow \text{Der}(P(V)^K)$  est constituée précisément par les dérivations de  $P(V)^K$  qui préservent chacun des idéaux  $I(L)$ ,  $(L)$  décrivant l'ensemble des classes d'isotropie.*

L'analogue algébrique *complexe* concerne le complexifié  $K_c$  du groupe  $K$  et la représentation naturelle de  $K_c$  dans le complexifié  $V \otimes \mathbf{C}$  de  $V$ . Il s'énonce de manière analogue (voir [Sch 1], 5 et 6).

**2.4.** Pour déterminer l'image de  $\theta$ , il importe donc de connaître les idéaux associés aux  $V^{(L)}$  ; en fait n'interviennent réellement que ceux associés aux  $V^{(L)}$  dont l'image canonique dans  $V/K$  est (une strate) de codimension 1. On a en effet ([Sch 1], Proposition 3.5) : pour qu'une dérivation de l'algèbre des invariants soit induite par un champ de vecteurs invariant sur  $V$ , il (faut et il) suffit qu'elle préserve les idéaux associés aux strates de codimension 1 de  $V/K$  ; (il peut arriver qu'il n'y ait pas de strate de codimension 1 dans  $V/K$ , auquel cas toute dérivation de l'algèbre des invariants est la composante radiale d'un champ de

vecteurs invariant). Il reste donc à examiner les idéaux associés aux strates de codimension 1 (les strates 1-sous-principales selon la terminologie de Schwarz). D'après [Sch 1] (Lemme 8.3), chaque tel idéal est premier et principal, engendré par un polynôme homogène de degré pair, qu'on peut même choisir positif sur  $V$ , au moins si  $K$  est connexe (ou plus généralement si  $P(V)^K$  est un anneau factoriel). Lorsqu'il en est ainsi et s'il y a des strates de codimension 1 dans  $V/K$ , il est donc possible de trouver un polynôme homogène invariant  $D$  (irréductible lorsqu'il y a une seule strate de codimension 1 dans  $V/K$ ), tel que l'image de  $\theta$  soit exactement l'ensemble des dérivations préservant l'idéal engendré par  $D$ .

### 3. Illustrations.

**3.1.** Soit  $B$  un produit scalaire (euclidien)  $K$ -invariant sur  $V$ . Pour chaque fonction réelle dérivable  $f$  définie dans  $V$ , on désignera par  $df: V \rightarrow V$  la différentielle de  $f$  (pour être plus correct, il faudrait dire le gradient de  $f$ ):

$$B(df(v), w) = \left( \frac{d}{dt} \right)_0 f(v+tw) \quad (v, w \text{ dans } V).$$

Si  $f$  est  $K$ -invariante, il est immédiat que  $df$  est  $K$ -invariante:  $df(x \cdot v) = x \cdot df(v)$  ( $x \in K$ ,  $v \in V$ ), et définit donc un champ de vecteurs  $K$ -invariant sur  $V$ , dont la composante radiale  $\theta(df)$  sera notée  $A(f)$ .

Soit  $(p_1, \dots, p_r)$  un système de générateurs de  $P(V)^K$ ; chaque composante radiale  $A(p_i)$  est entièrement déterminée par:

$$(A(p_i)p_j)(v) = B(dp_i(v), dp_j(v)) \quad (1 \leq j \leq r). \quad (3.1)$$

Si  $\phi$  est une fonction dérivable de  $r$  variables, il vient trivialement:

$$A(p_i)\phi \circ p = \sum_{1 \leq k \leq r} B(dp_i, dp_k)(\partial_k \phi) \circ p \quad (3.2)$$

où  $p: V \rightarrow \mathbf{R}^r$  est l'application dont les composantes sont  $p_1, \dots, p_r$ ,  $p = (p_1, \dots, p_r)$ , et  $\partial_k \phi$  est la dérivée partielle de  $\phi$  par rapport à sa  $k^{\text{ième}}$  variable.

**3.2.** Si le groupe  $K$  est fini, tout champ de vecteurs sur  $V$  qui annule tous les polynômes invariants est nul; donc l'application composante radiale est injective. Supposons maintenant  $K$  fini engendré par des réflexions. Pour chaque réflexion  $\tau$  appartenant à  $K$ , on désignera par  $E_\tau$  l'hyperplan des points fixes de  $\tau$  et par  $\alpha_\tau$  une forme linéaire sur  $V$  dont le noyau est  $E_\tau$ . On pose  $J = \prod_\tau \alpha_\tau$ , de sorte que  $J$  est le semi-invariant fondamental de  $K$  ([Bou], Chapitre 5, Proposition 5) et  $D = J^2$ . L'identification des strates de codimension 1 se fait comme suit: soient  $v$  un point de  $V$  et  $L$  le stabilisateur de  $v$  dans  $K$ . Alors l'image canonique de  $V^{(L)}$  dans  $V/K$  est une strate de codimension 1 si et seule-

ment si l'une des conditions (équivalentes) suivantes est réalisée :

- (i) Il existe une réflexion  $\tau$  telle que  $L = \{1, \tau\}$ .
- (ii) Le point  $v$  appartient à un et un seul hyperplan  $E_\tau$ .
- (iii) Le rang de l'application  $p : V \rightarrow \mathbf{R}^r$  (notations de 3.1), calculé au point  $v$ , est  $n-1$ .

Il en résulte que les idéaux associés aux strates de codimension 1 sont ceux engendrés par les facteurs (invariants) irréductibles de  $D$ . L'application composante radiale est donc un isomorphisme de  $\chi^\infty(V)^K$  (resp.  $\chi(V)^K$ ) sur l'algèbre de Lie des dérivations de  $C^\infty(V)^K$  (resp.  $P(V)^K$ ) qui préservent l'idéal engendré par  $D$ . Il est utile de noter ici *un point supplémentaire* :—Soit  $(p_1, \dots, p_r)$  un système minimal de générateurs homogènes de  $P(V)^K$ . Alors  $\chi(V)^K$  (resp.  $\chi^\infty(V)^K$ ) est un  $P(V)^K$ -module (resp.  $C^\infty(V)^K$ -module) libre de rang  $r$ , qui admet  $(dp_1, \dots, dp_r)$  comme base (voir [So] et ([Sch 1], 7.8) pour l'énoncé polynomial et ([Sch 1], 6.14) pour l'énoncé  $C^\infty$ ).

**3.3.** Soit  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  une décomposition de Cartan d'une algèbre de Lie réductive réelle  $\mathfrak{g}$  ([He], Chapitre III, § 7). On note  $G$  le groupe adjoint de  $\mathfrak{g}$  et  $K$  le sous-groupe analytique de  $G$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$ . Le groupe  $K$  opère dans  $\mathfrak{p}$  au moyen de la représentation adjointe. On choisit un sous-espace de Cartan (un sous-espace abélien maximal)  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{p}$  et on note  $W$  le groupe de Weyl de la paire  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . Soit  $(q_1, \dots, q_r)$  un système minimal de générateurs homogènes de  $P(\mathfrak{p})^K$ ; si  $p_i$  est la restriction à  $\mathfrak{a}$  de  $q_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), on sait que  $(p_1, \dots, p_r)$  est un système de générateurs de  $P(\mathfrak{a})^W$  (Théorème de Chevalley, [He], Chapitre X, Theorem 6.10); donc l'opération de restriction à  $\mathfrak{a}$  des fonctions définies dans  $\mathfrak{p}$ , notée  $R_{\mathfrak{a}}$ , est un isomorphisme d'algèbres de  $P(\mathfrak{p})^K$  sur  $P(\mathfrak{a})^W$ . D'après le théorème de Hilbert-Schwarz sur les fonctions  $K$ -invariantes de classe  $C^\infty$  ([Sch 2]), l'application  $R_{\mathfrak{a}}$  est aussi un isomorphisme d'algèbres de  $C^\infty(\mathfrak{p})^K$  sur  $C^\infty(\mathfrak{a})^W$ . Notons  $M$  le centralisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$  et  $M^*$  le normalisateur de  $\mathfrak{a}$  dans  $K$ , ( $M^*$  est l'ensemble des  $x$  dans  $K$  tels que  $\text{Ad}(x)\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ ). Soit  $\mathfrak{h}$  l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\mathfrak{p}$ , qu'on peut décomposer en somme directe orthogonale  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$ , où  $\mathfrak{a}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}^\perp$ ; le groupe  $M^*$  opère dans  $\mathfrak{h}$  (car il normalise  $M$ ) et respecte la décomposition orthogonale  $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$  (car il opère dans  $\mathfrak{a}$  par sa définition); donc le groupe de Weyl  $M^*/M$  opère aussi bien dans  $\mathfrak{a}$  que dans  $\mathfrak{a}'$ . Soit maintenant  $L : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$  une fonction polynomiale (resp.  $C^\infty$ )  $K$ -invariante; sa restriction  $l$  à  $\mathfrak{a}$  est une fonction du même type  $l : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{h}$ , qui est  $W$ -invariante, et qu'on peut écrire  $l = l_1 + l_2$  (en utilisant la décomposition orthogonale  $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$ ),  $l_1$  et  $l_2$  étant des fonctions  $W$ -invariantes, définies dans  $\mathfrak{a}$ , et à valeurs respectivement dans  $\mathfrak{a}$  et dans  $\mathfrak{a}'$ ; en posant  $R_{\mathfrak{a}}(L) = l_1$ , on aura bien défini une application  $\mathbf{R}$ -linéaire  $R_{\mathfrak{a}}$  de  $\chi(\mathfrak{p})^K$  (resp.  $\chi^\infty(\mathfrak{p})^K$ ) dans  $\chi(\mathfrak{a})^W$  (resp.  $\chi^\infty(\mathfrak{a})^W$ ). Soient maintenant  $f$  une fonction dérivable  $K$ -invariante sur  $\mathfrak{p}$  et  $f_0$  sa restriction à  $\mathfrak{a}$  et considérons  $L, l_1$  et  $l_2$  comme des opérateurs de dérivation; comme  $l_2$  prend

ses valeurs dans  $\underline{a}' \subset \underline{a}^\perp$ , et comme  $\underline{a}^\perp$  est, pour tout élément régulier  $X$  de  $\underline{a}$ , exactement l'espace tangent au point  $X$  à l'orbite  $K \cdot X$ , on voit que  $(Lf)(X) = (l_1 f_0)(X)$  pour tout élément régulier  $X$  de  $\underline{a}$ , et par densité, pour tout  $X$  dans  $\underline{a}$ ; on a donc :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\underline{p})^K & \xrightarrow{L} & C^\infty(\underline{p})^K \\ R_{\underline{a}} \downarrow & R_{\underline{a}}(L) & \downarrow R_{\underline{a}} \\ C^\infty(\underline{a})^W & \xrightarrow{\quad} & C^\infty(\underline{a})^W \end{array}$$

$$R_{\underline{a}}(L \cdot f) = R_{\underline{a}}(L) \cdot R_{\underline{a}}(f)$$

ce qu'exprime la commutativité du diagramme ci-contre (il y a évidemment un diagramme analogue avec les fonctions et champs polynomiaux).

De cette dernière formule, il résulte en particulier que  $R_{\underline{a}}$  est un morphisme d'algèbres de Lie de  $\chi(\underline{p})^K$  (resp.  $\chi^\infty(\underline{p})^K$ ) dans  $\chi(\underline{a})^W$  (resp.  $\chi^\infty(\underline{a})^W$ ).

**3.4. LEMME.** 1/ *Le morphisme composante radiale  $\theta$  et le morphisme  $R_{\underline{a}}$  ont même noyau.*

2/ *Le morphisme d'algèbres de Lie  $R_{\underline{a}}$  admet une section. En particulier, il est surjectif et :*

$$\chi^\infty(\underline{p})^K = \ker \theta \oplus \mathfrak{M}^\infty$$

où  $\mathfrak{M}^\infty$  est le sous- $C^\infty(\underline{p})^K$ -module de  $\chi^\infty(\underline{p})^K$  engendré par les gradients  $dq_1, \dots, dq_r$ .

3/ *L'application composante radiale  $\theta$ , restreinte à  $\mathfrak{M}^\infty$ , est un isomorphisme d'algèbres de Lie de  $\mathfrak{M}^\infty$  sur l'algèbre de Lie des dérivations de  $C^\infty(\underline{p})^K$  qui préservent l'idéal engendré par  $D$ , où  $D$  est le déterminant de la matrice de Gramm :*

$$(B(dq_i, dq_j))_{i,j}.$$

**DÉMONSTRATION.** 1/ Soit  $L$  un champ de vecteurs  $C^\infty$ ,  $K$ -invariant sur  $\underline{p}$ . Dire que  $\theta(L)=0$ , c'est dire que  $Lf=0$  pour tout  $f$  dans  $C^\infty(\underline{p})^K$ , ou encore c'est dire que  $R_{\underline{a}}(L)$  est un champ de vecteurs sur  $\underline{a}$  qui annule toutes les fonctions  $C^\infty$   $W$ -invariantes sur  $\underline{a}$ . Donc  $\theta(L)=0$  équivaut à  $R_{\underline{a}}(L)=0$ .

2/ Soit  $l$  un champ de vecteurs  $C^\infty$ ,  $W$ -invariant sur  $\underline{a}$ . Comme indiqué en 3.2, il existe des fonctions  $g_1, \dots, g_r$ , de classe  $C^\infty$  et  $W$ -invariantes sur  $\underline{a}$ , telles que :

$$l = g_1 dp_1 + g_2 dp_2 + \dots + g_r dp_r.$$

Pour  $1 \leq k \leq r$ , notons  $f_k$  l'unique fonction  $C^\infty$  et  $K$ -invariante sur  $\underline{p}$ , dont la restriction à  $\underline{a}$  est  $g_k$ . Alors le champ :

$$L = f_1 dq_1 + \dots + f_r dq_r$$

est  $C^\infty$ ,  $K$ -invariant sur  $\underline{p}$  et  $R_{\underline{a}}(L)=l$  (en effet  $dp_k(X) \in \underline{a}$  pour tout  $X$  dans  $\underline{a}$ ). Donc  $R_{\underline{a}}$  admet une section et  $\chi^\infty(\underline{p})^K$  est somme directe du noyau de  $R_{\underline{a}}$  et de

$\mathfrak{M}^\infty$ .

3/ Soit  $D$  le déterminant de la matrice  $(B(dq_i, dq_j))_{ij}$ ;  $D$  est un polynôme  $K$ -invariant sur  $\underline{p}$  et sa restriction à  $\underline{a}$  est, à un coefficient numérique près, le carré  $J^2$  du semi-invariant fondamental de  $W$ .

La troisième partie du lemme résulte donc de ce qui précède et de la caractérisation de l'image de  $\theta : \mathcal{X}^\infty(\underline{a})^W \rightarrow \text{Der } C^\infty(\underline{a})^W$ , donnée dans 3.2.

**3.5. REMARQUES.** 1/  $\mathfrak{M}^\infty$  est un  $C^\infty(\underline{p})^K$ -module libre engendré par  $dq_1, \dots, dq_r$ . Donc l'image de  $\theta$ , à savoir  $\theta(\mathcal{X}^\infty(\underline{p})^K) = \mathfrak{G}_D$ , est le  $C^\infty(\underline{p})^K$ -module libre engendré par les composantes radiales  $\theta(dq_1), \dots, \theta(dq_r)$ .

2/ Il existe un énoncé analogue au lemme 3.4 pour les champs et fonctions polynomiaux. Dans un tel énoncé,  $\mathfrak{M}^\infty$  doit être remplacé par le  $P(\underline{p})^K$ -module libre  $\mathfrak{M}$  engendré par les gradients  $dq_1, \dots, dq_r$ .

**3.6.** Supposons que l'algèbre réelle  $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$  soit obtenue par restriction du corps des scalaires à partir d'une algèbre réductive complexe; il est bien connu que dans ce cas, le centralisateur  $M$  de  $\underline{a}$  dans  $K$  est un tore maximal de  $K$ , et l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$  est exactement  $\underline{a}$ . Chaque fois qu'il en est ainsi, c'est-à-dire chaque fois que  $\underline{a}$  est l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$ , les morphismes  $R_{\underline{a}}$  et  $\theta$  sont des isomorphismes d'algèbres de Lie et :

$$\mathcal{X}(\underline{p})^K = \mathfrak{M}, \quad \mathcal{X}^\infty(\underline{p})^K = \mathfrak{M}^\infty.$$

En général, l'application  $\theta$  n'est pas injective, comme le montre l'exemple suivant, que je dois au referee, et contrairement à ce qui était affirmé dans la première version de cet article.

**3.7. EXEMPLE.**  $\underline{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbf{R}^2$  et l'action adjointe de  $K = \text{SO}(2)$  dans  $\underline{p}$  "est" l'action naturelle dans  $\mathbf{R}^2$ . Notant  $(x, y)$  les coordonnées habituelles de  $\mathbf{R}^2$  et

$$L_1 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

On constate que  $\mathcal{X}(\underline{p})^K$  est un  $P(\underline{p})^K$ -module libre admettant  $(L_1, L_2)$  comme base. Or  $L_1$  annule toutes les fonctions invariantes, et  $L_2$  est le gradient de la fonction invariante  $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ . En fait  $\ker \theta = \mathbf{R}[f]L_1$  et  $\mathfrak{M} = \mathbf{R}[f]L_2$ , et l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$  est égal à  $\underline{p}$  (alors que  $\underline{a}$  est de dimension 1).

**3.8.** On complexifie la situation étudiée dans le numéro précédent. Dans ce qui suit, l'indice  $c$  désigne la complexification; on a par exemple  $\underline{g}_c = \underline{k}_c \oplus \underline{p}_c$ , où  $\underline{g}_c, \underline{k}_c, \underline{p}_c$  sont les complexifiés de  $\underline{g}, \underline{k}, \underline{p}$ , et le groupe réductif complexe connexe  $K_c$  opère dans  $\underline{p}_c$ . On désignera par  $B$  la forme  $\mathbf{C}$ -bilinéaire sur  $\underline{p}_c$  qui

prolonge celle (déjà notée  $B$ ) sur  $\underline{p}$ , et d'une façon générale par la même lettre le prolongement d'une fonction polynôme définie sur  $\underline{p}$  en une fonction polynôme (holomorphe) définie sur  $\underline{p}_c$ ; en particulier  $q_1, \dots, q_r$  et  $D$  sont maintenant définis sur  $\underline{p}_c$ . Soient  $\chi(\underline{p}_c)^{K_c}$  l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux  $K_c$ -invariants sur  $\underline{p}_c$  et  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$  l'algèbre des fonctions polynomiales  $K_c$ -invariantes sur  $\underline{p}_c$ . La considération des isomorphismes naturels:

$$P(\underline{p}_c)^{K_c} \cong P(\underline{p})^K \otimes \mathbf{C}, \quad \chi(\underline{p}_c)^{K_c} \cong \chi(\underline{p})^K \otimes \mathbf{C}$$

permet d'énoncer:

1) Chaque champ de vecteur polynomial  $L$ ,  $K_c$ -invariant sur  $\underline{p}_c$ , définit une dérivation  $\mathbf{C}$ -linéaire  $\theta(L)$  de  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ . L'application composante radiale ainsi définie  $\theta: \chi(\underline{p}_c)^{K_c} \rightarrow \text{Der } P(\underline{p}_c)^{K_c}$  est un morphisme d'algèbres de Lie dont l'image  $\mathfrak{G}_D$  est:

- d'une part l'algèbre de Lie de toutes les dérivations  $\mathbf{C}$ -linéaires qui préservent l'idéal engendré par  $D$  dans  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ .
- d'autre part le sous- $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ -module libre de  $\text{Der } P(\underline{p}_c)^{K_c}$  engendré par les composantes radiales des gradients  $dq_1, \dots, dq_r$ .

2) Lorsque  $\underline{g}$  est une algèbre réductive complexe (cas étudié par Sekiguchi) (et plus généralement lorsque  $\underline{a}$  est l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$ ) on a:

(i) L'application composante radiale est un isomorphisme d'algèbres de Lie de  $\chi(\underline{p}_c)^{K_c}$  sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}_D$  de toutes les dérivations  $\mathbf{C}$ -linéaires de  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$  qui préservent l'idéal engendré par  $D$ .

(ii)  $\chi(\underline{p}_c)^{K_c}$  est le  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ -module libre engendré par les gradients  $dq_1, \dots, dq_r$ .

(iii) L'opération de restriction à  $\underline{a}_c$  est un isomorphisme de  $\chi(\underline{p}_c)^{K_c}$  sur  $\chi(\underline{a}_c)^{W_c}$ .

On notera que les analogues *holomorphes* de ces énoncés sont encore vrais (voir [Sch 1], Theorem 6.6).

**3.9. REMARQUES.** On donne ici sans démonstration des indications sur l'injectivité de l'application composante radiale et plus particulièrement sur la question de savoir dans quel cas  $\underline{a}$  est l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$ . Pour cela, supposons que  $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$  soit au départ une algèbre de Lie *simple* réelle, de sorte que la représentation adjointe de  $K$  dans  $\underline{p}$  est irréductible.

1) Ou bien la représentation de  $K$  dans  $\underline{p}_c$  est aussi irréductible. Alors  $\underline{a}$  est l'ensemble des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$  (il s'agit d'un calcul de multiplicité, voir [K-R], Remark 24).

2) Ou bien il existe une structure complexe  $K$ -invariante  $J: \underline{p} \rightarrow \underline{p}$ . Si  $L$  est un champ de vecteurs sur  $\underline{p}$ , on notera  $JL$  le champ tel que  $(JL)(X) = J(L(X))$  pour tout  $X$  dans  $\underline{p}$ . Il est facile de voir que les champs  $Jdq_1, \dots, Jdq_r, dq_1, \dots, dq_r$  sont  $K$ -invariants et forment un système libre sur  $C^\infty(\underline{p})^K$ . L'auteur conjecture



que  $(Jdq_1, \dots, Jdq_r)$  est une base du noyau de  $\theta$ , considéré comme module sur  $C^\infty(\underline{p})^K$ .

**4. Composantes radiales concretes le long d'une transversale de Kostant.**

**4.1.** On reprend les notations précédentes. Soit  $X_0$  un élément nilpotent régulier de  $\underline{p}_c$ . On sait (pour tout ceci, on renvoie à [K-R], particulièrement les théorèmes 11, 12 et 13) que  $X_0$  peut être plongé dans un  $sl(2)$ -triplet normal principal: il existe  $H_0$  dans  $\underline{k}_c$ , et un élément nilpotent régulier  $Y_0$  dans  $\underline{p}_c$  tels que :

$$[H_0, X_0] = 2X_0, \quad [H_0, Y_0] = -2Y_0, \quad [X_0, Y_0] = H_0.$$

Soit  $\underline{z}(Y_0)$  le centralisateur de  $Y_0$  dans  $\underline{p}_c$ . On pose :

$$\underline{t} = X_0 + \underline{z}(Y_0).$$

Alors l'espace affine  $\underline{t}$  est contenu dans l'ensemble des éléments réguliers de  $\underline{p}_c$  et l'opération de restriction à  $\underline{t}$  des fonctions définies dans  $\underline{p}_c$ , notée  $R_{\underline{t}}$ , est un isomorphisme de l'algèbre  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$  sur l'algèbre affine  $P(\underline{t})$  de  $\underline{t}$ .

**4.2.** Soit  $L$  un champ de vecteurs  $K_c$ -invariant polynomial sur  $\underline{p}_c$ . Sa composante radiale  $\theta(L)$  est une dérivation  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ ; il existe donc un et un seul champ de vecteurs  $\theta'(L)$  sur  $\underline{t}$  tel que:  $(L \cdot f)|_{\underline{t}} = \theta'(L) \cdot f|_{\underline{t}}$ , pour tout  $f$  dans  $P(\underline{p}_c)^{K_c}$ ; d'où une application composante radiale concrète  $\theta'$ , qui est un morphisme d'algèbres de Lie de  $\chi(\underline{p}_c)^{K_c}$  sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{G}_F$  de tous les champs de vecteurs sur  $\underline{t}$  préservant l'idéal engendré par  $F$  (où  $F$  est la restriction à  $\underline{t}$  du polynôme invariant  $D$ ). Le calcul des composantes radiales concrètes est immédiat. Désignons en effet par  $u_1, \dots, u_r$  les restrictions à  $\underline{t}$  des polynômes  $q_1, \dots, q_r$ , de sorte que  $P(\underline{t}) = \mathbb{C}[u_1, \dots, u_r]$  et par  $\partial_k$  la dérivation  $\partial/\partial u_k$  de  $P(\underline{t})$ . La composante radiale concrète du gradient de  $q_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), est le champ de vecteurs  $L_i$  défini pour tout  $Z$  dans  $\underline{t}$  par :

$$L_i(Z) = \sum_k B(dq_i(Z), dq_k(Z)) \partial_k. \tag{4.1}$$

Ceci n'est autre que la formule (3.2). On en déduit, sans aucune connaissance préalable de  $\mathfrak{G}_F$ , que  $(L_1, \dots, L_r)$  est une base du  $P(\underline{t})$ -module  $\mathfrak{G}_F$ ; enfin, la composante radiale concrète  $\theta'(L)$  d'un champ de vecteurs invariant  $L$  est donnée par :

$$\theta'(L)(Z) = \sum_k B(L(Z), dq_k(Z)) \partial_k. \tag{4.2}$$

**4.3.** Il reste à identifier les champs de vecteurs  $M_1, \dots, M_r$  de Sekiguchi. Rappelons que dans la situation étudiée par Sekiguchi, le sous-espace de Cartan  $\underline{a}_c$  est en fait une sous-algèbre de Cartan de  $\underline{g}_c$  (et  $g$  est la forme réelle normale

de  $g_c$ ). Ceci étant, il est possible de construire une base  $v_1, \dots, v_r$  de  $\underline{z}(Y_0)$  ayant les propriétés suivantes :

Soit  $s : \mathbf{C}^r \rightarrow \underline{t}$  l'application définie par  $s(z) = X_0 + \sum z_k v_k$ , pour tout  $z = (z_1, \dots, z_r)$  dans  $\mathbf{C}^r$ . Alors, pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , il existe un et un seul polynôme  $K_c$ -invariant homogène  $P_i$  sur  $\underline{p}_c$  tel que  $P_i(s(z)) = z_i$  pour tout  $z$  dans  $\mathbf{C}^r$  et  $P(\underline{p}_c)^{K_c} = \mathbf{C}[P_1, \dots, P_r]$  (voir [K], en particulier les théorèmes 6 et 7).

Soit  $t$  un nombre complexe. Du fait que  $P_i(s(z) + tv_j)$  est  $z_i + t$  si  $i = j$ , ou  $z_i$  si  $i \neq j$ , (ceci par la définition même des  $P_i$ ), on a :

$$B(dP_i(s(z)), v_j) = \left( \frac{d}{dt} \right)_0 P_i(s(z) + tv_j) = \delta_{ij}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Ceci montre que les fonctions polynomiales  $X_i : \mathbf{C}^r \rightarrow \underline{p}_c$  dont l'existence est affirmée par Sekiguchi dans sa proposition 2.2 ne sont autres que  $X_i(z) = dP_i(s(z))$ , et du même coup, que les champs  $M_i$  de Sekiguchi ne sont autres que  $M_i = dP_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) ([S], Theorem 3.8.1). Finalement, la formule (4.2) donnée ci-dessus contient celle du numéro 3.3 de [S].

### 5. Notes bibliographiques.

1) Dans la situation examinée par Sekiguchi, deux circonstances particulières se trouvent réalisées : d'une part,  $\chi(V)^K$  est un  $P(V)^K$ -module libre et d'autre part les gradients des polynômes invariants engendrent ce module.

—Par un théorème de Vust ([Vu], Chapitre III, §1, Proposition 2), pour que  $\chi(V)^K$  soit un  $P(V)^K$ -module libre, il suffit que  $P(V)$  soit un  $P(V)^K$ -module libre, ou autrement dit que la représentation de  $G = K_c$  dans  $W = V \otimes \mathbf{C}$  soit une représentation *colibre*, selon la terminologie de Schwarz, qui a classifié les représentations colibres des groupes  $G$  simples complexes ([Sch 3]). La condition de coliberté est suffisante pour assurer la liberté du  $P(V)^K$ -module  $\chi(V)^K$ , mais n'est pas nécessaire. Dans le cas  $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$  examiné plus haut,  $\chi(\underline{p})^K$  est libre (sur  $P(\underline{p})^K$ ) de rang égal à la dimension de l'espace vectoriel des points fixes de  $M$  dans  $\underline{p}$  ([Vu], Chapitre III, §1, Corollaire de la proposition 2).

—D'une façon générale, si les gradients des polynômes invariants engendrent le module des champs de vecteurs invariants, alors l'application composante radiale  $\theta$  est injective, mais il peut arriver que  $\theta$  soit injective sans que  $\chi(V)^K$  soit engendré par les gradients des polynômes invariants.

2) Le noyau de l'application composante radiale est constituée par les champs de vecteurs *invariants* qui annulent tous les polynômes invariants. Plus généralement, on peut s'intéresser aux champs de vecteurs (invariants ou non) qui annulent les polynômes invariants. Dans certaines circonstances, l'ensemble de ces champs de vecteurs est, en tant que  $P(V)$ -module, engendré par les *champs de Killing* associés à l'opération de  $K$  dans  $V$  (voir par exemple [Sch 1], Pro-

position 9.3 et [D1]).

3) Le noyau  $\mathfrak{N}$  de  $\theta : \mathcal{X}(V)^K \rightarrow \mathfrak{C}_D$  n'est pas en général un facteur direct dans  $\mathcal{X}(V)^K$ . Par contre, si  $K$  est un groupe de Lie compact qui opère sur une variété compacte  $V$ , le noyau de l'application composante radiale  $\theta : \mathcal{X}^\infty(V)^K \rightarrow \text{Der } C^\infty(V)^K$  est toujours un facteur direct dans  $\mathcal{X}^\infty(V)^K$  ([Sch 1], Theorem 4.3).

4) Dans l'exemple de Sekiguchi, on a pu remarquer que l'opération  $R_{\mathfrak{h}}$  de restriction à une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{X}(\mathfrak{g})^G$  sur  $\mathcal{X}(\mathfrak{h})^W$ , où  $W$  est le groupe de Weyl. D'une façon générale, soient  $v$  un point principal de  $V$ , de sorte que son stabilisateur  $K_v$  dans  $K$  appartient à la classe d'isotropie principale, et  $V_0$  l'ensemble des points fixes de  $K_v$  dans  $V$ . Alors l'opération de restriction  $R_0$  à  $V_0$  transforme un champ de vecteurs  $K$ -invariant sur  $V$  en un champ de vecteur  $W$ -invariant sur  $V_0$ , où  $W$  est le groupe  $N(K_v)/K_v$  (quotient par  $K_v$  du normalisateur de  $K_v$  dans  $K$ ). L'application  $R_0$  est toujours injective. Elle est surjective dans certaines circonstances, précisées en particulier par le théorème 3 du §2 du chapitre III de [Vu]. On pourra aussi consulter [Sch 1], Theorem 11.2.

5) Dans la formule (3.2) de la composante radiale, on a vu apparaître de façon naturelle les produits scalaires  $B(dp_i, dp_j)$  des gradients des polynômes invariants  $p_1, \dots, p_r$ . Ces produits scalaires interviennent dans les travaux d'Arnold (on ne citera que [A]), qui affirme qu'il est souvent utile de connaître leurs expressions en fonction des polynômes invariants basiques, et donne ces expressions (dûes à D.B. Fuks) pour les invariants du groupe symétrique ([A], Remark 3.9). Pour d'autres situations, liées aux invariants des groupes de Weyl des algèbres de Lie simples, on pourra consulter ([Gi]).

#### Appendice: Le calcul du cocycle.

**A.1.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie  $n$  (sur un corps de caractéristique nulle) et soit  $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  un champ de vecteurs (disons polynomial) invariant, c'est-à-dire tel que  $L(\text{Ad}(x)X) = \text{Ad}(x)L(X)$  pour tous  $X$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $x$  dans le groupe adjoint  $G$  de  $\mathfrak{g}$ . Par dérivation, on obtient :

$$dL(X) \cdot \text{ad } X = \text{ad}(L(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}) \quad (\text{A.1})$$

où  $dL : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{g}$  est la différentielle de  $L$ . Il en résulte en particulier que pour chaque  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ , la valeur  $L(X)$  du champ invariant  $L$  appartient au centre du centralisateur  $\mathfrak{z}(X)$  de  $X$  dans  $\mathfrak{g}$  ( $L(X) \in \mathfrak{z}(X)$  et  $[L(X), Y] = 0$  pour tout  $Y$  dans  $\mathfrak{z}(X)$ ). En dérivant l'identité  $[L(X), X] = 0$ , on trouve :

$$\text{ad } X \cdot dL(X) = \text{ad}(L(X)) \quad (X \in \mathfrak{g}). \quad (\text{A.2})$$

La comparaison de (A.1) et (A.2) montre que  $dL(X)$  commute à  $\text{ad } X$ , et par suite laisse stable les nilspaces de  $\text{ad } X$ ; par exemple, si  $\mathfrak{h}(X)$  est le noyau de

$(\text{ad } X)^n$  et  $q(X)$  est l'image de  $(\text{ad } X)^n$ , l'endomorphisme  $dL(X)$  respecte la décomposition  $\underline{g} = \underline{h}(X) \oplus q(X)$ .

**A.2.** On écrit :

$$\det(\lambda + \text{ad } X) = \lambda^n + Q_1(X)\lambda^{n-1} + \dots + Q_n(X)$$

et on définit des fonctions polynomiales  $B_k : \underline{g} \rightarrow \text{End}(\underline{g})$  ( $0 \leq k \leq n-1$ ), en posant :  $B_0(X) = \text{id}_{\underline{g}}$ ,  $B_k(X) + (\text{ad } X) \circ B_{k-1}(X) = Q_k(X) \text{id}_{\underline{g}}$ , de sorte que :

$$C(\lambda; X) = \lambda^{n-1} + B_1(X)\lambda^{n-2} + \dots + B_{n-1}(X) \quad (\text{A.3})$$

est l'adjointe de  $\lambda + \text{ad } X$  (voir [Ga], Chapitre IV, §4), i.e. vérifie :

$$(\lambda + \text{ad } X)C(\lambda; X) = \det(\lambda + \text{ad } X). \quad (\text{A.4})$$

**A.3.** Soit  $r$  le rang de  $\underline{g}$ ; alors  $Q_k(X) = 0$  pour  $k > n-r$  ([D2], 1.9.8),  $Q_{n-r}$  est le polynôme discriminant de  $\underline{g}$  et :

$$\left. \begin{aligned} B_{n-r}(X) &= (\text{ad } X)^{n-r} + Q_1(X)(\text{ad } X)^{n-r-1} + \dots + Q_{n-r}(X) \text{id}_{\underline{g}} \\ B_{n-r+s}(X) &= (\text{ad } X)^s B_{n-r}(X) \quad s \geq 1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.5})$$

On notera, pour un usage ultérieur, que l'endomorphisme  $B_{n-r}(X)$  est nul sur l'image de  $(\text{ad } X)^n$  (Théorème de Hamilton-Cayley).

**A.4. LEMME.** Soit  $L$  un champ de vecteurs invariant sur  $\underline{g}$ . On a, pour tout  $X$  dans  $\underline{g}$  :

$$(LQ_{n-r})(X) = Q_{n-r}(X) \text{tr}_{\underline{g}/\underline{h}(X)}(dL(X)) \quad (\text{A.6})$$

où  $\underline{h}(X)$  est le noyau de  $(\text{ad } X)^n$  et  $\text{tr}_{\underline{g}/\underline{h}(X)}(dL(X))$  désigne la trace de l'endomorphisme de  $\underline{g}/\underline{h}(X)$  induit par  $dL(X)$ .

**DÉMONSTRATION.** D'après (A.4) et la formule de dérivation des déterminants, on a :

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_0 \det(\lambda + \text{ad } X + t \text{ad } L(X)) = \text{tr}_{\underline{g}}(C(\lambda; X) \circ \text{ad } L(X)).$$

D'après (A.3), le second membre de l'égalité précédente est un polynôme en  $\lambda$  où le coefficient de  $\lambda^r$  (par ailleurs égal à  $LQ_{n-r}(X)$ ) est :

$$\text{tr}(B_{n-r-1}(X) \circ \text{ad } L(X)) = \text{tr}(B_{n-r-1}(X) \circ \text{ad } X \circ dL(X))$$

(on a utilisé la formule (A.2)). Comme  $B_{n-r-1}(X) \circ \text{ad } X + B_{n-r}(X) = Q_{n-r}(X) \text{id}_{\underline{g}}$ , il vient :

$$LQ_{n-r}(X) = Q_{n-r}(X) \text{tr}_{\underline{g}}(dL(X)) - \text{tr}_{\underline{g}}(B_{n-r}(X) \circ dL(X)).$$

L'endomorphisme  $B_{n-r}(X) \circ dL(X)$  étant nul sur le supplémentaire de  $\underline{h}(X)$

constitué par l'image de  $(\text{ad } X)^n$ , et stabilisant  $\mathfrak{h}(X)$ , sa trace coïncide avec celle de sa restriction à  $\mathfrak{h}(X)$ ; comme  $\text{ad } X$  est nilpotent sur  $\mathfrak{h}(X)$  et commute à  $dL(X)$ , on voit en utilisant (A.5):

$$\text{tr}_{\mathfrak{g}}(B_{n-r}(X) \circ dL(X)) = \text{tr}_{\mathfrak{h}(X)}(B_{n-r}(X) \circ dL(X)) = Q_{n-r}(X) \text{tr}_{\mathfrak{h}(X)}(dL(X)).$$

D'où il résulte que :

$$LQ_{n-r}(X) = Q_{n-r}(X)(\text{tr}_{\mathfrak{g}}(dL(X)) - \text{tr}_{\mathfrak{h}(X)}(dL(X))) = Q_{n-r}(X) \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}(X)}(dL(X)).$$

**A.5.** Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  ([D2], 1.9.9). Il résulte immédiatement du lemme précédent que, pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{h}$ , on a :

$$LQ_{n-r}(X) = Q_{n-r}(X) \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(dL(X)).$$

**A.6.** Considérons en particulier le cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie réductive réelle. On fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $B$  sur  $\mathfrak{g}$ , qui coïncide avec la forme de Killing sur  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . On dispose alors de l'opérateur de Casimir  $\square$ , qui est un opérateur différentiel invariant, à coefficients constants, naturellement associé à  $B$ , de la manière suivante : si  $f$  est une fonction  $C^\infty$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathfrak{g}$ , on calcule son gradient (au moyen de  $B$ )  $df : \Omega \rightarrow \mathfrak{g}$ , puis la dérivée  $d^2f$  de  $df$ , de sorte que, pour chaque  $X$  dans  $\Omega$ ,  $d^2f(X)$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{g}$ , et on a alors :  $\square f(X) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(d^2f(X))$ .

**A.7.** Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ ; comme la restriction  $B_0$  de  $B$  à  $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$  est non dégénérée, on dispose sur  $\mathfrak{h}$  d'un opérateur  $\Delta$  associé à  $B_0$  comme  $\square$  était associé à  $B$ ; si  $f_0$  est une fonction  $C^\infty$  sur un ouvert de  $\mathfrak{h}$ , on a donc  $\Delta f_0(X) = \text{tr}_{\mathfrak{h}}(d^2f_0(X))$ . La restriction  $D_0$  à  $\mathfrak{h}$  du polynôme discriminant  $D$  de  $\mathfrak{g}$  est le carré d'un polynôme harmonique  $J : D_0 = J^2$  et  $\Delta J = 0$ . Soit maintenant  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $G$ -invariante de classe  $C^\infty$ , définie dans un ouvert invariant  $\Omega$  de  $\mathfrak{g}$  et  $f_0$  sa restriction à  $\Omega \cap \mathfrak{h}$ . On a alors, pour tout  $X$  dans  $\mathfrak{h} : df_0(X) = df(X)$  et  $\text{tr}(d^2f_0(X)) = \text{tr}_{\mathfrak{h}}(d^2f(X))$ . Comme (Formule (A.6)) :

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(d^2f(X))D(X) &= B(dD(X), df(X)) = B_0(dD_0(X), df_0(X)) \\ &= 2J(X)B_0(dJ(X), df_0(X)) \end{aligned}$$

pour  $X$  dans  $\mathfrak{h}$ , on déduit :

$$2B_0(dJ(X), df_0(X)) = J(X) \text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(d^2f(X)).$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \Delta(Jf_0)(X) &= 2B_0(dJ(X), df_0(X)) + (J\Delta f_0)(X) = J(X)(\text{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(d^2f(X)) + \text{tr}_{\mathfrak{h}}(d^2f(X))) \\ &= J(X) \text{tr}_{\mathfrak{g}}(d^2f(X)). \end{aligned}$$

Donc  $\Delta(Jf_0)(X) = J(X)\square f(X)$  pour  $X$  dans  $\mathfrak{h}$ . C'est la formule de la composante

radiale de Harish-Chandra (voir par exemple [Wa], 7.10.26).

### Bibliographie

- [A] V.I. Arnol'd, Wave front evolution and equivariant Morse lemma, *Comm. Pure Appl. Math.*, **29** (1976), 557-582.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.
- [D1] J. Dixmier, Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples, *J. Reine Angew. Math.*, **309** (1979), 183-190.
- [D2] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [Ga] F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Vol. I, Chelsea, New-York, 1960.
- [Gi] A.B. Givental', Displacement of invariants of groups that are generated by reflexions and are connected with simple singularities of functions, *Funct. Anal. Appl.*, **14** (1980), 81-89.
- [He] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New-York, 1962.
- [K] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, **85** (1963), 327-404.
- [K-R] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 753-809.
- [S] J. Sekiguchi, Invariant vector fields on a simple Lie algebra under the adjoint action, *J. Math. Soc. Japan*, **36** (1984), 147-159.
- [So] L. Solomon, Invariants of finite reflexion groups, *Nagoya Math. J.*, **22** (1963), 57-64.
- [Sch1] G.W. Schwarz, Lifting smooth homotopies of orbit spaces, *Publ. Math. IHES*, **51** (1980), 37-135.
- [Sch2] G.W. Schwarz, Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group, *Topology*, **14** (1975), 63-68.
- [Sch3] G.W. Schwarz, Representations of simple Lie groups with a free module of covariants, *Invent. Math.*, **50** (1978), 1-12.
- [Vu] Th. Vust, *Covariants de groupes algébriques réductifs*, Thèse, Univ. de Genève, 1974.
- [Wa] N.R. Wallach, *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces*, Marcel Dekker, New-York, 1973.

M. RAÏS

Université de Poitiers  
 Mathématiques  
 40, Avenue du Recteur Pineau  
 86022-Poitiers  
 France